上海师范学院

论文选编

（自然科学）

一九七八年科学报告会论文选编

（自然科学）

上海师范学院学术委员会编

一九七八

目　录

谈谈因式分解……………………………………………………………应制夷（1）

维数与基本几何图形的条件数……………………………………张永祺（12）

双电源供电 OTL 场输出级的分析…………………………………朱鸿鹗（24）

φ4型强子"橡皮袋"模型Ⅰ(提要)……………………………陆继宗等（35）

φ4型强子"橡皮袋"模型Ⅱ强子的质量谱……………………张民生等（40）

镉离子选择电极研究(一)…………………………………………章宗穰等（47）

镉离子选择电极研究(二)…………………………………………章宗穰等（53）

针刺对电刺激猫扣带回所引起的情绪指标的影响……………王祖昌等（58）

小麦早熟指示性状的遗传分析……………………………童一中　高瑾南（67）

青菜病毒病的研究……………………………………………………丁正民（78）

神农架地区鸟类的初步调查…………………………………………虞　快（99）

探索不到位进攻的新打法
——浅谈"远网短平快"战术 ……………………………………郭志雄（110）

皮亚杰儿童思维发展理论及其在教育的应用 ……………………吴福元（118）

广义相对论中自转球体的引力质量亏损和转动质量效应 ………朱世昌（131）

关于GL（K.C）的一条分岐律 ……………………栾怀德 冯承天 张民生（138）

总体最优化的熵理论 …………………………………………………严仲德（143）

谈 谈 因 式 分 解

数学系 应制夷

Ⅰ.什么是因式分解

大家都知道一个多项式的次数是什么，我们就从这儿说起，并约定用∂P表示一个体F（一个可以进行四则运算并满足一些熟知规律的数集）上的多项式$P(x, y, \cdots)$（即系数是体F中的元素）的次数，F上的多项式的全体记作$F[x, y\cdots]$。

定义： $P(x, y\cdots)\varepsilon F[x, y, \cdots]$称为在F上既约若

$\exists Q(x, y\cdots), R(x, y, \cdots)\varepsilon F[x, y\cdots]$ $\quad P(x, y\cdots)=Q(x, y\cdots).R(x, y\cdots)$

$\Rightarrow \partial Q, \partial R=0$

（即Q与R中必有一个为非零常数）

定义：$P(x, y, \cdots)\varepsilon F[x, y, \cdots]$在F上的因式分解就是把$P(x, y, \cdots)$表示成F上若干既约多项式的乘积。

可以证明，F上多项式的因式分解除各因式的次序及非零常数因式外是唯一确定的。

在19世纪之前，所谓代数就是解方程的同义词。现在代数学的对象较之过去当然已大大扩展了，但是关于解方程的“多项式理论”，在今天的“高等代数”课程中仍占据一个重要的地位，必须给予充分重视。因式分解是解方程的关键，是中学数学教材的一个重点与难点，如何在较短的时间内，较有成效地教好这一内容，为以后的学习打下良好的基础，是广大中学数学老师密切关心的一个问题。

Ⅱ.因式分解的两个基本公式

A． $acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

B． $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

上述公式，A就是“十字乘法”，这是大家熟悉的。B式通常不要求同学掌握，为了把它们作为基本公式，我们必须在讲授多项式乘法时，预为安排，让同学多多练习，这样在讲授因式分解时，把乘法公式倒过来，同学易于接受，易于理解，可收水到渠成之功。

因式分解的公式很多，只选两个，为什么？够用吗？

我们认为要求同学熟练地掌握的基本内容，不宜多，但要精。公式A，B分别是二次式、三次式许多因式分解公式的概括，总结。例如

分解$a^2+2ab+b^2$就是要求找两个数，使其积为b^2，其和为$2b$。

所以 $a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2$

分解a^2-b^2就是找两个数，使其积为$-b^2$，和为0

所以 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

在公式B中令 $c=0$ 即得

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

若令 $c=-(a+b)$，则

$$a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)=(a+b-(a+b))(\cdots)=0$$

因此 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

由上所述，我们挑选的公式虽少，但只要熟练地掌握，灵活地运用，是确实能解决问题的。

Ⅲ.二次式的因式分解——公式A应用举例

例1. 分解 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

解：把它看作一个 a 的“二次三项式”

原式 $=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)(a^2-(b+c)a+bc)$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

例2. 分解 $2x^2-xy-6y^2+2x+17y-12$

解：原式 $=2x^2-(y-2)x-(6y^2-17y+12)$

$=2x^2-(y-2)x-(3y-4)(2y-3)$

$=(2x+3y-4)(x-2y+3)$

$$\begin{array}{ccc} 3 & \times & -4 \\ 2 & & -3 \\ \hline & & -17 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 2 & \times & (3y-4) \\ 1 & & -(2y-3) \\ \hline & & -y+2 \end{array}$$

另解： 分解 $2x^2-xy-6y^2=(2x+3y)(x-2y)$

分解 $2x^2+2x-12=2(x-2)(x+3)$

拚凑上述分解式得 $(2x+3y-4)(x-2y+3)$ 与

$(2x+3y+6)(x-2y-2)$

它们展开式中 y 的系数分别为17与－18，因此第一个分解式是正确的，即

$$2x^2-xy-6y^2+2x+17y-12=(2x+3y-4)(x-2y+3)$$

运用公式A于二元二次多项式 $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 的分解，不仅简捷易行，而且可以与平面二次曲线的讨论联系起来。但意义更为重要的是，我们将在§§Ⅴ—Ⅵ看到它与二元二次方程组，四次方程的解法密切相关。

例3. 如果 ⅰ) $f(x,y)=2x^2-xy-6y^2+mx+17y-12$

ⅱ) $g(x,y)=2x^2-xy+ny^2+2x+17y-12$

能分解成实数体R上的两个一次因式之积，试求m，n之值。

解：ⅰ) 分解 $2x^2-xy-6y^2=(2x+3y)(x-2y)$

分解 $-6y^2+17y-12=-(3y-4)(2y-3)$

拚凑上述分解式得 $f(x,y)=(2x+3y-4)(x-2y+3)$

或 $f(x,y)=\left(2x+\frac{3}{2}(2y-3)\right)\left(x-\frac{2}{3}(3y-4)\right)$

从而得到 x 的系数 $m=2$或$-\frac{9}{2}+2(-\frac{2}{3})(-4)=\frac{5}{6}$

ii) 分解 $2x^2+2x-12=2(x-2)(x+3)$

设 $g(x, y)=2(x+\alpha y-2)(x+\beta y+3)$

比较xy与y的系数得

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{1}{2}\\ 3\alpha-2\beta=\frac{17}{2}\end{cases}$$

解之得 $\begin{cases}\alpha=\frac{3}{2}\\ \beta=-2\end{cases}$

$\Rightarrow\quad n=2\alpha\beta=-6$

例3 告诉我们，当一个二元二次多项式$f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$其中五个系数已知时，余下的一个系数只有取某些特殊值时它才能被分解，也就是说任意给出一个二元二次多项式$f(x, y)$，它并不总是可分解的。因此我们有必要研究一下$f(x, y)$可分解的必要条件，充分条件是什么？

例4 如果$f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f\in R[x, y]$（其中$a\neq 0$）能够分解成实数体R上的两个一次因式之积，问它的系数应满足什么条件？

解：设 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=ax^2+(by+d)x+(cy^2+ey+f)$能分解成两个一次因式之积。

则 $\Delta=B^2-4AC=(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f)$

$=(b^2-4ac)y^2+2(bd-2ae)y+(d^2-4af)$

是一个完全平方

$$\Rightarrow\quad (bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)=4a^2e^2-4abcd+4ab^2f+4acd^2-16a^2cf \\ =-4a(4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2)=0 \qquad (\text{I})$$

$$\Rightarrow\quad 4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}=0$$

行列式 $\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}$通常记作$\Theta$。$\Theta=0$是$f(x, y)$在R上可分解为两个一次因式之积的必要条件，但并不充分。例如$f(x, y)=x^2+y^2$，如果我们把$R[x, y]$扩展到复数体K上的多项式时，例4的证明变成可逆的，因而条件也就成为充分的了。

在平面解析几何中，我们知道$\Theta=0$是二次曲线$f(x, y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$退化为两条（实和虚的）直线——相交线，平行线，重合线的充分与必要条件。

运用这一性质，我们可以给出例3的另一解法如下

例3. 另解：i) $4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=4.2(-6)(-12)+(-1)17m-2.17^2+6m^2+12=0$

$$\Rightarrow \quad 6m^2-17m+10=0 \quad \Rightarrow \quad m=2\text{或}\frac{5}{6}$$

ii) $\Theta=4.2(-12)n+(-1).2.17-2.17^2-4n-(-12)(-1)^2=0$

$$\Rightarrow \quad 100n+600=0 \quad \Rightarrow \quad n=-6$$

把m，n的这些值代入原式检验，它们的确都使原式可以分解。

容易看出，当未定系数n为a，c，f其中之一时，$\Theta=0$为n的一次方程，只要它的余子式不为0，n有一个确定的解。当未定系数m为b，d，e其中之一时，$\Theta=0$一般为m的二次方程，它至多不超过两个根。

上述讨论可以推广到三元的情况，研究三维空间中的二次曲面分类。

Ⅳ. 三次式的因式分解——公式B应用举例

例1. i) $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

ii) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

iii) $a+b+c=0 \Rightarrow (ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$

$=3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)$

证： i) $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(\cdots)=0$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

ii) $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$

$\Rightarrow (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

iii) $(ax+by+cz)+(bx+cy+az)+(cx+ay+bz)=(a+b+c)(x+y+z)=0$

$(ax+by+cz)^3+(bx+cy+az)^3+(cx+ay+bz)^3$

$=3(ax+by+cz)(bx+cy+az)(cx+ay+bz)$

公式B的重要性当然远远不限于得到这些结果，它是最根本的用途是解一元三次方程。

例2. 解 $x^3-6x+9=0$

解：我们希望能够把左边写成$x^3+\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta x$的形式

即要求α，β使它们满足方程组

$$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=9\\ \alpha\beta=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha^3+\beta^3=9\\ \alpha^3\beta^3=8\end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha^3$，β^3是$\mu^2-9\mu+8=0$的两个根

$$\Rightarrow \mu=1\text{或}8 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}\text{是满足}\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=9\\ \alpha\beta=2\end{cases}\text{的一组解，求出}\alpha,\ \beta\text{后}$$

$$x^3+\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta x=(x+\alpha+\beta)[x^2-(\alpha+\beta)x+(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)]=0$$

$$\Rightarrow x=-\alpha-\beta,\ \frac{(\alpha+\beta)\pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}}{2}=-\alpha-\beta,\ \frac{\alpha+\beta\pm(\alpha-\beta)\sqrt{3}i}{2}$$

$$=-\alpha-\beta,\ -\alpha\omega-\beta\omega^2,\ -\alpha\omega^2-\beta\omega$$

其中ω，ω^2分别　　　　　　的两个复根，$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

以$\alpha=2$，$\beta=1$　　　　　　$+9=0$的三根

$$x=-1-2,\ -\omega-2\omega^2,\ -\omega^2-2\omega=-3,\ 1-\omega,\ 1-\omega^2$$

如果方程为$x^3+px+q=0$则α，β应满足

$$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=q\\ \alpha\beta=-\frac{p}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=q\\ \alpha^3\beta^3=-\frac{p^3}{27}\end{cases}\Rightarrow\alpha,\beta=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

以α，β之值代入即得方程的三根。

在这个例子中，x^3的系数为1，x^2的系数为0，处理比较方便。当$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$，其中$a\neq1$时，我们可以在方程的两边各除以a，得到$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$，这样方程首项的系数就变成1了。如果多项式$f(x)$的系数都是整数，另一个常用的办法是在方程两边乘以$a^2$，得

$$a^3x^3+a^2bx^2+a^2cx+a^2d=(ax)^3+b(ax)^2+ac(ax)+a^2d=0$$

把ax看作一个新的变量，则新方程的系数均为整数且首项系数为1，在解题过程中也许略有好处。

当$f(x)=x^3+bx^2+cx+d=0$　其中$b\neq0$时

设$y=x+k$　则$x=y-k$

$$f(x)=f(y-k)=(y-k)^3+b(y-k)^2+c(y-k)+b$$
$$=y^3+(b-3k)y^2+(3k^2-2bk+c)y+(-k^3+bk^2-ck+d)=0$$

如果令　$b-3k=0$　即　$k=\frac{b}{3}$，新方程二次项的系数就变为0了，运用例2的方法，解出y，那么x也就可以解出了。

例3. 解　$4x^3+12x^2+6x+1=0$

解，有上式中　$4=2^2$，$12=2.6$，两边乘以2得

$$8x^3+24x^2+12x+2=(2x)^3+6(2x)^2+6(2x)+2=y^3+6y^2+6y+2=0$$

中其　$y=2x$

令　$z=y+\frac{6}{3}=y+2$

$$y^3+6y^2+6y+2=(z-2)^3+6(z-2)^2+6(z-2)+2=z^3-6z+6=0$$

求α，β使 $\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=6\\ \alpha\beta=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=6\\ \alpha^3\beta^3=8\end{cases}$

解　$\mu-6\mu+8=0\Rightarrow\mu=2,\ 4$

$\Rightarrow\alpha=\sqrt[3]{2}$，$\beta=\sqrt[3]{4}$

$$\Rightarrow z=-\alpha-\beta,\ -\alpha\omega-\beta\omega^2,\ -\alpha\omega^2-\beta\omega$$

$$=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ -\sqrt[3]{2}\,\omega-\sqrt[3]{4}\,\omega^2,\ -\sqrt[3]{2}\,\omega^2-\sqrt[3]{4}\,\omega$$

$$\Rightarrow y=z-2=-2-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ -2-\sqrt[3]{2}\,\omega-\sqrt[3]{4}\,\omega^2,\ -2-\sqrt[3]{2}\,\omega^2-\sqrt[3]{4}\,\omega$$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{2}=-1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},\ -1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\omega-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\omega^2,\ -1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\omega^2-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\omega$$

V. 整域 z 上的一元四次式的因式分解

我们通常接触到的四次式绝大多数是整系数的，而其中相当大的一部分能够分解成二个整系数的二次因式之积，例如有一个有理根(因而就有两个或四个有理根)的四次式就属于这一类型。如果一个四次式能分解成二个二次因式之积，那么因式分解的手续或者已经完成，或者容易进一步完成了。

设 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)$

则 $a=a_1a_2 \qquad e=c_1c_2$

这就是说，因式的二次项系数必须是原式四次项系数的因子，因式的常数项必须是原式常数项的因子，其它还有三个关系式，我们用图示如下：

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1\\ & \times & \\ a_2 & b_2 & c_2\end{array} \qquad b=\begin{matrix}a_1b_2\\a_2b_1\end{matrix}\ \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1\\ & \times & \\ a_2 & b_2 & c_2\end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1\\ & \times & \\ a_2 & b_2 & c_2\end{array}\ \begin{matrix}b_1c_2\\b_2c_1\end{matrix}=d$$

$$b_1b_2\ \begin{matrix}a_1c_2\\a_2c_1\end{matrix}=c$$

在我们初步试定a_1，a_2，c_1，c_2之后，根据

$$b_1b_2=c-(a_1c_2+a_2c_1)\ \text{及}\ a_1b_2+a_2b_1=b$$

决定b_1.b_2,如果满足这两个条件的b_1b_2（整数）并不存在，那么变更a_1、a_2、c_1、c_2的值再试。如果存在，则代入$b_1c_2+b_2c_1=d$进行检验，如果成立，则目的已经达到。否则变更a_1、a_2、c_1、c_2之值再试。

例1. 分解 x^4+x^2+1

解： $a_1=a_2=1 \qquad c_1=c_2=\pm1$

先取$c_1=c_2=-1$，则$b_1b_2=1-(-2)=3$

要找整数b_1，b_2使$b_1b_2=3 \qquad b_1+b_2=0$

这是不可能的，方案失败．取$c_1=c_2=1$再试．

此时 $b_1b_2=+1-2=-1$，结合$b_1+b_2=0$

得$b_1=1$，$b_2=-1$，这组b_1.b_2适合

$b_1c_2+b_2c_1=1\cdot1+1\cdot(-1)=0=d$

因此 $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$\begin{array}{cc} 1 & -1\\ \times & \\ 1 & -1\\ 3 & -2\end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1\\ & \times & \\ 1 & -1 & 1\\ & -1 & 2\end{array}$$

x^2+x+1与x^2-x+1的判别式$\Delta=1-4=-3<0$，因此它们在$R[x]$上既约

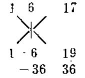
例2. 分解 $x^4-12x+323$

解： $a_1=a_2=1 \qquad c_1\cdot c_2=323=17.19$

原式三次、二次、一次诸项的系数的绝对值与323相比都差得较大，因此$c_1=\pm1$，$c_2=\pm323$的可能性很小，暂时不予考虑。

另外，如果$c_1<0$，则$c_2<0$，$b_1b_2=c-(a_1c_2+a_2c_1)>0$，它不可能使$b=a_1b_2+a_2b_1=b_1+b_2=0$

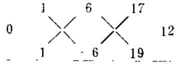
所以先取$c_1=17\quad c_2=19$试试



$b_1b_2=0-(17+19)=-36$

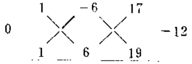
结合$b_1+b_2=0$　得

$b_1=\pm6\qquad b_2=\mp6$



取第一组 得 $b_1c_2+b_2c_1=12\neq d$

取第二组 得 $b_1c_2+b_2c_1=-12=d$

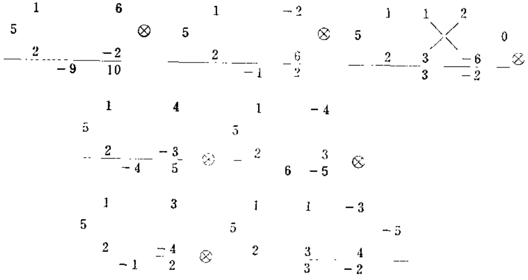


因此　$x^4-12x+323=(x^2-6x+17)(x^2+6x+19)$

这二个因式的Δ都<0，它们在$R[x]$均为既约

例3．解　$2x^4+5x^3+x^2-5x-12=0$

解：



因此　$2x^4+5x^3+x^2-5x-12=(x^2+x-3)(2x^2+3x+4)=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\quad 或\quad \frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot2\cdot4}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\quad 或\quad \frac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{4}$$

例4．解$x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$

解：　$(x-a)^2=a+\sqrt{x}$

$$x^2 - 2ax - \sqrt{x} + a^2 - a = 0$$

令　$y = \sqrt{x}$　则得

$$y^4 - 2ay^2 - y + a(a-1) = 0$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & a & & 1 & 1 & -a \\
0 & & & 0 & & 1 \\
1 & a-1 & \otimes & 1 & -1 & -(a-1) \quad \otimes \\
-4a+1 & 2a-1 & & & -1 & -2a+1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
1 & -1 & -a \\
0 & & -1 \\
1 & 1 & -(a-1) \\
 & -1 & -2a+1
\end{array}$$

故　$y^4 - 2ay^2 - y + a(a-1) = (y^2 - y - a)(y^2 + y - a + 1) = 0$

$$\therefore\ y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \quad 或 \quad \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$$

即　$y_1 = \dfrac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$，　$y_2 = \dfrac{1 - \sqrt{4a+1}}{2}$，

$y_3 = \dfrac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$，　$y_4 = \dfrac{-1 - \sqrt{4a-3}}{2}$，

由于　$y = \sqrt{x} \geqslant 0$，我们根据a的取值范围，看看哪些y的解是合理的。

因为　$\sqrt{4a-3} \geqslant 0$　所以　$y_4 = \dfrac{-1-\sqrt{4a-3}}{2} < 0$，应该舍去

当　$a \geqslant -\frac{1}{4}$ 时　y_1总是合理的；

而y_2的合理范围是$a \geqslant -\frac{1}{4}$　且　$1 - \sqrt{4a+1} \geqslant 0$　即　$0 \geqslant a \geqslant -\frac{1}{4}$；

y_3的合理范围是　$a \geqslant \frac{3}{4}$ 且 $\sqrt{4a-3} \geqslant 1$　即　$a \geqslant 1$

为了得到方程的解，我们还应该把$x_i = y_i^2$（$i = 1, 2, 3$）代入原方程进行检验

$$a + \sqrt{a + \sqrt{x_2}} = a + \sqrt{a + \frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}} = \frac{1}{2}\left(2a + \sqrt{4a+2-2\sqrt{4a+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[2a + \left(1 - \sqrt{4a+1}\right)\right] = \left(\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}\right)^2 = x_2$$

$$a + \sqrt{a + \sqrt{x_3}} = a + \sqrt{a + \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}} = \frac{1}{2}\left(2a + \sqrt{(4a-2) + 2\sqrt{4a-3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(2a+1+\sqrt{4a-3})\neq\left(\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right)^2 \quad . \quad (4a-3\geq 1\neq 0)$$

所以原方程的根为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2} & a\geq-\dfrac{1}{4} \\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{4a+1}}{2} & 0\geq a\geq-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

（检验过程与x_1相同，略去）

Ⅵ　一般二元二次方程组与一般四次方程的解法——公式A与B的结合。

一个二元二次方程组，如果其中有一个方程是一次的；或者虽是二次但能够分解成两个一次因式之积，这类方程我们都会解。对于一般的二元二次方程组，我们的目的是设法从巳知的两个方程中，构造出一个能够分解的二次方程来。

例1．解 $\begin{cases} x^2-xy-y^2-3x+7y-3=0 & (1) \\ x^2-2y^2-2x+3y=0 & (2) \end{cases}$

解：$(1)+\lambda(2)$：$(1+\lambda)x^2-xy-(1+2\lambda)y^2-(3+2\lambda)x+(7+3\lambda)y-3=0$　　(3)

（1）与（2）分别表示平面上的一条二次曲线，解方程组（1）（2）就相当于求这二条曲线的交点。(3)代表过(1)(2)这两条曲线交点的一族二次曲线，我们希望在(3)中挑选出一条退化的二次曲线，通过求出退化曲线（两条直线）与(1)或(2)的交点，而找出原来曲线的交点。

$$令\Theta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2(1+\lambda) & -1 & -(3+2\lambda) \\ -1 & -2(1+2\lambda) & 7+3\lambda \\ -(3+2\lambda) & 7+3\lambda & -6 \end{vmatrix}=0$$

展开后得　$\lambda^3-7\lambda^2+2\lambda+4=0$

$\Rightarrow\ (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda-4)=0$

$\Rightarrow\ \lambda=1$ 或 $3\pm\sqrt{13}$

$$\begin{array}{r|l} 1-7+2+4 & 1 \\ 1-6-4 & \\ \hline 1-6-4 & 0 \end{array}$$

以$\lambda=1$代入(3)得：　$2x^2-xy-3y^2-5x+10y-3=0$

$\Rightarrow\ (x+y-3)(2x-3y+1)=0$

原方程组等价于

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x^2-2y^2-2x+3y=0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ x^2-2y^2-2x+3y=0 \end{cases}$$

$$解之得 \begin{cases} x=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2} \\ y=\dfrac{-1\mp\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$$

显然，这个方法，在理论上可以毫无困难地应用于一般的二元二次方程组。

在一个二元二次方程 $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$中，$a \neq 0$ 如果令 $x = y^2$，就得到一个四次方程

$$ay^4 + by^3 + (c+d)y^2 + ey + f = 0$$

它能够分解为两个二次因子之积的充要条件，与$f(x, y)$能够分解为两个一次因子的充要条件是完全一致的，这一思路帮助我们发现一般的一元四次方程的解法。

例2. 解 $x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 4 = 0$

解： 把12分成 $12-\lambda$，λ 两部分，使

$$\Theta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 8 & \lambda \\ 8 & 2(12-\lambda) & 0 \\ \lambda & 0 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & \lambda \\ 4 & 12-\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & -8 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 16\lambda + 64 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda-4)(\lambda^2 - 8\lambda - 16) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 4 \text{ 或 } 4 \pm 2\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -12 & +16 & +64 & 4 \\ & 4 & -32 & -64 & \\ \hline 1 & -8 & -16 & 0 & \end{array}$$

按$\lambda = 4$将原式写成 $x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x^2 - 4 = 0$

（它相当于 $x^2 + 8xy + 8y^2 + 4x - 4 = 0$）

分解前三项 $x^4 + 8x^3 + 8x^2 = \begin{array}{ll} 1 & 4+\sqrt{8} \\ 1 & 4-\sqrt{8} \end{array}$

分解 $x^4 + 4x^2 - 4 = \begin{array}{ll} 1 & 2+\sqrt{8} \\ 1 & 2-\sqrt{8} \end{array}$

拼凑上面两个分解式

$$8\ \begin{array}{ccccc} 1 & & 4+2\sqrt{2} & & 2-2\sqrt{2} \\ & \times & & \times & \\ 1 & & 4-2\sqrt{2} & & 2+2\sqrt{2} \end{array}\ 32 \quad \otimes \quad \begin{array}{ccccc} 1 & & 4+2\sqrt{2} & & 2+2\sqrt{2} \\ & & & \times & \\ 1 & & 4-2\sqrt{2} & & 2-2\sqrt{2} \end{array} \quad \bigcirc$$

$$\Rightarrow x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 4 = (x^2 + (4+2\sqrt{2})x + 2 + 2\sqrt{2})(x^2 + (4-2\sqrt{2})x + 2 - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2-\sqrt{2} \pm \sqrt{6+4\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}} \quad \text{或} \quad -2+\sqrt{2} \pm \sqrt{6-4\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2}}$$

$$= -2-\sqrt{2} \pm \sqrt{4+2\sqrt{2}} \quad \text{或} \quad -2+\sqrt{2} \pm \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

对于一般的四次方程 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ （$a \neq 0$）

可令 $c = (c-\lambda) + \lambda$，使

$$\Theta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2a & b & \lambda\\ b & 2(c-\lambda) & d\\ \lambda & d & 2e\end{vmatrix}=\lambda^3-c\lambda^2+(bd-4ae)\lambda-(ad^2+be^2-4ace)=0$$

这是一个λ的三次方程，当a，b，…$\in R$时，它至少有一个实根。通过§Ⅳ例3的方法，求出λ后，把原式写成$ax^4+bx^3+(c-\lambda)x^2+\lambda x^2+dx+e=0$
两边除以a得

$$x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c-\lambda}{a}x^2+\frac{\lambda}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}=0$$

我们把它写作

$$x^4+px^3+qx^2+rx^2+sx+t=0$$

分解 $x^4+px^3+qx^2=\left[x^2+\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)x\right]\left[x^2+\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)x\right]$

分解 $x^4+rx^2+t=\left[x^2+\left(\frac{r}{2}+\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2-t}\right)\right]\left[x^2+\left(\frac{r}{2}-\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2-t}\right)\right]$

然后根据

$$2\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2-t}=\frac{pr}{2}-s\text{ 或 }-\left(\frac{pr}{2}-s\right)^{(*)}$$

决定将 $x^4+px^3+qx^2+rx^2+sx+t=0$ 分解成

$$\left[x^2+\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)x+\left(\frac{r}{2}+\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2-t}\right)\right]$$

$$\left[x^2+\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)x+\left(\frac{r}{2}-\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2-t}\right)\right]=0$$

或$$\left[x^2+\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)x+\left(\frac{r}{2}-\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2-t}\right)\right]$$

$$\left[x^2+\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)x+\left(\frac{r}{2}+\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2-t}\right)\right]=0$$

这样原方程的四个根都可以求出了。

注(*) $x^4+px^3+qx^2+rx^2+sx+t=0$ 可分解为两个二次因式之积
则由p3的(I)式可得 $(pr-2s)^2-(p^2-4q)(r^2-4t)=0$

$$\Rightarrow \pm\left(\frac{pr}{2}-s\right)=2\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2-t}$$

维数与基本几何图形的条件数

数学系　张永祺

我们通常称平面是二维空间，日常生产中所在的空间为三维空间。究竟什么是空间的维数呢？这就涉及到空间的维数是如何定义及具备那些性质的问题。由于许多数学家的努力，对这个问题的研究一直到本世纪初逐步形成比较完整的维数理论。维数理论是拓扑学的内容之一。本文只是简单介绍维数概念，目的是为了讨论基本几何图形的条件数（或称维数或自由度）。

在一般的三维欧氏空间（E^3）中，基本的几何图形有那些呢？在平面上讨论的图形有直线、三角形、多边形、圆、椭圆、……等；在空间的图形有平面、直线、球、二次曲面……等。要确定这些几何图形究竟需要多少条件呢？这个问题对数学工作者或中学数学教师来说是需要了解的。例如对于平面上的一个三角形要有多少条件才能确定呢？如果要出一个作三角形的作图题究竟多少条件就刚好呢？这就需要讨论所给出的已知条件究竟够了还是不够的问题。本文试就平面上及空间中的基本几何图形的条件数进行了讨论，并对这些基本几何图形的各种所给出的已知条件所相当的条件数也作了分析。目的是为判断确定这些基本几何图形的条件提供一种工具。

§1　关于维数概念

什么是条件个数？有人说平面上一条直线由两点决定则决定平面上一条直线需要两个条件。那么，空间的直线也由两点决定是否空间直线也由两个条件决定呢？平面上一个三角形由三个顶点决定是否确定平面上一个三角形也是由三个条件决定呢？那么对于空间中的三角形又需要多少条件才能确定呢？要搞清这些问题就要从维数讨论起。

首先要讨论空间的维数，例如数轴是一维的，平面是二维的，日常生活中所在的空间是三维的，这是什么含义呢？关于维数的问题，在上世纪末由于Cantor及Peano等人的工作，引起了数学家的注意。直到本世纪初由Paincare、Brouwer、Menger、Urysohn等人的工作才逐渐形成完整的维数理论。

关于空间的维数我们引进如下的定义：

定义：1．空集且只有空集是－1维的，记作$\dim\varnothing=-1$

2．设在空间A中有一点P，假如P有任意小邻域的边界的维数$\leqq n-1$（$n\geqq 0$），则称点P的维数$\leqq n$记作$\dim P\leqq n$

3．假设在空间A的每一点的维数$\leqq n$，则称A的维数$\leqq n$，记作$\dim A\leqq n$

4．假设在空间A内有点P，如果在点P的维数$\leqq n$，而不为$\leqq n-1$，则称在P点的

维数为n，记作$\dim P = n$

5. 设有A，成立$\dim A \leqq n$，而不成立$\dim A \leqq n-1$，则有$\dim A = n$

在以上的维数定义中是先定义空集为-1维的.由点的任意小邻域的边界为-1维来定义0维。再由点的任意小邻域的边界的维数≦0，且确实有邻域的边界的维数为0，来定义1维.可得到由点的任意小邻域的边界的维数≦$n-1$.且确实有邻域的边界的维数为$n-1$，从而来定义n维。

以下举几个例子：

例1：设A为非空有限集或可列集，则$\dim A = 0$

证：设$A = \{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots\}$，$\forall P \in A$，$\exists \rho \neq d(x_i, P)$则有P的球形邻域$U(P, \rho)$，而其边界为空集。

$$\therefore \dim P = 0,\ \therefore \dim A = 0$$

推论：X轴所有有理点的集合A的维数为0，即$\dim A = 0$

例2：X轴所有无理点的全体的集合为B，则$\dim B = 0$

证：$\forall q \in B$，即q为任一无理数，有有理数p_1，p_2满足$p_1 < q < p_2$，则(p_1, p_2)为q的邻域，且其边界为空集，$\therefore \dim q = 0$，有$\dim B = 0$

例3：在E^2中坐标皆为无理数的点的集合设为A，则$\dim A = 0$

证：$\forall M \in A$，作M的邻域U为含M的充分小的矩形，而矩形的边分别与坐标轴平行，且与坐标轴的截距为有理数，则U的边界为空集$\therefore \dim M = 0$，即有$\dim A = 0$

例4：在E^2中的点$P(x, y)$，设其坐标x，y中有一个且只有一个是有理数，设所有P点组成集合N，则$\dim N = 0$

证$\forall P \in N$，设P的邻域U为充分小的矩形，此矩形的边与坐标轴交成45°角，且与坐标轴的截距为有理数，则U的边界上的点的坐标同为有理数或同为无理数，$\therefore$U的边界为空集，$\therefore \dim P = 0$，$\therefore$有$\dim N = 0$

例5：X上所有点的全体R，有$\dim R = 1$

R中任意点的充分小邻域的边界为0维，$\therefore \dim R = 1$

推论：任一区间$[a, b]$，$[a, b)$，$(a, b]$，(a, b)在$b > a$时其维数皆为1.而且E^3中任意一条连续曲线Γ也是一维的。

在数轴上的点可与实数集R中的数建立一一对应.所以在建立了坐标系之后，数轴上点的坐标为(x)，即一维的空间其独立坐标的数目为1。因此我们可以用独立坐标的数目来确定维数。例如所有线段长度的集合为$\{x \mid x \geq 0\}$是1维的；在平面上固定线束的集合$\{l \mid l$为过定点的直线$\}$也是1维的。对于平面(E^2)上点的坐标为(x, y)，此时独立坐标的数目为2，$\therefore E^2$是2维的，同理E^3是3维的。当然也可以用定义来判断E^2是2维，E^3是3维的，所以在欧氏空间中用独立坐标的数目来确定维数与定义是一致的。对于几何图形的集合的维数就用几何图形所对应的坐标中独立坐标的数目来判定。例如平面上圆的坐标为(x, y, R)，其中(x, y)为圆心坐标，R为半径，独立坐标数目为3，所以平面上的圆是3维的。为了避免讨论比较复杂的拓扑学上的维数问题，我们只是专门讨论在E^3中几何基本图形的条件数（即维数或称自由度）、下面我们就以几个具体的例子说明条件数的多少。

§2 平面上基本图形的条件数

在平面上的基本图形有点、直线、圆、三角形、多边形、二次曲线等，我们来讨论它们的条件数及在一定限制下的条件数。

I、点

平面上的点由一对有序数对 (x, y) 所决定，其条件数为2，即平面上的点要有两个条件来决定，在一定限制下条件数可随之减少，如在某个限制下平面上的点的条件数由2降到1，则称此限制相当于一个条件，以下举一些例子。

1．定直线上的点的条件数为1

设定直线的方程为$Ax+By+C=0$，∴点(x_0, y_0)在此定直线上，即要满足$Ax_0+By_0+C=0$，∴点(x_0, y_0)的独立坐标的数目只有一个，即点的条件数由2降为1，这样定直线上点的条件数为1、即"点在定直线上"这个限制相当于一个条件。

2．定圆上点的条件数为1

设定圆方程为$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2$，其中(x_1, y_1)为定圆圆心坐标，R为定圆半径。点(x_0, y_0)要在定圆上，故满足$(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2=R^2$，这时$x_0$，$y_0$就有了依赖关系，独立的只有一个，∴定圆上点的条件数为1、而"点在定圆上"这个限制相当于给出一个条件。这一点实际可以推广到在任一条曲线上的点的条件数为1。

3．与定点的距离为常数的点的条件数为1

这是2的推论

4．至定直线的距离为定数d的点的条件数为1

设定直线为$Ax+By+C=0$，∴点(x_0, y_0)至定直线的距离为d。

故满足 $\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=d$ ∴x_0，y_0中独立的只有一个，故至定直线的距离为定数d的点的条件数为1，而限制"至定直线的距离为定数"可相当于给出点的一个条件。

5．对一定圆的视角α为定角的点的条件数为1

在图1中，设$P(x_0, y_0)$对O⊙的视角为α

则 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{R}{OP}$ ∴$OP=\dfrac{R}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$=定值

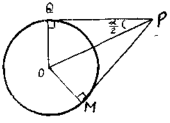


图1

由I_3知P与定点O之间的距离为定长的点P的条件数为1，故有对一定圆的视角为定角α的点的条件数为1。

6．向定圆引切线为定长的点的条件数为1

在图1中，设PQ为定长，则$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{R}{PQ}$为定数，∴α为定角。

则由I_5知，P的条件数为1，∴向定圆引切线为定长的点的条件数为1。