万学教育·海文考研 UNIVERSAL EDUCATION GROUP

范京芝

遥遥领先的中国第一考研品牌

2009年强化班

数学讲义

概率论与数理统计

主编：王式安

www.hwkaoyan.com

万学教育·海文考研
遥遥领先的中国第一考研品牌 www.hwkaoyan.com

从12分到50分

——一个普通考研学子的阅读满分之路

茫茫考研路，苦苦求学心。几多波折，几多艰辛，考研，不仅是对体力、智力的一种挑战，更是对全面综合能力的考验。在几多艰辛几多痛苦的考研进程中，什么样的帮助对你来说是雪中送炭？是亲情友情的支持、同学朋友的鼓励，还是考研同仁的经验分享？也许都是。这里，我们万学海文为考研学子送上一个考研英语阅读满分获得者的故事，希望考研学子们在分享他成功经验的同时，能够对自己的考研之路有所感悟，有所帮助。

贺惠军，一个曾经埋没在茫茫考研人海之中的一份子，一个普通得不能再普通的考研学子，在考研的道路上，他究竟创造出了怎样的奇迹？

数年前，在武汉某一所普通高校，专科在读的贺惠军同学，英语四级连考三次都没有通过……毕业四年后，面对37分的考研英语成绩时，让他觉得考研难如登天，其中50分阅读成绩竟只得了12分。从来就不甘被命运摆布的他，静下心来认真思考他考场失利的原因，他改变策略，潜心反复研究历年真题，摸索总结命题的规律与解题的技巧，十月磨一剑，终于第二次走上考场，然而当他交卷之后却意外地发现竟忘记将10分的翻译题填到答题纸上了！……上天总算待他不薄，在焦急等待中捷报传来，在90分总分前提下取得了75分的骄人成绩，如果考虑到没填上的10分翻译题，这次的英语成绩至少应在80分以上。此外，更令他深感欣慰的是阅读理解part A和part B两部分都得了满分，这是05年全国所有考研学生里面唯一的一个阅读满分获得者。那么贺惠军同学到底是如何把英语阅读从12分提高到50分满分的呢？他的学习经验是否具有可复制性、可传播性呢？答案是肯定的。

为了让许多像他当年那样盲目复习的考生少走弯路，贺惠军同学在2006年把他阅读理解能获得满分的一些技巧和方法写进了书中，希望大家能一起共享。然而，因为学生都比较迷信名师写的书，没有人肯买他出的书。于是，他想了一个办法：**先借后买**。让考果感觉这本书好，就付款，感觉不好，就还书。结果，借出的书多达5000余本，但最后没有一本书退回来，全部被买走。

所以，当我们知道这件事情的时候，就把他请到万学海文的总部，我们老师从专业高度对他的经验进行系统梳理，正式出版了**《考研阅读技巧标准全书，》**和**《考研英语易混超难词汇》**两本书，与海文名师团队创作的**《考研英语阅读120篇》**一起构成了我们万学海文阅读理解的三剑客。

这就是贺惠军的故事，**一个英语阅读从12分提升到50分的考研奇才的故事**。那么你看完这几本书后是不是一定能考满分呢？贺惠军的阅读技巧和方法到底对你来说有没有实用价值呢？看完之后你一定会有答案。

唯一一套帮助您未读文章即可选对 70% 以上正确答案的高端秘诀

《考研英语阅读高分完全攻略三剑客》——

阅读高分完全攻略之一《2009考研英语阅读理解技巧标准全书》
阅读高分完全攻略之二《2009考研英语易混超难词汇特训手册》
阅读高分完全攻略之三《2009考研英语阅读理解高分强化训练120篇》

考研英语阅读高分完全攻略三剑客

你是否作了大量的阅读练习却感觉毫无长进？
你是否曾经做错的题目再做一遍却依然做错？
你是否一直不能在规定的时间内轻轻松松做完对应的阅读练习？
你是否因为阅读的分数长期徘徊在 28 分上下
却再也无法突破而苦恼万分？
从命题原理分析到难点词汇强化，
从高效阅读方法到一题多解技巧，
从基础分项训练到全真单元模拟。

2008，万学海文为您构建考研史上第一套系统而高效的阅读理解完整解决方案。

万学教育·海文考研
遥遥领先的中国第一考研品牌 www.hwkaoyan.com

2009 数学高分 不容错过

《考研数学标准全书》系列

数学标准全书理工类　　数学标准全书经济类

《2009 考研数学标准全书》
《2009 考研数学历年真题解析》
《2009 考研数学 8 套模拟试卷》
——成就你的满分梦想！

学数学 —— 关键是要做对题目

命题人讲真题 4大组长强强联手重磅出击
30年命题经验 打造考研数学最权威资料

本系列辅导书的**所有题目完全源于考试中心的真题题库，与历年真题一脉相承，学习本书，能帮你找到最强的真题题感**。按照本系列辅导书的要求进行复习，你的数学将没有任何低于 **140** 分的理由。

三大命题组长+阅卷组长

他们是考研数学命题规律的缔造者！
他们是考研数学题库的核心创建者！
三十年命题经验，为你构建了
考研数学复习最精准的复习范围！

王式安 原北京理工大学研究生院院长、应用数学系主任，教授，美国哥伦比亚大学、南佛罗里达大学、纽约大学等大学的客座教授，是国内最早一批享受国务院特殊津贴的数学专家。曾任**教育部考研数学命题组组长（1987-2001年）**，考研数学题库的主要建设人，考研辅导领域最权威的领军人物。

蔡燧林 原浙江大学数学系副主任、教授，长期享受国务院特殊津贴的数学专家。曾任**教育部考研数学命题组工科组组长、总负责人（1992-2000年），浙江省考研数学阅卷组总负责人**，考研高等数学最权威辅导专家。

胡金德 清华大学教授，清华大学版《线性代数》的主要著作人。曾任**教育部考研数学命题组线性代数组组长（1989-2001年），北京地区硕士研究生入学考试数学阅卷部（由 15 个阅卷组组成）总负责人（1997-2001 年）**。

程杞元 原北京理工大学应用数学系主任，教授。曾任**全国硕士研究生入学考试数学阅卷组副组长**，著名考研辅导专家，以巧思妙解见长，深受广大考研学子推崇。

中国绝对第一的英语辅导团队

最权威的辅导大师 最完美的专业团队 最有效的应试策略

白 洁——中国人民大学外国语学院教授、英语教研室主任、北京地区英语阅卷组大组长。白老师深度把握考研命题规律，对词汇和语法有独特系统提高方法，被很多考生评为"考好英语最佳选择名师"。

韩满玲——中国人民大学外国语学院副教授、英语教研室副主任。韩老师主讲英语阅读，创造一套独特实用的阅读方法和答题技巧，使考生在轻松的课堂氛围中提升阅读能力，被广大考生喻为"阅读高分的坚强后盾"。

刘启升——中国人民大学外国语学院副教授、英语语言文学硕士。刘老师主讲完型、阅读与写作，对历年考研英语试题分析研究透彻，擅长以点带面，重点突出，其独特的教学模式使许多考生圆了名校梦。

王建华——中国人民大学外国语学院副教授、语言测试学博士、国家考研英语阅卷组专家。王老师深入研究考研命题规律，授课风趣幽默，在轻松上课氛围中，使学员成功掌握高分应试技巧，被誉为"考研英语应试大师"。

吴耀武——西安外国语大学英语学院院长、博士、副教授、国家考研英语阅卷组专家。吴老师学识渊博，授课应试针对性极强，率真诙谐的风格使大江南北的考生称为"新生代领袖"。

课程编码	课程名称	授课时间	学时	上课地点	授课师资	学费	备注
BJY002	英语暑期升级强化一班	7月8日-7月14日	64	中央民族乐团	白 洁、韩满玲、王建华、吴耀武、曹晓玮、何君兰 伍松	560	含海文独家内部精品资料（业内最高品质与价值）
BJY003	英语暑期升级强化二班	7月30日—8月6日	64	国图音乐厅		560	
BJY005	英语暑期升级强化四班	8月20日-8月27日	64	八一中学		560	
BJY007	英语秋季加强版升级强化课程1班	9月下旬（双休日上、下午）	64	学院路	白 洁、韩满玲、刘启升、王建华、吴耀武、付 博、何君兰、蒋君虎	560	
	英语秋季加强版升级强化课程2班		64	白颐路		560	
BJY008	真题与重难点题型精讲课程1班	11月下旬	8	国图	徐锋、何君兰、付博	200	
BJY009	英语冲刺作文专项课程班	12月	8	学院路	吴耀武、付 博	120	
BJY010	英语冲刺串讲课程1班	12月上旬	16	国图	吴耀武、韩满玲	270	

中国绝对第一的数学辅导团队

命题组大组长与阅卷组大组长 珠联璧合 超级实力 无与伦比

李永乐——清华大学应用数学系教授，广受学生信赖的"线代王"，万学海文考数学"黄金团队"领头人。李老师多次参加考研大纲和命题工作，对出题形式和重点了如指掌，其全面独特有效的辅导方法成就了数不清的考生。

王式安——北京理工大学教授、应用数学系主任、原研究生院院长，享受国务院特殊津贴专家，1987至2001年担任国家数学命题组组长。王老师主讲概率与数理统计，对命题方向把握准确，连年命中大部分概率真题，考生无不心悦诚服。

刘西垣——北大数学科学学院教授、国家数学阅卷组专家、久负盛名的"高等数学之父"。刘老师常年从事高数研究，以基本概念、知识、方法为框架，以扩大解题思路提高解题能力为主导的辅导方法，造福了无数考生。

李正元——北大数学科学学院教授、应用数学教研室主任、国家数学阅卷组专家。李老师对数学历年命题规律有深入细致的研究，主讲高数，其丰富的教学经验和扎实的题型总结，让枯燥的数学推导变成了记忆过程，被广大考生誉为"考研数学高分圆梦人"。

课程编码	课程名称	授课时间	学时	上课地点	授课师资	学费	备注
BJS001	数学暑期升级强化一班	7月7日-20日	96	八一中学	李永乐、王式安 刘西垣、李正元 刘庆华、龚兆仁 龚兆仁、刘庆华	600（数二350）	含海文独家内部精品资料（业内最高品质与价值）
BJS002	数学暑期升级强化二班	7月22日-8月3日	96	八一中学		600（数二350）	
BJS003	数学暑期升级强化三班	8月20日-8月31日	96	中央民族乐团(暂定)		600（数二350）	
BJS004	数学高数暑期课程班	8月中旬	48	待定		300	
BJS006	数学线代暑期课程班	8月中旬	24	待定		150	
BJS007	数学概率暑期课程班	8月中旬	24	待定		150	
BJS008	数学秋季加强版升级强化课程班	9月初—10月上旬	96	白颐路	李永乐、王式安 李正元、刘西垣 胡金德、刘庆华 程杞元、李明一 陈建锋	600（数二350）	
BJS009	数学真题与重难点题型精讲课程1班	11月下旬	8	国图		240	
BJS010	数学冲刺综合课程1班	11月下旬	16	待定		280	
BJS011	数学模考班	11月18日	4	交大		150	

tzy@math.pku.edu.cn

概率统计

主要参考书

1、2009 年全国硕士研究生入学统一考试，数学考试大纲。

2、概率论与数理统计　　（浙江大学或经济数学编写组）

3、2009 年考研数学标准全书　　（理工类）对外经贸大学出版社

4、2009 年考研数学标准全书　　（经济类）对外经贸大学出版社

5、2009 年考研数学理念真题解析（数一，二，三，四）　　对外经贸大学出版社

6、考研数学知识点必备手册　　对外经贸大学出版社

7、2009 年硕士研究生入学考试数学（一）/（二）/（三）/（四）8 卷模拟试卷

对外经贸大学出版社

第一讲

随机事件和概率

考试要求：数学一、三、四要求一致。

了解：　样本空间的概念

理解：　随机事件，概率，条件概率，事件独立性，独立重复试验

掌握：　事件的关系与运算，概率的基本性质，五大公式（加法、减法、乘法、全概率、贝叶斯），独立性计算，独立重复试验就算

会计算：古典概率和几何型概率。

§1 随机事件与样本空间

一、随机试验：E

（1）可重复　　（2）知道所有可能结果　　（3）无法预知

二、样本空间

做题步骤：设事件、做翻译、套公式

试验的每一可能结果——样本点ω

所有样本点全体——样本空间Ω

三、随机事件

样本空间的子集——随机事件　A　B　C

样本点——基本事件，随机事件由基本事件组成。

如果一次试验结果，某一基本事件ω出现——ω发生，ω出现

如果组成事件A的基本事件出现——A发生，A出现

Ω——必然事件　　　Φ——不可能事件

§2 事件间的关系与运算

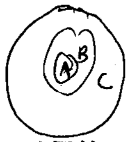
定义、称呼、记号、集合、图形

一．事件间关系

包含，相等，互斥，对立，完全事件组，独立

二．事件间的运算：

并，交，差　$A-B=A-C \nRightarrow B=C$



运算规律：交换律，结合律，分配律，对偶律

概率定义，集合定义，记号，称法，图

三．事件的文字叙述与符号表示

例 2 从一批产品中每次一件抽取三次，用$A_i(i=1,2,3)$表示事件：

“第i次抽取到的是正品”试用文字叙述下列事件：

$A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3 \cup A_1A_2A_3 \Leftrightarrow$

（1）$A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3$；至少两次取正品 或次品不超一个　（2）$\overline{A_1A_2A_3}$；

（3）$A_1 \cup A_2 \cup A_3$；　（4）$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

再用A_1,A_2,A_3表示下列事件：

(5)都取到正品；　(6)至少有一件次品；

(7)只有一件次品；　(8)取到次品不多于一件。

§3 概率、条件概率、事件独立性、五大公式

一．公理化定义　Ω, A, P

(1) $P(A)\ge 0$

(2) $P(\Omega)=1$

(3) $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$　　$A_iA_j=\varnothing, i\ne j$

二．性质

(1) $P(\varnothing)=0$

(2) $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$　　$A_iA_j=\varnothing, i\ne j$

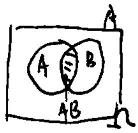
※ (3) $P(\overline{A})=1-P(A)$　　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$　　$\overline{A\cup B-C}=\overline{A\cup B\overline{C}}=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup C$

(4) $A\subset B, P(A)\le P(B)$　　$\overline{A\cap B\cup C}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{C}$

(5) $0\le P(A)\le 1$

三．条件概率与事件独立性

(1) $P(A)>0, P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$, 事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率；



缩减样本空间

(2) $P(AB)=P(A)P(B)$, 事件 A,B 独立，　区别、A B 互斥

A,B 独立 $\Leftrightarrow A,\overline{B}$ 独立 $\Leftrightarrow \overline{A},B$ 独立 $\Leftrightarrow \overline{A},\overline{B}$ 独立；　注：独立是用概率定义的，其它是用点定义的

独立时，Bar 不 Bar 没关系.　　如：$P(A)=0$ 即使有一点但可能为0

$P(A)>0$ 时，A,B 独立 $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$；

2. 独立且互斥的事件：ϕ（唯一）

3. 与所有事件都独立：Ω，概率为0的事件，概率为1的事件

(3) $P(A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$　　$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$　　$\because 0=P(AB)\le P(A)=0=P(A)P(B)$

称 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 相互独立，（$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个等式）

相互独立 $\Rightarrow$ 两两独立。

四．五大公式

(1)加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\Leftrightarrow P(A)+P(\overline{A}B)\Leftrightarrow P(AB)+P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})$

$\Leftrightarrow P(A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\Leftrightarrow P(A)+P(\overline{A})P(B)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=\cdots$$

(2)减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

(3)乘法公式：$P(A)>0, P(AB)=P(A)P(B|A)$

$P(A_1A_2\ldots A_{n-1})>0$时，$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$

※ (4)全概率公式：$B_1,B_2\ldots,B_n$是完全事件组，且$P(B_i)>0$，$i=1,\cdots n$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

※ (5)贝叶斯公式：$B_1,B_2,\ldots,B_n$是完全事件组，$P(A)>0,P(B_i)>0,i=1,\cdots,n$

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}\qquad j=1,2,\ldots,n$$

§4 古典型概率和伯努利概率

一．古典型概率　　探求．　少做题，不深．会做即可

不出 散 不 ~~纲~~ 概．影响不好．

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{所包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}\begin{cases}①\text{定}\Omega\\②\text{数点}\end{cases}$$

二．几何型概率

$$P(A)=\frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)}=\frac{\Omega_A\text{的几何度量}}{\Omega\text{的几何度量}}$$

三．独立重复试验

独立——各试验间事件独立，重复——同一事件在各试验中概率不变

四．伯努利试验

试验只有两个结果A和$\overline{A}$——伯努利试验

n重伯努利试验

二项概率公式　　$C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$　$k=0,1,\ldots,n$　　$P(A)=p$

§5 典型例题分析

例 1.设A,B为两事件，且满足条件$AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则$P(\overline{AB})=$ __0__ .

$\Leftrightarrow \overline{A}\cup\overline{B}=A\cup B$

$AB=\overline{A}\,\overline{B} \Leftrightarrow \overline{A}AB=\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}$　　$\overline{A}=B$．

$\overline{A}AB=\phi$

A,B对立事件

$P(A)=0 \nRightarrow A=\phi$ eg. $\boxed{\cdot}$

$P(A)=1 \nRightarrow A=\Omega$ eg. $X\sim N(0,1)$ $P(X\neq 0)=1$

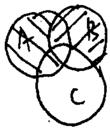
例 2. A,B 为任意两事件，则事件 $(A-B)\bigcup(B-C)$ 等于事件

$(A-B)\cup(B-C) \cancel{=} \cancel{(A-B)+(B-C)=A-C}$

对于集合题 画图 较简单

(A) $A-C$ (B) $A\bigcup(B-C)$

(C) $(A-B)-C$ (D) $(A\bigcup B)-BC$ ✓



这种图形最一般

例 3. 随机事件 A,B，满足 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$ 和 $P(A\bigcup B)=1$ 则有

(A)(B)(X) ∵ $P \nrightarrow$ 点

(A) $A\bigcup B=\Omega$ (B) $AB=\phi$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

(C) $P(\overline{A}\bigcup\overline{B})=1$ ✓ (D) $P(A-B)=0$

$=P(A)-P(AB)$

$\neq \frac{1}{2}$

$\therefore P(AB)=0$

$\therefore P(\overline{AB})=P(\bar A\cup\bar B)=1$

例 4. 设 $0<{P(A)\atop P(B)}<1$ 且 $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$ 则必有

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)=\frac{1}{2}$ (B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$ $\neq\frac{1}{2}$ $\neq\frac{1}{2}$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$ 独立 ✓ (D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$ 不独立

$P(B|A)=1-P(\bar B|\bar A) = P(B|\bar A) \Rightarrow A、B$ 独立 $= \dfrac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(B)$

例 5. (06)设 A、B 为随机事件，且 $P(B)>0$，$P(A|B)=1$，则必有

(A) $P(A\bigcup B)>P(A)$ (B) $P(A\bigcup B)>P(B)$

加法公式
条件概率事件

(C) $P(A\bigcup B)=P(A)$ (D) $P(A\bigcup B)=P(B)$

法① $P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(AB) = P(A)+P(\bar A B) = P(A)+P(B)P(\bar A|B)$ ② $\underset{0}{}$

③ 可理解为 $A\supseteq B$ $B\subset A$

证法 **例 6. 试证对任意两个事件 A 与 B，如果 $P(A)>0$，则有**

一般考题词比有2.3种

$$P(B\,|\,A)\geq 1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)})$$

$\dfrac{P(\bar B)}{P(A)} \geq 1-P(B|A)=P(\bar B|A)=\dfrac{P(A\bar B)}{P(A)}$

即证 $\dfrac{P(\bar B)}{P(A)} \geq \dfrac{P(A\bar B)}{P(A)}$ 显然

例 7. 有两个盒子，第一盒中装有 2 个红球，1 个白球；第二盒中装一半红球，一半白球，现从两盒中各任取一球放在一起，再从中取一球，问：

（1）　这个球是红球的概率；

（2）　若发现这个球是红球，问第一盒中取出的球是红球的概率。

(1) 设 A_i 第 i 个盒中取红球，i=1,2.　A_1A_2，$\bar{A}_1A_2$，$A_1\bar{A}_2$，$\bar{A}_1\bar{A}_2$

B. 最后取红球　~~$P(B)=P(B|A_1A_2)+P(B|\bar{A}_1A_2)+P(B|A_1\bar{A}_2)+P(B|\bar{A}_1\bar{A}_2)$~~

例 8. 假设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品，现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（不放回）试求：

（1）先取出的零件是一等品的概率 p；

(2)在先取的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍为一等品的条件概率 q.

例 9. 袋中装有 α 个白球和 β 个黑球，分有放回和无放回两种情况连续随机每次一个地抽取，求下列事件的概率：

（1）　从袋中取出的第 k 个球是白球 $(1 \le k \le \alpha+\beta)$

（2）　从袋中取出 $a+b$ 个球中，恰含 a 个白球和 b 个黑球 $(a \le \alpha, b \le \beta)$

例 10. 随机地向半圆 $\left\{(x,y) \middle| 0<y<\sqrt{2ax-x^2}\right\}$（其中 $a>0$，是常数）内掷一点，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为__________。

例 11. 在伯努利试验中，每次试验成功的概率为 p，求在第 n 次成功之前恰失败了 m 次的概率。

例 12. 四封信等可能投入三个邮筒，在已知前两封信放入不同邮筒的条件下，求恰有三封信放入同一个邮筒的概率为 2/9 。

缩减样本空间

例 13. 已知 A,B,C 三事件中 A 与 B 相互独立，$P(C)=0$，则 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 三事件

(A) 相互独立　　　　(B) 两两独立，但不一定相互独立

(C) 不一定两两独立　　　　(D) 一定不两两独立

例 14. 10 台洗衣机中有 3 台二等品，现已售出 1 台，在余下的 9 台中任取 2 台发现均为一等品，则原先售出 1 台为二等品的概率为

$(A)\ \dfrac{3}{10}$　　$(B)\ \dfrac{2}{8}$　　$(C)\ \dfrac{2}{10}$　　$(D)\ \dfrac{3}{8}$

例 15. 甲袋中有 2 个白球 3 个黑球，乙袋中全是白球，今从甲袋中任取 2 球，从乙袋中任取 1 球混合后，从中任取 1 球为白球的概率

$(A)\ \dfrac{1}{5}$　　$(B)\ \dfrac{2}{5}$　　$(C)\ \dfrac{3}{5}$　　$(D)\ \dfrac{4}{5}$

例 16. 10 件产品中含有 4 件次品，今从中任取两件，已知其中有一件是次品，求另一件也是次品的概率。

不知哪一次

例 17. 两盒火柴各 N 根，随机抽用，每次一根，求当一盒用完时，另一盒还有 R 根的概率。$(R \le N)$

例 18.（05）从数 1，2，3，4 中任取一个数，记为 X，再从 1，2，…，X 中任取一个数记为 Y，则 $P(Y=2)=$__________。

参考 2维多维

第二讲
随机变量及其概率分布

考试要求：

理解：　离散型和连续型随机变量，概率分布，分布函数，概率密度

掌握：　分布函数性质：0-1 分布，二项分布，超几何分布，泊松分布，均匀分布，正态分布，指数分布及它们的应用

会计算：　与随机变量相联系的事件的概率，用泊松分布近似表示二项分布，随机变量简单函数的概率分布。

数学一，了解；数学三、四，掌握：泊松定理结论和应用条件

§1 随机变量及其分布函数

一．随机变量 r.v

样本点 — 实数

样本空间 Ω 上的实值函数 $X=X(\omega)$，$\omega\in\Omega$。常用 X,Y,Z 表示

※ 二．随机变量的分布函数

右连续

对于任意实数 x，记函数 $F(x)=P(X\le x)$，$-\infty<x<+\infty$　　$x\to F(x)$　$X(\omega)\le x$

实→实

称 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数；× $P(X<x)$ 左连续

$F(x)$ 的值等于随机变量 X 在 $(-\infty,x]$ 内取值的概率。

三．分布函数的性质

充要条件

※（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，记为 $F(-\infty)=0$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，记为 $F(+\infty)=1$。

※（2）$F(x)$ 是单调非减，即 $x_1<x_2$ 时，$F(x_1)\le F(x_2)$

※（3）$F(x)$ 是右连续，即 $F(x+0)=F(x)$

归结为：①↑ ② $\boxed{F(-\infty)=0 \quad F(+\infty)=1}$ ③ 右连续

可≤　加一点少一点没关系

（4）对任意$x_1 < x_2$，有$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

（5）对任意x，$P(X = x) = F(x) - F(x-0)$

性质（1）—（3）是$F(x)$成为分布函数的充要条件。

例 设随机变量X的分布函数为$F(x) = \begin{cases} \dfrac{Ax}{1+x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$，

其中A是常数，求常数A及$P(1 \le X \le 2)$。　$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Ax}{1+x} = A = 1$

§2 离散型随机变量和连续型随机变量

一．离散型随机变量

随机变量和可能取值是有限多个或可数无穷多个。

二．离散型随机变量的概率分布

设离散型随机变量X的可能取值是$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

称$P(X = x_k) = p_k$，　$k = 1, 2, \dots$为X的概率分布或分布律

分布律性质：（1）$p_k \ge 0.$，　$k = 1, 2, \dots$

充要条件 （2）$\sum\limits_k p_k = 1$

分布律也可表示为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

三．离散型随机变量分布函数

$F(x) = \sum\limits_{x_k \le x} P(X = x_k) = \sum\limits_{x_k \le x} p_k$，　$P(X = a) = F(a) - F(a-0)$

例 1.

X	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

求$F(x)$　$\begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/3 & 1 \le x < 2 \\ 5/6 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$

伯努利不是古典概率

∵古典概率是有限事件

四．连续型随机变量及其概率密度

设 X 的分布函数 $F(x)$，如存在非负可积函数 $f(x)$，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt,\qquad -\infty<x<+\infty$$

称 X 为连续型随机变量，$f(x)$ 为概率密度。不唯一 eg 均匀分布、指数分布

r.v

概率密度性质：

充要条件 (1) $f(x)\geq 0$； $F(x)\uparrow$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1$； $F(+\infty)=1$

※ (3) $x_1<x_2$，$P(x_1<X<x_2)=\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt$；

即 $P(x_1\leq X\leq x_2)$ ∵分布函数 $F(x)$ 连续

※ (4) $f(x)$ 的连续点处有 $F'(x)=f(x)$。

例 已知 $f(x)$ 和 $f(x)+f_1(x)$ 均为概率密度，则 f_1 必满足

≥ 0 ≥ 0 ~~$f(x)\geq -f_1(x)$~~ $f_1(x)\geq -f(x)$

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx=1,\quad f_1(x)\geq 0$ (B) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx=1,\quad f_1(x)\geq -f(x)$

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx=0,\quad f_1(x)\geq 0$ (D) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx=0,\quad f_1(x)\geq -f(x)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)+f_1(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)=1$

§3 常用分布

考

一．(0—1) 分布

X	0	1
P	$1-p$	p

$0<p<1$

二．二项分布 $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=0,1,\ldots,n$. $0<p<1$, $q=1-p$

$X \sim B(n,p)$ 背景 n重伯努利事件 其中k次成功的概率

tilt

三．超几何分布 $P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$, $k=l_1,\ldots,l_2$,

不是从0开始

$X\sim H(n,M,N)$

记 定义、称呼、参数、背景、方法、~~证明~~ 记号、EX、DX

Curry 啪哩

$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=1}$ $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}}$

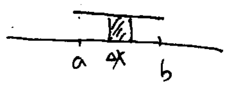
四．泊松分布 Poisson $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\ldots$ $\lambda>0$

$X \sim P(\lambda)$ 背景：纺织品瑕疵数、纽约每天出车祸数

例 设某段时间内通过路口车流量服从泊松分布，已知该时段内没有车通过的概率为$\frac{1}{e}$，

则这段时间内至少有两辆车通过的概率为________。

五．均匀分布 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & 其他\end{cases}$



$\Delta x\cdot\frac{1}{b-a}=\frac{\Delta x}{b-a}$ 量尺寸

$X \sim U[a,b]$ uniform

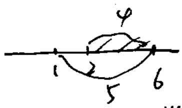
例 设随机变量ξ在$(1,6)$上服从均匀分布，则方程$x^2+\xi x+1=0$

有实根的概率是___4/5___。

$\Delta=\xi^2-4\ge 0$

$P(\xi\ge 2)+\underbrace{P(\xi\le -2)}_{=0}=\int_2^{+\infty}f\,dt+\int_{-\infty}^{-2}f\,dt$

$=$ ____

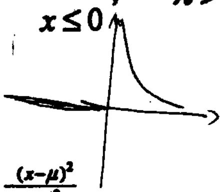


六．指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，$\lambda>0$ 背景：

生命、生物、寿命，服从指数分布

电子元件的状态，排单间

$X \sim E(\lambda)$



$P(X>t)=e^{-\lambda t}$

$t>0$

$=\int_t^{+\infty}\cancel{e^{-\lambda t}dt}$

$P(X>t+s\mid X>s)=P(X>t)$

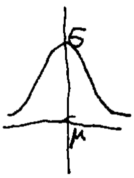
无记忆性

永葆青春

$P(X>t+s)\cap P(X>s)$

$=\frac{P(X>t+s)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}$

~~七~~、七．正态分布 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$



μ μ σ μ

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma>0$

Normal

$X \sim N(0,1)$标准正态分布

① 对称性

② $N(0,1)$ 标准正态 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$，$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

偶

③ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 标准化

④ 查表 $\Phi(x)$，积不出

⑤ $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

很容易三下子.

如果 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

表 —有— 查表
无
$\Phi(x)$ —有— 标准化
无
对称性

（1）$\varphi(-x)=\varphi(x)$

（2）$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

（3）$\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$

（4）$P(|X|\le a)=2\Phi(a)-1$，　　$X \sim N(0,1)$

例　$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $\Phi(3)=0.9987$，则 $P(|X-\mu|<3\sigma)=$________。

§4 随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的分布

一．离散型随机变量的函数分布

设 X 的分布律 $P(X=x_k)=p_k$，$k=1,2,\ldots$

则 $Y=g(X)$ 的分布律 $P(Y=g(x_k))=p_k$，$k=1,2,\ldots$

（如果 $g(x_k)$ 相同值，取相应概率之和为 Y 取该值概率）

二．连续型随机变量的函数分布

不核若 1. 公式法：X 的密度 $f_X(x), y=g(x)$ 单调，导数不为零可导，

$h(y)$ 是其反函数，则 $Y=g(X)$ 的密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|\,f_X(h(y)) & \alpha<y<\beta \\ 0 & 其他\end{cases}$$

其中 (α,β) 是函数 $g(x)$ 在 X 可能取值的区间上值域。

2. 定义法：　先求

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$$

哪些概率哪些积分

然后 $f_Y(y)=F_Y'(y)$。

§5 典型例题分析

例 1. 设随机变量的分布函数 $F(x)=\begin{cases} a+\dfrac{b}{(1+x)^2} & x>0 \\ C & x\le 0 \end{cases}$

求 a,b,c 的值。

$F(-\infty)=0 \Rightarrow C=0$

$F(+\infty)=1 \Rightarrow a=1$

$F(x)$ 右连续 $\lim\limits_{x\to 0+0} 1+\frac{b}{(1+x)^2}=0 \Rightarrow b=-1$

可改成 $P(X=k)=\frac{C}{k!}$

$P(X=k)=\frac{C}{2^k k!}$ $k=1,2\ldots$

例 2. 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=C\dfrac{\lambda^k}{k!}$， $k=1,2,\ldots,\ \lambda>0$

试确定常数 C 的值。

泊松分布 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2\ldots,\lambda>0$

∴行不通

$1=\sum\limits_{k=1}^{\infty} C\frac{\lambda^k}{k!}=C\sum\limits_{k=1}(\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda})e^{\lambda}=Ce^{\lambda}(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-e^{-\lambda})$

$=Ce^{\lambda}(1-e^{-\lambda})=C(e^{\lambda}-1)$

$C=\frac{1}{e^{\lambda}-1}$

例 3. 汽车沿街行驶需要过三个信号灯路口，各信号灯相互独立，且红绿显示时间相等，以 X 表示汽车所遇红灯个数，求 X 的分布及分布函数。

三信号灯 概率 $\frac{1}{2}$　　对称性

$X\sim B(3,\frac{1}{2})$

$P(X=k)=C_3^k(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{3-k}=C_3^k\cdot\frac{1}{8}$

例 4.（04）设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 数 u_α 满足

$P(X>u_\alpha)=\alpha$，若 $P(|X|<x)=\alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\alpha/2}$　　(B) $u_{1-\alpha/2}$　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D) $u_{1-\alpha}$

做正态三下子

①查元表格 —— 无

②转 $\Phi(x)$ 标准化 — 本轴 标准化

③用对称性

$P(X>u_\alpha)=\alpha$

$P(|X|<x)=\alpha$