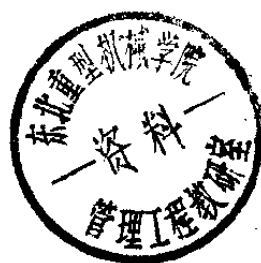


投入产出经济数学模型

※

侯炳辉



清华大学经济管理工程系

一九八一年八月

类	F-6	号	6-56
---	-----	---	------

 * 投入产出经济数学模型 *

侯 炳 辉

清华大学经济管理工程系

1981年8月

地址: 清华



0748091

F223/4

D 01 M

录

~ 1 ~

5. 1	活动分析与约束条件.....	(49)
5. 2	多种生产活动中为单一产品选择最优.....	(54)
5. 3	确定最终产品最大价值的方案.....	(56)
习 题		(58)

§ 1 投入——产出经济数学模型

1. 1 国民经济各部门之间的数量依存关系

国民经济各部门之间存在着极其复杂的经济联系和生产技术联系。这种联系必须在数量上有一定的比例关系。即数量依存关系，在介绍这种数量依存关系之前，我们先介绍几个重要的经济概念：

(1) 两大部类生产

国民经济分两大部类。第一部类（简称Ⅰ）为生产生产资料的部类，即生产机器设备、原料、燃料、动力等的生产。第二部类（简称Ⅱ）为生产消费资料，即生产食物、衣着、住宅、日用品等的生产，每一部类中还分各个生产部门。

(2) 价值的划分

社会总产品从价值上分，可由三部分组成，即价值 W 是由 C 、 V 、 M 组成。

$$W = C + V + M \quad (1-1)$$

其中： W —国民总产值（价值）

C —不变资本，即消耗生产资料转移的价值，包括原料、材料（流动资金）以及机器设备（固定资金）所转移的价值。

V —可变资本，必要劳动所创造的价值，即生产工人的工资及集体福利费。

M —剩余劳动，即为社会创造的价值，例如上交的利润、税金等。可变资本（工资等）和剩余劳动之和称国民总收入。

(3) 两部类生产之间的关系

将社会总产品的价值分为生产资料总价值——第一部类生产，和消费资料总价值。即：

$$W = W_1 + W_2 \quad W_1 = C_1 + V_1 + M_1$$

$$W_2 = C_2 + V_2 + M_2$$

W_1 、 W_2 分别为第一、二部类的总价值； C_1 、 C_2 分别为第一部类和第二部类中生产资料转移的价值； V_1 、 V_2 分别为I、II部类中工人的工资及其集体福利费； M_1 、 M_2 分别为I、II部类中上交给国家的税金和利润。

C_1 、 V_1 、 M_1 都是以生产资料的形式存在的，而 C_2 、 V_2 、 M_2 都是以消费资料的形式存在的，如果国民经济平衡，或称能够简单再生产，则必须要求 $V_1 + M_1 = C_2$ 或写成：

$$I(V+M) = II C \quad (1-2)$$

上式的意思是，某一部类工人的工资以及上交的利润必须到第二部类去买，而第二部类需要的生产资料必须到第一部类去买，若满足简单再生产，必有 $I(V+M) = II C$

例如 $I: C_1 = 4000, V_1 = 1000, M_1 = 1000$

$II: C_2 = 2000, V_2 = 500, M_2 = 3000$

$I: W_1 = 4000 + 1000 + 1000 = 6000$

$II: W_2 = 2000 + 500 + 3000 = 5500$

$W = W_1 + W_2 = 11500$

国民总产值（社会总产品）为11500，第一部类（生产资料）占6000，第二部类（消费资料）占5500，第一部类中的 $C_1=4000$ 不变资本全部转移到产品中去了（原料、材料变成为产品的组成部分，机器受到了磨损）下一年再生产时就必需再购买生产资料，到哪里去买呢？还到第一部类去买。而第一部类中的 $V_1 + M_1$ 是供个人（ V_1 ）和社会消耗的，消耗的对象（消费品）到哪儿去买呢？只能到第二部类去买。同时，第二部类中的 $500+3000$ 的价值总在第二部类内部去交换，但已被转移了的2000生产资料只能到第一部类中去买，如果

实现国民经济简单再生产，则必须两大部类达到平衡。即：

$$I(V+M) = II C$$

若要扩大再生产，显然有 $I(V+M) > II C$

例 I: $C_1 = 4000$, $V_1 = 10000$, $M_1 = 1000$

II: $C_2 = 1500$, $V_2 = 750$, $M_2 = 750$

此时 $I(V+M) = 1000 + 1000 = 2000 > II C = 1500$

(4) 物质生产的三要素

物质生产必须具备三个要素：

① 劳动对象——原料、材料、动力、燃料。

这些劳动对象在一个周期内被消耗掉（或转移掉）。

② 劳动手段——机器、厂房、运输工具。这些手段是一次投资，逐渐磨损，然后一次更新。

③ 劳动力——人。

(5) 投入——产出

为了生产，必须投入生产三要素，即劳动对象，劳动手段及劳动力。劳动对象的消耗及劳动手段的磨损产生转移价值，而劳动力创造新的价值。

所谓产出即生产产品。产出的产品分两部分，用于补偿生产性消耗，即生产生产资料，这些生产资料只能用作生产性消耗，故又称中间产品。第二部分为生产的产品使个人使用（吃、穿、住、用）、集体使用或出口，这叫最终产品。

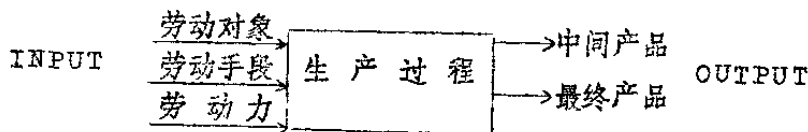


图 1—1

1. 2 国民经济各部门之间的联系，直接消耗与间接消耗

国民经济任何一个部门的发展计划都要和别的部门之间的发展计划有联系。这里所谓部门不是通常讲的企业部门而是以“产品群”进行分类的产品部门。一个产品部门的生产总要消耗其它产品，例如发展汽车工业，就要发展钢铁、木材、机器设备、橡胶、皮革、玻璃、油漆…等工业，因为汽车工业要消耗这些部门的产品，这种消耗有些是能直接看得出来的，称直接消耗，例如图 1—2 中要生产钢铁要直接消耗电力，还要直接消耗煤炭、粮食和运输。同样，生产电力要直接消耗钢铁、煤炭、粮食…。但是有些消耗是经过中间产品的，例如生产钢铁要消耗电、煤炭、粮食……，而生产煤炭、粮食……也要消耗电，这就是说生产钢铁除直接消耗电以外，还通过直接消耗煤炭、粮食等过程间接消耗了电。

由图 1—2 可以看出，消耗是相互的，生产钢铁要消耗电力，反之生产电力要消耗钢铁，因此图上每两个部门之间有两条联系线，一条实线，一条虚线，它们之间的含义相同。箭头的符号意义如下：箭头所指的部门表示生产的部门，箭尾表示消耗的部门，例如

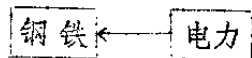


图 1—3

表示消耗电力，生产钢铁。而这样画：

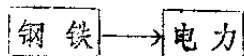


图 1—4

表示生产电力，消耗钢铁。这样画法和理解也是很科学的，从经济意

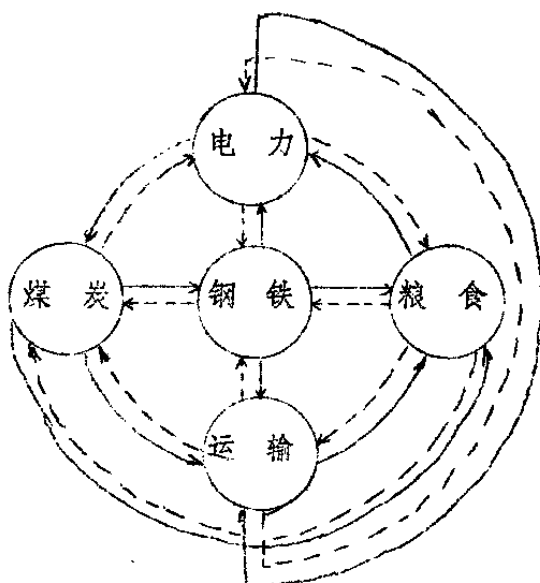


图 1—2 部门间直接消耗关系图

义上讲是通过生产把消耗的钢铁的价值转移到电力中了。

图 1—2 是 5 个部门之间的直接消耗关系图，每一个部门都和其它四个部门有直接消耗关系，当然还和自己部门也有关系，例如生产电力也要消耗电力本身，不过这在图上没法画出来。每一个部门要和其它 4 个部门的连线（实线+虚线）共有 $2 \times 4 = 8$ 根，共 5 个部门，连线共有 $5 \times 8 = 40$ 根。这样算每根线计算了两次，故总共连线是 $40 \div 2 = 20$ 根。或者是用排列来计算，设 5 个部门的代号为 A，

B，C，D，E

$$A_5^2 = 20$$

则对 A 说有 AB，AC，AD，AE 4 根连线

B " BA，BC，BD，BE " "

⋮ " "

E " EA，EB，EC，ED " "

故总共定 $5 \times (5 - 1) = 20$ 根。

一般形式，若有 n 个部门，则这种连线共有 $n(n-1)$ 根，也可用排列符号表示，连线数等于：

$$A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} \quad 1-3$$

间接消耗的关系可用如下图表示：

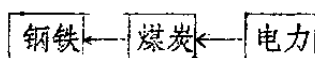


图 1—5

图 1—5 表示生产钢铁需要消耗煤炭，而生产煤炭需要消耗电力，这就是说，生产钢铁通过中间产品煤炭间接地消耗了电力，同样还通过粮食、运输间接消耗了电力。这种消耗过程是只通过某一个中间产品的，故称一次性消耗。一次性间接消耗的计算如下，若仍以 A、B、C、D、E 代表 5 个部门，则 A 要通过 B、C、D 消耗 E

B " " A、C、D "

C " " B、A、D "

D " " A、B、C "

光一次间接消耗 E 共有 $4 \times 3 = 12$ 种，现在共有 5 个部门，故共有一次性间接消耗 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 项，一般表示为 $n(n-1)(n-2)$ 。若用排列式子表示则为：

$$A_n^3 = \frac{n!}{(n-3)!} \quad (1-4)$$

当 $n = 5$ 时， $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 20$

部门之间的消耗除一次性间接消耗外，还有更高次的间接消耗。例如

生产钢铁要消耗煤炭，而生产煤炭要消耗粮食，生产粮食又要消耗电力。于是生产钢铁，通过消耗煤炭一次性间接消耗了粮食，通过煤炭、粮食两个中间产品二次性间接消耗了电力，用图表示为：

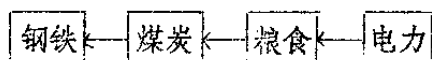


图 1—6

二次性间接消耗的项数共有：

$$A_n^4 = \frac{n!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3) \text{ 项,}$$

若 $n = 5$ ，则

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

当然，还有三次性以及更高次性的间接消耗，它们的项数就更多了。

现在总结一下直接消耗和各次性间接消耗的项数：

直接消耗的项数：	A_n^2
一次性间接消耗的项数：	A_n^3
二 " " :	A_n^4
三 " " :	A_n^5
⋮	⋮
$n-2$ 次性 " " " ":	A_n^n

由此可见，几个部门之间的消耗关系（直接消耗和各次间接消耗）的项数共有

$$\sum_{i=2}^n A_n^i \text{ 项,}$$

若 $n = 5$ ，则共有消耗项数为：

$$\sum_{i=2}^5 A_{1i}^1 = 290 \text{ 项}$$

这说明：各部门之间存在着大量的、极端复杂的联系，如果一个部门有一些变化，则势必牵涉到整个国民经济的变化，真可谓“牵一发而动全身”。

部门之间的直接消耗是可以通过调查和统计易于确定的，但是间接消耗尤其是高次性间接消耗，由于关系太复杂，却不易精确计算，例如二次大战时，美罗斯福总统下令生产 5 万架飞机。生产飞机需要铝，但却没有料到冶炼铝要电，而输送电需要大量铜，（飞机二次性间接消耗铜），而当时美国缺乏铜，主管工业的部门不得不借用国库中的银来代替铜。

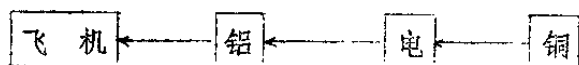


图 1—7

部门之间这种极其复杂的关系需要现代数学以及计算机技术，才能解决综合平衡问题。

§ 2 投入——产出经济数学模型的结构

在介绍模型以前，再明确一下，这里的所谓部门不是指冶金部、化工部、电力部等经济部门，而是指产品部门。各经济部门不能代替产品部门，例如冶金部不仅生产钢铁，还生产化工产品、机械产品等等，所以编制计划时以产品部门进行综合平衡才符合实际，当然这和我我国现行的管理体制有一定的矛盾，这就必须经过抽样调查或典型估

算。

另一个问题。部门究竟怎么划分，有多少个部门，我们不能够把每种产品划分一个部门，那就太复杂了，也根本没有必要。有些国家部门划得多一些，有些较少些，一般在50—200个部门之间。下面我们举一些国家部门划分的例子：

国 家	编制年代	部门数
美 国	1935, 1947	11
美 国	1963	61
英 国	1963	60
法 国	1962	18
西 德	1966	19
日 本	1965	31
印 度	1964/1965	23
南 朝 鲜	1968	33
波 兰	1962	48
墨 西 哥	1960	39
苏 联	1966	59
南斯拉夫	1966	62
中 国	1973	61

2. 1 投入——产出经济数学模型的基本结构

表2—1为投入——产出的基本模型结构，这个表是建立在一个重要的假设基础上的，即投入系数是不变的，否则表就没有实用价值。

表2—1共分4个象限，为和笛卡儿坐标对应，分别称右上、左上、左下、右下分别为I、II、III、IV象限。

表 2—1

		消 耗 部 门					最 终 产 品			总产出
		钢 ₁	煤 ₂	粮 ₃	电 ₄	运 ₅	消费	积累	出口	合计
生 产 部 门	钢 ₁	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	*	*	*	Y_1
	煤 ₂	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	*	*	*	Y_2
	粮 ₃	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	*	*	*	Y_3
	电 ₄	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	X_{45}	*	*	*	Y_4
	运 ₅	X_{51}	X_{52}	X_{53}	X_{54}	X_{55}	*	*	*	Y_5
折 旧		l_1	l_2	l_3	l_4	l_5				
新 创 造 价 值	工 资	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5				
	社 会 收 入	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5				
总 投 入		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5				

象限 II 由 5 个生产部门交叉组成，横向 1, 2, 3, 4, 5 代表钢、煤、粮、电、运 5 个生产部门；列向 1, 2, 3, 4, 5 也代表钢、煤、粮、电、运 5 个生产部门。 X_{11} 表示部门 1 (钢) 分配给部门 1 (钢) 的产值，即生产钢铁也要消耗钢铁， X_{12} 表示分配给煤的钢的数量，或者也可以这样说，生产煤所需的钢的数量……这个象限反映了各生产部门之间技术与经济的联系，故这个象限又叫部门间交易象限。第 I 象限代表最终产品的分配关系，故又叫最终用途象限。最终产品供消费（更细一些又可分个人消费和团体消费）、积累（又可分生产性积累和消费性积累）、出口等。最终产品的总和用 Y_1 表

示。最右边一列 X_i 表示第 i 部门的总产出。显然有：

$$X_1 = \sum_{j=1}^5 X_{1j} + Y_1$$

$$X_2 = \sum_{j=1}^5 X_{2j} + Y_2$$

⋮

$$X_5 = \sum_{j=1}^5 X_{5j} + Y_5$$

用一般表示：

$$X_i = \sum_{j=1}^n X_{ij} + Y_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2-1)$$

第Ⅱ象限包括折旧及新创造价值。其中新创造价值包括必要劳动（工资及集体福利）创造的价值以及剩余劳动（即为全社会创造的价值，包括上交给国家的利润、税金）第Ⅳ象限关系比较复杂，一般略去。这一部分反映了国民收入的再分配过程，如非生产领域内工作者的工资、消费等）。

2. 2 直接消耗系数与间接消耗系数

直接消耗与间接消耗的概念我们已在第一节中介绍过了，现在我们要引入两个十分重要的概念——直接消耗系数及间接消耗系数。

(1) 直接消耗系数及其经济意义

所谓直接消耗系数的定义为：生产单位 j 产品所消耗 i 产品的数量，例生产一吨煤的价值所消耗的电的价值，称煤对电的直接消耗系

数，用公式表示为：

$$a_{\text{电煤}} = \frac{X_{\text{电煤}}}{X_{\text{煤}}}$$

其中 $X_{\text{电煤}}$ 表示生产 X 吨的煤所消耗电的价值， $X_{\text{煤}}$ 表示煤的总产出的价值，按照定义 $a_{\text{电煤}}$ 就是生产 1 吨煤所消耗的电的价值。一般性说明如下：为了生产 j 种产品 X_j 数量的价值，需要消耗 i 种产品 X_{ij} 数量的价值，则说 j 产品对 i 产品的直接消耗系数为：

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \quad (2-2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

于是有

$$X_{ij} = a_{ij} X_j \quad (2-3)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

在投入产出模型中（表 2—1）生产 X_2 价值的煤需要消耗 X_{12} 价值的钢， X_{22} 价值的煤， X_{32} 价值的粮食， X_{42} 价值的电， X_{52} 价值的运输，磨损机器的价值 1_2 ，发给工人的工资 V_2 ，上交的利润和税金 M_2 。根据 X_{12} 至 X_{52} 以及 X_2 这些数据就可以求出各直接消耗系数如下：

$$a_{12} = \frac{X_{12}}{X_2} \quad \text{从而得} \quad X_{12} = a_{12} X_2$$

$$a_{22} = \frac{X_{22}}{X_2} \quad \text{〃} \quad X_{22} = a_{22} X_2$$

~ 1 2 ~

$$a_{32} = \frac{X_{32}}{X_2} \quad \text{从而得} \quad X_{32} = a_{32} X_2$$

$$a_{42} = \frac{X_{42}}{X_2} \quad // \quad X_{42} = a_{42} X_2$$

$$a_{52} = \frac{X_{52}}{X_2} \quad // \quad X_{52} = a_{52} X_2$$

一般有

$$X_{ij} = a_{ij} X_j \quad \text{显然有}$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot X_j + l_j + v_j + M_j = X_j \quad (2-3)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

另一方面有式 (2-1)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j + Y_i = X_i \quad (2-4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

因为模型达到平衡，故有

$$X_i = X_j \quad (i = j) \quad (2-5)$$

将式 (2-4) 展开，即为下式：