大學叢書

羣論

上冊

園正造著

蕭君絳譯

商務印書館發行

大學叢書

[illegible]

上冊

岡正造著
蕭君絳譯

商務印書館發行

節譯著者原序

本書由五篇而成:

第一篇,乃論羣一般通有之性質者也,即所謂抽象羣論者是. 羣之抽象的討論,自 Frobenius 氏始. 本篇即以氏之研究爲主而組織化者,然其間併非無著者之創意在.

第二篇所論,乃以置換爲羣之構成元素者,即置換羣是. 此部論由置換之一特殊元素而生之羣之性質者也. 置換羣分爲可遷的與非遷的兩種,而後者則由前者所構成. 著者當討論前者之際,乃以可遷羣得視爲羣之傍系置換表示之一點爲基礎而論究之;其本原性與非原性,亦由此見地而說明之;隨即以是所得之結果而直用諸一般可遷羣焉.

第三篇,論母式之合同羣者也. 本來,在法母式之各項爲素數羃者之研究,雖由 Ranum 氏而始成,然著者乃使其一般化,並闡明母式之一意的合同乘法之條件而以定合同羣之義. 加以由 Dickson 氏著書 Linear groups 中所載一次變換羣之母元素得獲暗示,乃求得一般母式合同羣之母元素,及由是而克作羣者之母式所應有之條件,更將羣分解,以擴張關於一次變換羣之分解者之 Jordan 氏之定理. 最後就一次變換合同羣,作爲母式合同羣之特殊者

而論述之. 其中第 128 節所示之證明,乃根據 Dickson 氏所與之方法者也. 此外關於母式合同羣,雖尚有擴張之餘地,然請以讓諸他日,俟有機會,再行詳論.

第四篇,乃以特殊羣爲標題者,其中關於 Abel 氏羣,素數冪元羣之型以及分數變換羣皆在討論範圍之內.

第五篇,乃論羣母式,羣指標者. 此雖爲 Frobenius 氏所創始,顧在本篇,乃從 Schur 氏之方法,由羣之母式表示以導入羣指標,然後再示其與 Frobenius 氏者一致也(第二十六,第二十七章). 至第二十八章則示羣指標之應用焉.

本書所論,僅及羣論大綱,細微之處,未暇詳及,在使讀者理解其眞諦,是爲區區之微意而亦所最努力者也.

一九二八年五月十日

著者識.

目　次

第一編　羣的概論

第一章　置換

第二章　羣之定義

第三章 約羣

第四章 共軛

第五章 合同,商羣

第六章 重複同態

第七章 組成羣列

第八章　Sylow 及 Frobenius 兩氏之定理

第九章　羣之單複,可解性

第二篇　置換羣

第十章　可遷羣

第十一章　非遷羣

第十二章 羣之置換表示

第十三章 可遷羣之本原性及非原性

第十四章 可遷約羣與羣之可遷重複度

第十五章 與可遷羣之各置換交換可能者之置換

第十六章　自己同態,全形

第三篇　合同羣

第十七章　母式之合同乘法

第十八章　母式合同羣

頁

第十九章 法母式之項爲素數冪者

第二十章 一次變換合同羣

第四篇 特殊羣

第二十一章 Abel 氏羣

第二十二章 素數冪元羣之型,四元數

第二十三章 母式之指標根

第二十四章 分數變換羣

第五篇 羣母式,羣指標

第二十五章 母式之階級

第二十六章 羣母式

頁

第二十七章 羣指標

第二十八章 羣指標之應用

第一篇
羣的概論

第一章 置換

1 置換之定義

今於此有五文字焉，a, b, c, d, e，各置於一定之位置.次將各個位置變換，令 a 所在之處置以 b，b 之處置以 c，順次 c, d, e 之處置以 a, d, c，則此五文字間一置換生焉.

同樣，一般有 n 個相異之文字

$$(1) \qquad \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$$

時，若其兩相異之文字不以同一之文字置換之，則(1)之各文字而以屬於(1)之文字置換之舉，名曰在 n 個文字 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 上所施行之置換.

在 n 個文字 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 上所行之置換，若 α 爲 β 所置換，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 爲 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1}$ 所置換時，則此置換乃以記號

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 & \cdots\cdots & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

表之.

例如

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & e & a & d & c \end{pmatrix}$$

者,乃示 a, b, c, d, e 以 b, e, a, d, c 置換所得之置換者也.

且就置換言,吾人所須注目者,僅在始初所與之各文字究以何文字去置換之一點,故其記號上,上列之文字任以何順序排列,儘可隨意. 如

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & e & a & d & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & e & a & d & c \\ e & c & b & d & a \end{pmatrix}$$

二者,上列文字配列之順序雖異,而以 b 換 a, e 換 b, a 換 c, d 換 d, c 換 e, 則全然一致.故兩者須視爲表示同一之置換者焉.

2. 置換之結合.

今 $$S=\begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1} \end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1} \\ \gamma & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \end{pmatrix}$$

爲 n 個文字 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 上所行之兩置換.由T,文字 β 爲 γ' 所置換, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1}$ 爲 $\gamma'_1, \gamma'_2, \cdots \gamma'_{n-1}$ 所置換時,則 T 可換書如次:

$$T=\begin{pmatrix} \beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1} \\ \gamma' & \gamma'_1 & \cdots & \gamma'_{n-1} \end{pmatrix}$$

茲 n 個文字

(1) $$a,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_{n-1}$$

之上,若先施以置換 S,則(1)之文字,其順序變而為

$$\beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_{n-1}$$

再於此施以置換 T,則其順序復變而為

$$\gamma',\ \gamma'_1,\ \gamma'_2,\ \cdots\cdots,\ \gamma'_{n-1}.$$

由此觀之,(1)之上繼續施以兩置換 S 及 T,其結果與於(1)上施行唯一之置換

$$P=\begin{pmatrix} a & a_1 & \cdots\cdots & a_{n-1} \\ \gamma' & \gamma'_1 & \cdots\cdots & \gamma'_{n-1} \end{pmatrix}$$

者相同.此最後之置換 P,名曰始初二置換 S 及 T 之積,而以 ST 表示之. 即

$$P=ST$$

也.於是凡由兩置換以作其積者,名曰兩置換之結合或曰乘法.

如以

$$S=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

則

$$ST=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

$$TS=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

$$SU=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&c&a\\a&c&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\a&c&b\end{pmatrix},$$

$$US=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&a&c\\c&b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\end{pmatrix}.$$

就此例而觀,當作兩置換之積時,如於S乘以T所得之積ST及於T乘以S所得之積TS雖則一致,然乘U於S之積SU與乘S於U之積US則互異.可見對置換之乘法言,其交換法則未見其必成立也.

雖然,置換之乘法上,交換法則固未見其必然成立,然組合法則實常成立焉.例若

$$S=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a&c\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&a\end{pmatrix}.$$

則

$$ST=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&a\end{pmatrix},$$

$$\therefore\qquad (ST)U=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\end{pmatrix}.$$

又

$$TU=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\a&c&b\end{pmatrix},$$

$$\therefore\qquad S(TU)=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\a&c&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\end{pmatrix}.$$

因之 $$(ST)U=S(TU).$$

注意. 當有一置換S,而取他置換T以作積ST,名曰T右乘於S;而作積TS,則名曰T左乘於S.

3. 不動置換,逆置換.

於 n 個文字 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 上所得施行置換之總數爲

$$n(n-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1=n!$$

明矣.然此 $n!$ 個之中,彼 n 個文字之任何個皆不動者,亦以之爲一置換而包含在內.此種置換名曰**不動置換**,而以 1 表之,即

$$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\\ \alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}=1$$

是也.今取任意一置換

$$S=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\\ \beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1}\end{pmatrix}.$$

此時

$$1\cdot S=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\\ \alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\\ \beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\\ \beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1}\end{pmatrix}=S$$

又　$$S\cdot1=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\\ \beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\\ \alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\\ \beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1}\\ \beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\\ \beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1}\end{pmatrix}=S.$$

故不動置換,對於任意之置換 S,無論左乘右乘,皆不能變化 S 者也.

其次,若有一置換

$$S=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}\\ \beta & \beta_1 & \cdots\cdots & \beta_{n-1}\end{pmatrix}.$$