

138304

基本叢書
大學叢書

羣

論

上冊

著譯
造絳
正君
園蕭



商務印書館發行

316
76413

138304

大學叢書

羣

上

國正造
蕭君絳



商務印書館發行

節 譯 著 者 原 序

本書由五篇而成：

第一篇，乃論羣一般通有之性質者也，即所謂抽象羣論者是。羣之抽象的討論，自 Frobenius 氏始。本篇即以氏之研究為主而組織化者，然其間併非無著者之創意在。

第二篇所論，乃以置換爲羣之構成元素者，即置換羣是。此即論由置換之一特殊元素而生之羣之性質者也。置換羣分爲可遷的與非遷的兩種，而後者則由前者所構成。著者當討論前者之際，乃以可遷羣得視爲羣之傍系置換表示之一點爲基礎而論究之；其本原性與非原性，亦由此見地而說明之；隨即以是所得之結果而直用諸一般可遷羣焉。

第三篇，論母式之合同羣者也。本來，在法母式之各項爲素數羣者之研究，雖由 Rarum 氏而始成，然著者乃使其一般化，並闡明母式之一意的合同乘法之條件而以定合同羣之義。加以由 Dickson 氏著書 Linear groups 中所載一次變換羣之母元素得獲暗示，乃求得一般母式合同羣之母元素，及由是而克作羣者之母式所應有之條件，更將羣分解，以擴張關於一次變換羣之分解者之 Jordan 氏之定理。最後就一次變換合同羣，作爲母式合同羣之特殊者

而論述之。其中第 128 節所示之證明，乃根據 Dickson 氏所與之方法者也。此外關於母式合同羣，雖尚有擴張之餘地，然請以讓諸他日，俟有機會，再行詳論。

第四篇，乃以特殊羣爲標題者，其中關於 Abel 氏羣，素數冪元羣之型以及分數變換羣皆在討論範圍之內。

第五篇，乃論羣母式，羣指標者。此雖爲 Frobenius 氏所創始，顧在本篇，乃從 Schur 氏之方法，由羣之母式表示以導入羣指標，然後再示其與 Frobenius 氏者一致也（第二十六，第二十七章）。至第二十八章則示羣指標之應用焉。

本書所論，僅及羣論大綱，細微之處，未暇詳及，在使讀者理解其真諦，是爲區區之微意而亦所最努力者也。

一九二八年五月十日

著者識。

目次

第一編 羣的概論

第一章 置換

	頁
1. 置換之定義...	1
2. 置換之結合...	2
3. 不動置換, 逆置換...	5
4. 置換之連乘積, 冪及其逆...	7
5. 巡回置換...	8
6. 巡回置換之積...	9
7. 巡回表示法...	11
8, 9. 轉換, 轉換表示法...	13

第二章 羣之定義

10. 置換羣...	18
11. 對稱羣...	19
12. 交代羣...	20
13. 羣之基本性質...	21
14. 元素與其結合...	23
15. 羣之一般的定義...	26
16. 羣之例 (I), 三角羣...	27
17. 羣之例 (II), 四面體羣...	31
18. 主元素與逆元素...	32
19. 有限羣...	36
20. Abel 氏羣...	38
21. 羣之同態...	40

第 三 章 約 羣

	頁
22. 約羣	44
23, 24. 傍系	45
25. 元素之巡回率, 巡回羣	50
26, 27. 部分及其結合	52

第 四 章 共 軌

28, 29. 共軌元素	57
30, 31. 共軌元素系	61
32. 共軌約羣	65
33. 共軌約羣系	67
34. 自己共軌約羣	70
35. 單羣, 複羣	73
36. 重傍系	74

第 五 章 合 同, 商 羣

37. 合同之原理	76
38, 39. 羣之合同	78
40, 41. 商羣	83
42. 换位羣	86

第 六 章 重 複 同 態

43-45. 重複同態	90
46. 約羣之對應	98
47. 關於素數羣元數羣	104

第 七 章 組 成 羣 列

48. 極大正常約羣	107
49. 組成列	110
50. Hölder 氏定理	113

	頁
51. 主組成列	117
52. 極小正常約羣	118
53. 關於商羣列之項之定理	121

第八章 Sylow 及 Frobenius 兩氏之定理

54. Sylow 氏定理	124
55. Frobenius 氏之擴張	131

第九章 羣之單複, 可解性

56. p^2q 元羣之可解性	130
57, 58. Frobenius 氏定理	143
59. 元數不超過 100 之羣之單複	150
60. 二十面體羣	152
61. 單羣之元數	156

第二篇 置換羣

第十章 可遷羣

62. 定義 (可遷羣, 非遷羣)	157
63. 關於可遷羣之定理	158
64. 多重可遷羣	163
65. 對稱羣與交代羣	166
66. 交代羣之單純性	170
67. 可遷重複度之限界	173

第十一章 非遷羣

68. 由可遷羣以作非遷羣	176
69. 可遷系	180
70. 非遷羣之構造	181

	頁
71. 不動文字之數	188
72. 由正置換而成之羣	192

第十二章 羣之置換表示

73. 表為正置換羣者	194
74. 正置換羣為羣之置換表示者	197
75. 表示為傍系之置換羣者	200
76. 可遷羣之為羣之傍系置換表示者	206
77. 表示為共軛約羣(或元素)之置換者	210
78. 元數 36, 72, 90 者之羣之複合性	214
79. 60 元單羣	216

第十三章 可遷羣之本原性及非原性

80. 非原羣	220
81. 傍系置換表示之本原性及非原性	222
82. 非原系之置換羣	225
83. 一般可遷羣	228
84. 非遷正常約羣	235
85. 非原系之選法	237

第十四章 可遷約羣與羣之可遷重複度

86. 含轉換或三項巡回置換之可遷羣	241
87. 羣之有可遷約羣者之可遷重複度	245
88. 前節 (i), (ii) 款之例	250

第十五章 與可遷羣之各置換交換可能者之置換

89. 在正置換表示時	253
90, 91. 在傍系置換表示時	256
92. 羣($\mathfrak{G}$)之可遷性及非遷性	264
93, 94. 在一般可遷羣時	268

第十六章 自己同態, 全形

95. 定義	275
96. 內外同態	276
97. 同態羣	277
98. 正置換羣之全形	281
99. 全形之可達重複度	285
100. 亞巡同羣	286
101. 一般羣之全形, 亞巡同羣之生成之定義	292
102. 羣之全形之即含其羣者	294
103. 特性約羣	299
104. 特性約羣列	301
105, 106. 全羣	303
107. 與傍系置換表示交換可能者之置換	308
108. 置換表示之同值	313

第三篇 合同羣

第十七章 母式之合同乘法

109. 母式	318
110. 母式之合同, 乘法之意的條件	322
111, 112. 含最多數之母式者之集合	328

第十八章 母式合同羣

113, 114. 母式合同羣	334
115. 特殊母式	343
116. 合同羣之母元素	346
117. $\mathfrak{S}(n, l)$ 之母元素	356
118. 逆母式存在之條件	359
119. 母式之分解	365

	頁
120. 母式合同羣之分解	367
121. 關於特殊羣以及羣之分解之注意	374

第十九章 法母式之項爲素數羣者

122. 母式合同羣之元數(法爲 p^m 時)	377
123. $m_1 = m_2$ 時	382
124. 指數列	388

第二十章 一次變換合同羣

125. 一次變換	395
126. 變換之變形	398
127. 一次變換合同羣	399
128. U/E 之單純性	400
129. 單羣表	409

第四篇 特殊羣

第二十一章 Abel 氏羣

130. 母元素, 基底	411
131. 不變系	419
132. Abel 氏羣之型	424
133. 約羣之型	426
134. $[1, 1, \dots, 1]$ 型 Abel 氏羣中之約羣之數	429
135. Abel 氏羣之同態羣	431
136. Sylow 氏約羣之同態羣	436
137. 巡回羣之同態羣	439

第二十二章 素數羣元羣之型, 四元數

138. 補助定理	442
-----------------	-----

	頁
139. 含 p^{m-1} 元巡回羣之 p^m 元羣	446
140, 141. 含 p^{m-2} 元巡回羣正常約羣者之 p^m 元羣	448
142. 2^m 元羣	456
143. 四元數, 四元數羣	461
144. 四元數與二次母式之關係	463
145. Hamilton 氏羣	465

第二十三章 母式之指標根

146, 147. 極指標方程式	473
148. 母式之正常形	479

第二十四章 分數變換羣

149. 共線變換	484
150. 分數變換	486
151. 有限巡回率之條件, Cayley 氏變換	490
152. 分數變換之有以羣	492
153. 有以羣之種類	498
154. 立體平畫射影	502
155. Cayley 氏變換之幾何學的意義	506
156. 分數變換羣與球之同構羣	508

第五篇 羣母式, 羣指標

第二十五章 母式之階級

157. 一般母式	511
158. 母式之生成	514
159. 母式之階級	521

第二十六章 羣母式

	頁
160. 羣母式	525
161. 羣母式之同值、簡約	530
162, 163. 既約羣母式	539
164. 同值之條件	551
165. 正羣母式, 既約羣母式系	553

第二十七章 羣指標

166. 羣指標	560
167. 羣指標及其相關之公式	563
168. 關於羣指標之定理	588
169. 決定羣指標之方程式	571
170. 求羣指標之例	576
171. 商之羣指標	581

第二十八章 羣指標之應用

172. $p^n q^3$ 元羣之可解性	587
173. 羣之指標與約羣之指標之關係	591
174. n 次 $n+1$ 級可遷羣	597
175. 屬於可遷羣之羣母式	603
176. 可遷羣之置換與羣指標之關係	608
177. 含 n 次鄰同置換之 n 次可遷羣	611
術語索引	619

第 一 篇

羣 的 概 論

第一章 置 換

1 置換之定義

今於此有五文字焉, a, b, c, d, e , 各置於一定之位置, 次將各個位置變換, 令 a 所在之處置以 b , b 之處置以 c , 順次 c, d, e 之處置以 a, d, e , 則此五文字間一置換生焉.

同樣, 一般有 n 個相異之文字

$$(1) \quad a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$$

時, 若其兩相異之文字不以同一之文字置換之, 則 (1) 之各文字而以屬於 (1) 之文字置換之舉, 名曰在 n 個文字 $a, a_1, \dots, a_{n-1}$ 上所施行之置換.

在 n 個文字 $a, a_1, \dots, a_{n-1}$ 上所行之置換, 若 a 爲 β 所置換, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 爲 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ 所置換時, 則此置換乃以記號

$$\begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

表之。

例如

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & a & d & e \end{pmatrix}$$

者，乃示 a, b, c, d, e 以 b, c, a, d, e 置換所得之置換者也。

且就置換言，吾人所須注目者，僅在始初所與之各文字究以何文字去置換之一點，故其記號上，上列之文字任以何順序排列，儘可隨意。如

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & a & d & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & c & a & d & e \\ c & e & b & d & a \end{pmatrix}$$

二者，上列文字配列之順序雖異，而以 b 換 a ， e 換 b ， a 換 c ， d 換 d ， c 換 e ，則全然一致，故兩者須視為表示同一之置換者焉。

2. 置換之結合。

$$\text{今 } S = \begin{pmatrix} a & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \gamma & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \end{pmatrix}$$

為 n 個文字 $a, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 上所行之兩置換，由 T ，文字 β 為 γ' 所置換， $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1}$ 為 $\gamma'_1, \gamma'_2, \cdots, \gamma'_{n-1}$ 所置換時，則 T 可換書如次：

$$T = \begin{pmatrix} \beta & \beta_1 & \cdots & \beta_n \\ \gamma' & \gamma'_1 & \cdots & \gamma'_{n-1} \end{pmatrix}$$

茲 n 個文字

$$(1) \quad \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$$

之上,若先施以置換 S , 則 (1) 之文字,其順序變而爲

$$\beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$$

再於此施以置換 T , 則其順序復變而爲

$$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}.$$

由此觀之, (1) 之上繼續施以兩置換 S 及 T , 其結果與於 (1) 上施行唯一之置換

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \gamma & \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-1} \end{pmatrix}$$

者相同,此最後之置換 P , 名曰始初二置換 S 及 T 之積,而以 ST 表示之, 即

$$P = ST$$

也,於是凡由兩置換以作其積者,名曰兩置換之結合或曰乘法.

如以

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

則

$$ST = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

$$TS = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

$$SU = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix},$$

$$US = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

就此例而觀，當作兩置換之積時，如於 S 乘以 U 所得之積 ST 及於 T 乘以 S 所得之積 TS 雖則一致，然乘 U 於 S 之積 SU 與乘 S 於 U 之積 US 則互異，可見對置換之乘法言，其交換法則未見其必成立也。

雖然，置換之乘法上，交換法則固未見其必然成立，然組合法則實常成立焉。例若

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & c & a \end{pmatrix}.$$

則

$$ST = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix},$$

$$\therefore (ST)U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

又

$$TU = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix},$$

$$\therefore S(TU) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

因之

$$(ST)U = S(TU).$$

注意。當有一置換 S ，而取他置換 T 以作積 ST ，名曰 T 右乘於 S ；而作積 TS ，則名曰 T 左乘於 S 。

3. 不動置換, 逆置換.

於 n 個文字 $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 上所得施行置換之總數爲

$$n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

明矣。然此 $n!$ 個之中，彼 n 個文字之任何個皆不動者，亦以之爲一置換而包含在內。此種置換名曰不動置換，而以 1 表之，卽

$$\begin{pmatrix} a & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} = 1$$

是也。今取任意一置換

$$S = \begin{pmatrix} a & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

此時

$$1 \cdot S = \begin{pmatrix} a & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix} = S$$

$$\begin{aligned} \text{又 } S \cdot 1 &= \begin{pmatrix} a & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix} = S. \end{aligned}$$

故不動置換，對於任意之置換 S ，無論左乘右乘，皆不能變化 S 者也。

其次，若有一置換

$$S = \begin{pmatrix} a & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$