数学分析的内容方法和练习

上册

〔苏〕玻·陂·捷米多维奇 等著

黄智明 樊家琨 李瑞卿 译

河南教育学院出版

译 者 序

《数学分析的内容方法和练习》是根据俄、英两种版本对照翻译的．本书是苏联几所大学十位有名望、有经验的教授积数十年的教学成果集体编写的，最后由苏联数学物理博士吉米多维奇校订．从六十年代至今都是苏联高等技术学校的高等数学用书．

全书内容共分十章（见目录），各章节之前都有简要的理论介绍，包括基本定义、定理和公式等；对于重要的具有代表性的典型范例都作了详解；并且各章节中配备了足够数量的习题和练习供教师和学生选用．

全书共收编练习题3193个，在书末《解答》中均备有答案；对于较难的习题还作出了解法提示(带有一个星号的)；具有高度技巧或具有代表性的习题（带有两个星号的），全部在《解答》中作出了详解．

从本书的内容深度和广度上来看，可供我国当前高等工科院校、师范院校、师范专科学校以及中等专业学校的数学教师作教学参考；特别是前五章（一元函数微积分），对

于全日制中学从80年起使用全国通用数学教材讲授微积分的内容很有参考价值。由于本书的例题和习题都比较多，所以对于中等学校的数学教师来说，无论是进修还是教学都是一本难得的参考书。

最后需要说明：此书俄文原名为《数学分析的习题与练习》，英译名为《数学分析的问题》，鉴于本书的每一章节都按内容、例题（解题方法）、练习三部分编排，所以中译时，我们定名为《数学分析的内容方法和练习》。另外，中学全国通用教材中的微积分，只涉及了本书前五章的内容，为了方便中等学校的教师使用，特将前五章和后五章分上、下两册出版。

此书译稿曾经郑州大学数学系主任吴祖基教授审阅，在这里谨致谢意。

由于译者水平所限，疵谬之处在所难免，敬希读者批评指正。

译　者

一九八〇年二月九日

上册目录

第一章　分析引论

§1.函　数

1°. **实数**　有理数和无理数的集合统称为实数。实数 a 的绝对值理解为非负数 $|a|$，用下述条件规定：如果 $a\geqslant 0$，则 $|a|=a$；如果 $a<0$，则 $|a|=-a$。下列不等式对一切实数 a 和 b 成立：

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

2°. **函数的定义**　如果对于变量 x 的每个值*)，它属于某一集合 E，对应于量 y 一个且只一个有限值，那么，y 称为定义在集合 E 上的 x 的函数(单值)，或者称为因变量。x 称为自变量或独立变量。y 是 x 的函数简记为 $y=f(x)$ 或 $y=F(x)$ 等等.

如果对于属于某集合 E 的每一 x 值，对应于一个或几个变量 y 的值，那么，y 称为定义在 E 上的多值函数。以后，如果不另外说明，我们谈到的“函数”都是指单值函数。

3°. **函数的定义域**　使给定的函数有定义的 x 值的集合，称为这个函数的定义域（或称为这个函数的域）。在最简单的情况，函数的定义域是某一闭区间 $[a,b]$，它是满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合；或者是某一开区间 (a,b)，它是满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合．函数的定义

*) 今后，如果不另外说明，认为一切值都是指实数而言。

域也可能是一个较复杂的构造（例如，见习题21）。

例1．确定函数

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

的定义域。

解．只有当

$$x^2-1>0,$$

即$|x|>1$时，函数才有定义，于是，函数的定义域是由区间$-\infty<x<-1$和$1<x<+\infty$构成的集合。

4°．反函数　如果方程$y=f(x)$对x能够唯一地解出，即，如果能写出函数$x=g(y)$，使$y\equiv f[g(y)]$，那么，函数$x=g(y)$就是$y=f(x)$的反函。按照标准记法，$x=g(y)$常写成$y=g(x)$。显然，$g[f(x)]\equiv x$，即函数$f(x)$是$g(x)$的反函数(反过来也是这样)。

在一般情况下，方程$y=f(x)$定义一个多值反函数$x=f^{-1}(y)$，对于一切y值即函数$f(x)$的一切值，使$y\equiv f[f^{-1}(y)]$。

例2．确定函数

$$y=1-2^{-x} \tag{1}$$

的反函数。

解：对x解方程(1)，我们有

$$2^{-x}=1-y$$

和

$$x=-\frac{\lg(1-y)^{*)}}{\lg 2}. \tag{2}$$

显然，函数(2)的定义域是$-\infty<y<1$。

---

*) $\lg x=\log_{10}x$，它是以10为底的数x的对数。

5°. **复合函数和隐函数** 如果x的函数y，用等式$y=f(u)$，而$u=\varphi(x)$等等，接连地定义，那么就称为一个复合函数或函数的函数。

如果一个函数用一个不解出因变量的方程来定义，那么就称为一个隐函数。例如，方程$x^3+y^3=1$定义的y，就是x的一个隐函数。

6°. **函数的图形** 在xy－平面上，坐标通过方程$y=f(x)$相联系的点(x, y)的集合，称为给定函数的图形。

1**. 证明：如果a和b都是实数，则

$$\left||a|-|b|\right|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

2. 证明下列等式：

a) $|ab|=|a|\cdot|b|$； b) $|a|^2=a^2$；

c) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$； d) $\sqrt{a^2}=|a|$.

3. 解不等式：

a) $|x-1|<3$； b) $|x+1|>2$；

c) $|2x+1|<1$； d) $|x-1|<|x+1|$.

4. 设$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$. 求出$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$.

5. 设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$. 求出$f(0)$，$f\left(-\dfrac{3}{4}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{f(x)}$.

6. $f(x)=\arccos(\lg x)$. 求$f\left(\dfrac{1}{10}\right)$，$f(1)$，$f(10)$.

7. 设函数$f(x)$是一次函数，已知$f(-1)=2$，$f(2)=-3$，求出这个函数。

8. 设函数$f(x)$是二次有理整函数，已知$f(0)=1$，

$f(1)=0$，$f(3)=5$．求出这个函数。

9．设$f(4)=-2$，$f(5)=6$．求出$f(4,3)$的近似值，假定我们考虑函数$f(x)$在区间$4\leqslant x\leqslant 5$上是线性的（函数的线性插值法）。

10．用绝对值符号，把函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{如果}\ x\leqslant 0,\\ x, & \text{如果}\ x>0\end{cases}$$

写成单一的公式。

确定下列函数的定义域：

11．a) $y=\sqrt{x+1}$； b) $y=\sqrt[3]{x+1}$．

12．$y=\dfrac{1}{4-x^2}$．

13．a) $y=\sqrt{x^2-2}$； b) $y=x\sqrt{x^2-2}$．

14**．$y=\sqrt{2+x-x^2}$．

15．$y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$．

16．$y=\sqrt{x-x^3}$．

17．$y=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$．

18．$y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$．

19．$y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$．

20．$y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$．

21．$y=\sqrt{\sin 2x}$．

22．$f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$．求

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}\text{和}\psi(x)=\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}.$$

23. 函数$f(x)$定义在对称区间$-l<x<l$上，如果$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；如果$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数。

确定下列函数哪些是偶函数，哪些是奇函数：

a) $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$；

b) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$；

c) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$；

d) $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$；

e) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

24*. 证明：定义在区间$-l<x<l$上的任意函数$f(x)$能够表示为一个偶函数与一个奇函数的和的形式。

25. 证明：两个偶函数或者两个奇函数的积是一个偶函数，一个偶函数与一个奇函数的积是一个奇函数。

26. 函数$f(x)$称为周期函数，如果存在一个正数T(函数的周期)，使$f(x+T)\equiv f(x)$对于$f(x)$的定义域内的一切x值都成立。

确定下列函数哪些是周期函数，并对周期函数求出它的最小周期T：

a) $f(x)=10\sin 3x$；

b) $f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$；

c) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}x}$；

d) $f(x)=\sin^2 x$；

e) $f(x)=\sin(\sqrt{x})$.

27. 把线段$y=MN$的长度和图AMN的面积S表示为$x=AM$的函数(图1). 并作出这两个函数的图形.

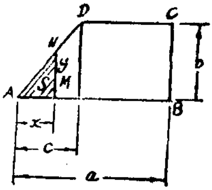

图 1

28. 棒$AB=l$(图2)的线密度(单位长度的质量)在线段$AC=l_1$, $CD=l_2$, $DB=l_3$($l_1+l_2+l_3=l$)上分别等于q_1, q_2, q_3. 把这个棒的变化线段$AM=x$的质量m, 表示为x的函数. 并作出这个函数的图形.

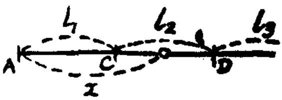

图 2

29. 设$\varphi(x)=x^2$和$\psi(x)=2^x$, 求$\varphi[\psi(x)]$和$\psi[\varphi(x)]$.

30. 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 求$f\{f[f(x)]\}$.

31. 设$f(x-1)=x^2$, 求$f(x+1)$.

32. 假设$f(n)$是等差级数的n项和, 证明

$$f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=0.$$

33. 证明: 如果

$$f(x)=kx+b,$$

且数x_1, x_2, x_3构成一个等差级数, 那么, 数$f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$也构成一个等差级数.

34. 证明: 如果$f(x)$是一个指数函数, 即$f(x)=a^x$($a>0$), 且数x_1, x_2, x_3构成一个等差级数, 那么, 数$f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$构成一个等比级数.

35. 设

$$f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}.$$

证明

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

36. 设$\varphi(x)=\frac{1}{2}(a^{x}+a^{-x})$和$\psi(x)=\frac{1}{2}(a^{x}-a^{-x})$.

证明$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)+\psi(x)\psi(y)$

和

$$\psi(x+y)=\varphi(x)\psi(y)+\varphi(y)\psi(x).$$

37. 设

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \operatorname{arctg} x, & 0<x<+\infty.\end{cases}$$

求$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

38. 确定函数y的正的区域和负的区域及其根(零点), 如果

a) $y=1+x$;

b) $y=2+x-x^2$;

c) $y=1-x+x^2$;

d) $y=x^3-3x$;

e) $y=\lg\frac{2x}{1+x}$.

39. 求函数y的反函数, 如果

a) $y=2x+3$;

b) $y=x^2-1$;

c) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$;

d) $y=\lg\frac{x}{2}$;

e) $y=\operatorname{arctg}3x$.

在什么区域内这些反函数有定义?

40. 求函数

$$y=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ x^2, & x>0. \end{cases}$$

的反函数。

41. 把给定的函数写成一列等式，每个等式只包括一个简单初等函数(幂函数，指数函数，三角函数等等)：

a) $y=(2x-5)^{10}$;

b) $y=2^{\cos x}$;

c) $y=\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

d) $y=\arcsin(3^{-x^2})$.

42. 把表示为一系列等式的复合函数，写成一个单一的等式：

a) $y=u^2$, $u=\sin x$;

b) $y=\operatorname{arctg}u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\lg x$;

c) $y=\begin{cases} 2u, & u\leqslant 0, \\ 0, & u>0; \end{cases}$ $\quad u=x^2-1$.

43. 写出用下列方程定义的函数y的显式：

a) $x^2-\arccos y=\pi$;

b) $10^x+10^y=10$;

c) $x+|y|=2y$.

求出给定隐函数的定义域。

§2. 初等函数的图形

函数$y=f(x)$的图形是由标记着充分稠密的网络点$M_i(x_i, y_i)$，其中$y_i=f(x_i)(i=0, 1, 2, \cdots\cdots)$，并且由一条考虑中间点的线连接这些点基本构成。计算用计算尺最好做。

基本初等函数的图形（见附录）容易学习它们的绘制。从函数

$$y=f(x) \qquad (\Gamma)$$

的图形出发，我们用简单的几何作图，得到下列函数的图形：

1）$y_1=-f(x)$是图形Γ关于x－轴的反射图形；

2）$y_2=f(-x)$是图形Γ关于y－轴的反射图形；

3）$y_3=f(x-a)$是图形Γ沿x－轴平移长度a；

4）$y_4=b+f(x)$是图形Γ沿y－轴平移长度b（图3）.

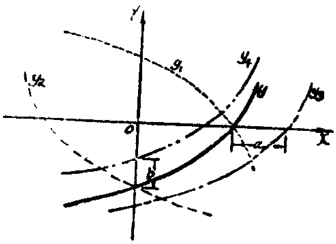

图 3

例. 绘制函数

$$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

的图形。

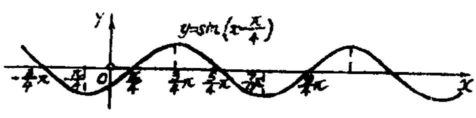

图 4

解. 要求的曲线是正弦曲线$y=\sin x$沿x一轴向右平移$\frac{\pi}{4}$(图4).

绘制下列线性函数的图形(直线):

44. $y=kx$, 设$k=0, 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2$.

45. $y=x+b$, 设$b=0, 1, 2, -1, -2$.

46. $y=1.5x+2$.

绘制下列二次有理整函数的图形(抛物线):

47*. $y=ax^2$, 设$a=1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2, 0$.

48. $y=x^2+c$, 设$c=0, 1, 2, -1$.

49. $y=(x-x_0)^2$, 设$x_0=0, 1, 2, -1$.

50. $y=y_0+(x-1)^2$, 设$y_0=0, 1, 2, -1$.

51*. $y=ax^2+bx+c$, 设1)$a=1, b=-2, c=3$; 2)$a=-2, b=6, c=0$.

52. $y=2+x-x^2$. 求这条抛物线与x-轴的交点.

绘制下列二次以上有理整函数的图形:

53*. $y=x^3$(三次抛物线).

54. $y=2+(x-1)^3$.

55. $y=x^3-3x+2$.

56. $y=x^4$.

57. $y=2x^2-x^4$.

绘制下列线性分式函数的图形(双曲线):

58*. $y=\frac{1}{x}$.

59. $y=\frac{1}{1-x}$.

60. $y=\frac{x-2}{x+2}$.

61*. $y = y_0 + \dfrac{m}{x - x_0}$，设 $x_0 = 1$，$y_0 = -1$，$m = 6$

62*. $y = \dfrac{2x - 3}{3x + 2}$.

绘制下列有理分式函数的图形：

63. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

64. $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$.

65*. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

66. $y = \dfrac{1}{x^3}$.

67*. $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$（安尼西箕舌线）.

68. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$（牛顿蛇形线）.

69. $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

70. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$（牛顿三叉戟线）.

绘制下列无理函数的图形：

71*. $y = \sqrt{x}$.

72*. $y = \sqrt[3]{x}$.

73*. $y = \sqrt[3]{x^2}$（Niele抛物线）.

74. $y = \pm x\sqrt{x}$（半立方抛物线）.

75*. $y = \pm\dfrac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$（椭园）.

76. $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$（双曲线）.