动力分析微机程序系统 HDDJ–DY
原理、算法和算例汇编

上海宝山钢铁总厂
职工大学研究室
黄纲华
何　穷

上海宝山钢铁总厂

一九九四年十二月

回转对称组合结构动力分析
微机程序系统 HDDJ-DY
原 理 和 算 法

上海宝山钢铁总厂
职工大学研究室
黄纲华
何 穷

赠送

上海宝山钢铁总厂
一九九〇年十二月

符　　号

$\{\ \}$	行向量。
$[\ ]$	长方矩阵或正方矩阵。
$[\ ]^T$, $\{\ \}^T$	矩阵或列向量的转置。
·（圆点）	对时间的微商，例如，$\dot{u}=du/dt$，　$\ddot{u}=d^2u/dt^2$。
—（单横杠）	表示富里叶展开项中对称系数项。
=（双横杠）	表示富里叶展开项中反对称系数项。
E,ν	各向同性材料的弹性模量和泊松比。
ρ	材料质量密度。
$t,\Delta t$	时间和时间步长。
ω	特征值，即特征频率。
π_p	总势能。
r,θ,z	节点的径向、环向和轴向坐标。
u,v,w	节点的径向、环向和轴向位移。
$\{f\}$	$\{f\}=\{u,v,w\}$沿坐标方向一点的位移。
$\{F\}$	$\{F\}=\{Fx,Fy,Fz\}$单位体积上的体积力。
$\{\Phi\}$	$\{\Phi\}=\{\Phi x,\Phi y,\Phi z\}$单位面积上的表面力。
$\{d\}$, $\{D\}$	分别为单元和结构的节点自由度向量。
$\{r\}$, $\{R\}$	分别相应于$\{d\}$和$\{D\}$的作用到节点上的广义力。
$\{P\}$	作用到结构节点上的集中荷载或简谐力投影分量。
$\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$	结构的应力和应变。
$\{\sigma_0\}$, $\{\varepsilon_0\}$	结构的初始应力和应变。
$[E]$	弹性应力—应变关系，即弹性性质矩阵。若$\{\varepsilon_0\}=0$，有$\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}$。
$[N]$	形函数矩阵，即单元内位移插值函数。$\{f\}=[N]\{d\}$。
$[B]$	应变—位移矩阵。$\{\varepsilon\}=[B]\{d\}$。
$\sigma_R\ \sigma_z\ \sigma_\varphi\ \tau_{Rz}\ \tau_{z\varphi}\ \tau_{\varphi R}$	分别为结构径向、轴向、环向三个正应力及三个剪应力等六个应力分量。
$N_s\ N_\varphi\ N_{s\varphi}\ M_s\ M_\varphi\ M_{s\varphi}$	分别为结构子午向内力、环向内力、剪力、子午向弯矩、

环向弯矩、扭矩等六个内力分量。

$[k],[K]$	分别为单元和结构的刚度矩阵。
$[m],[M]$	分别为单元和结构的质量矩阵。
$[T]$	坐标变换矩阵。
T	结构的动能。
n	结构总自由度数。
k	富里叶级数展开项号，作为下标表示，则指的是和富里叶级数第k项谐波有关。
N	富里叶级数展开项总数为(N+1)项。
e	作为下标表示属于单元一级的。
V	结构体积。
Fe,F	和速度成正比的阻尼的单元和结构的耗散函数。
f_H	迭加地震反应时，竖向与水平向加速度之比值。
g	重力加速度，一般取g＝ 9.81米/秒^2。
$\{\bar{D}\},\{X\},\{\psi\}$	振型向量。
$\{A\},\{\alpha\}$	系数列向量。
$[\psi],[X],[A]$	由对应的列向量构成的m行或q行的长方矩阵。
$[\omega_i^2]$	特征值 ω_i^2 构成的对角矩阵。
X_i	水平或垂直运动位移。
$\{D_i^s\}$	水平或垂直运动引起的位移向量。
η	地震反应的振型参与系数。
m,p	自由振动计算时，对每个谐波项所取的频率个数。
$[C]$	阻尼矩阵。
$\alpha,\ \beta$	瑞雷阻尼常数。
ξ	阻尼比。
q	迁移式子空间迭代法中子空间的维数。

——不常用的表示符号和上述符号的修改(例如，用加上下标来修改)，在用到它们的地方再定义。

目　　录

赠送

《回转对称结构半解析法自由振动和强迫振动响应分析》

摘　要

回转对称结构半解析法有限元动力分析，是利用数学上对环向坐标θ进行富里叶级数展开的方法，把原问题转换为n个调和项的谐波，再进行有限单元法的动力分析，从而大大降低了分析的花费，是很有实际意义的。

（一）引　言

回转对称结构是一类比较特殊但又应用十分广泛的工程结构，在机械、土建、冶金、核能、市政、机车和化工等很多领域，都有应用，例如：水塔、冷却塔、炼铁高炉和储油罐等等。它们的动力分析（包括抗震设计）都是必不可少的，迫切需要高效率的动力分析方法来解决这类结构的工程实际分析问题。

虽然，国内外著名的有限元分析程序系统，如SAP5、ADINA、JIGFEX，DDJ－W等都具有功能较强的动力分析手段，但对这类大型复杂的回转对称结构来讲，用一般的有限元法进行动力分析，因为计算工作量很大，实际上仍是一件十分困难的事情。问题在于空间结构的自由度总数很多，计算规模很大，计算耗费不胜负担。对于动力分析问题，这个矛盾就更加突出了。

本文所讲的回转对称结构半解析法，是半解析有限元方法的一种。由于，它把结构分析的解析方法和通常的有限元方法结合起来，使得该方法对于回转对称结构的分析求解效率大为提高，并改善了求解的精度，已愈来愈显露其强大的生命力。具体讲，回转对称结构半解析法就是利用数学上正交三角函数簇，对回转对称结构的环向坐标θ进行富里叶级数展开，从而把原问题转换为对n个分问题进行求解，实现了降阶分析，例如：将原来的三

维块体单元降阶为二维回转体单元，大大提高了计算效率。

（二）回转对称结构半解析法自由振动分析

我们假定回转对称结构的位移场为：

$$
\begin{aligned}
u(r,z,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_n(r,z)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\bar{u}}_n(r,z)\sin n\theta \\
v(r,z,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n(r,z)\sin n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\bar{v}}_n(r,z)\cos n\theta \qquad (2\text{-}1) \\
w(r,z,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(r,z)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\bar{w}}_n(r,z)\sin n\theta
\end{aligned}
$$

其中：u、v，w分别为径向、环向和轴向位移；r，z，θ分别为结构的整体坐标系中径向、轴向和环向坐标；单横杠为其对称系数项，双横杠为其反对称系数项。

在实际计算时，富里叶级数收敛很快，因此，只要取有限项N就可以满足工程上的精度要求。

我们取富里叶展开项中任意第k项来进行分析；设取的是对称系数项，则其位移项为：

$$
\begin{aligned}
u_k &= \bar{u}_k(r,z)\cos k\theta \\
v_k &= \bar{v}_k(r,z)\sin k\theta \qquad (2\text{-}2) \\
w_k &= \bar{w}_k(r,z)\cos k\theta
\end{aligned}
$$

用有限单元来构造位移场，设单元的位移插值函数用[N]矩阵表示，则单元的位移场$\{f_k\}$可表示为：

$$
\{f_k\} = \{u_k, v_k, w_k\} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin k\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\theta \end{bmatrix} [N]\{d_k\} = [\bar{T}_k][N]\{d_k\} \qquad (2\text{-}3)
$$

$$
[\bar{T}_k] = \begin{bmatrix} \cos k\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin k\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\theta \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}4)
$$

其中：$\{d_k\}$——单元节点位移向量；

k——富里叶级数展开项号。

由此，可得到单元的速度场表示：

$$\{\dot{f}_k\} = [\bar{T}_k][N]\{\dot{d}_k\} \tag{2-5}$$

则单元的动能Te是：

$$Te = \int_v \frac{\rho}{2}\{\dot{f}_k\}^T\{\dot{f}_k\}dV = \frac{1}{2}\{\dot{d}_k\}^T(\int_v \rho[N]^T[\bar{T}_k]^T\bar{T}_k][N]dV)\{\dot{d}_k\} \tag{2-6}$$

其中：ρ——结构的材料密度

现令，单元的协调质量矩阵[m]e为：

$$[m_e] = \int_V \rho [N]^T [\bar{T}_k]^T [\bar{T}_k][N]dV \tag{2-7}$$

因为，单元位移插值函数[N]矩阵，设定和环向坐标θ无关；而矩阵$[\bar{T}_k]^T[\bar{T}_k]$的乘积[T]为：

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 k\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 k\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 k\theta \end{bmatrix} \tag{2-8}$$

则对之沿环向坐标θ从$-\pi\sim\pi$的积分，根据积分公式：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta\cdot\cos n\theta\, d\theta = \begin{cases} 2\pi & m=n=0 \\ \pi & m=n\neq 0 \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta\cdot\sin n\theta\, d\theta = \begin{cases} \pi & m=n\neq 0 \\ 0 & m\neq n\text{和}m=n=0 \end{cases} \tag{2-9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta\cdot\cos n\theta\, d\theta = 0 \qquad \text{对所有的}m\text{和}n$$

可以知道，对不同的展开项号k，[me]中对dθ积分所得常数，能够在方程中被消去，所以，得到的单元协调质量阵[m]e为：

$$[m]_e = \int_r \int_z \rho [N]^T [N] r\,dr\,dz \qquad (2-10)$$

和展开项号k无关，只和ρ、[N]有关。

结构的总动能是单元动能的总和：

$$T = \Sigma Te = \Sigma \frac{1}{2} \{\dot{d}_K\}^T [m] \{\dot{d}_K\} = \frac{1}{2} \{\dot{D}_K\}^T [M] \{\dot{D}_K\} \qquad (2-11)$$

上式中把单元矩阵扩展为"结构大小"，并对重迭项求和，其中：

$\{\dot{D}_K\}$ ——结构总位移向量$\{D_K\}$的导数；

[M]——结构总协调质量矩阵，和展开项号k无关；自然，我们也可用集中质量矩阵来表示。

对于阻尼矩阵，我们假定存在着与相对速度成正比的耗散力。单元和结构的耗散函数Fe和F，可分别表示为：

$$Fe = \frac{1}{2} \{\dot{d}_K\}^T [C] \{\dot{d}_K\} \qquad (2-12)$$

$$F = \frac{1}{2} \{\dot{D}_K\}^T [C] \{\dot{D}_K\} \qquad (2-13)$$

拉格朗日(Lagrange)方程是：

$$L = T - \pi_P \qquad (2-14)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{D}}\right\} - \left\{\frac{\partial L}{\partial D}\right\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial \dot{D}}\right\} = 0 \qquad (2-15)$$

其中：π_P——总势能。π_P = 应变能 + 外荷载势能。而单元总势能为：

$$\pi_{pe}=\int_V\left(\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[E]\{\varepsilon\}+\{\varepsilon\}^T\{\sigma_\circ\}\right)dv-\int_V\{f\}^T\{F\}dv-\int_S\{f\}^T\{\Phi\}ds \tag{2-16}$$

$\{\varepsilon\}$－应变列阵；　　　　$\{\sigma_\circ\}$－－初应力阵；

$\{F\}$－体积力荷载；　　　　$\{\Phi\}$－－表面力荷载；

$[E]$－弹性性质矩阵；　　　　$\{f\}$－－单元位移场；

由于，对每个单元总势能 π_{pe}，我们有关系式：

$$\{\varepsilon\}=[B]\{d_K\}；\qquad \{f\}=[\bar{T}_K][N]\{d_K\}； \tag{2-17}$$

其中：$[B]$－－为应变位移矩阵，是r,z和展开项号k的函数，而和环向坐标 θ 无关；

代入(2－16)式，我们得到单元总势能 π_{pe} 的表达式为：

$$\pi_{pe}=\frac{1}{2}\{d_K\}^T\left(\int_V[B]^T[E][B]dv\right)\{d_K\}+\{d_K\}^T\int_V[N]^T[\bar{T}_K]^T\{\sigma_\circ\}dv$$

$$-\{d_K\}^T\int_V[N]^T[\bar{T}_K]^T\{F\}dv-\{d_K\}^T\int_S[N]^T[\bar{T}_K]^T\{\Phi\}ds \tag{2-18}$$

全部结构的总势能 π_P，是所有单元势能 π_{pe} 之和：

$$\pi_P=\left(\sum_1^m\pi_{pe}\right)-\{D_K\}^T\{P\}$$

$$=\frac{1}{2}\{D_K\}^T\left(\sum_1^m\int_V[B]^T[E][B]dV\right)\{D_K\}+\{D_K\}^T\sum_1^m\left(\int_V[N]^T[\bar{T}_K]^T\{\sigma_\circ\}dV\right.$$

$$\left.-\int_V[N]^T[\bar{T}_K]^T\{F\}dV-\int_S[N]^T[\bar{T}_K]^T\{\Phi\}dS\right)-\{D_K\}^T\{P\} \tag{2-19}$$

其中：$\{P\}$－－集中力外荷载向量；

我们令单元刚度矩阵$[k]_e$为：

$$[k]e=\int_V[B]^T[E][B]dV \tag{2-20}$$

再令单元的初应力、体积力和表面力引起的单元节点力向量$\{r_K\}$为：

$$\{r_K\}=-\int[B]^T[\bar{T}_K]^T\{\sigma_\circ\}dV+\int_V[N]^T[\bar{T}_K]^T\{F\}dV+\int_S[N]^T[\bar{T}_K]^T\{\Phi\}dS \tag{2-21}$$

扩展到结构大小，由单元拼装得到总刚度阵$[K_K]$和总外力向量$\{R_K\}$：

$$[K_K]=\sum_1^m [k]e;\quad \{R_K\}=\sum_1^m \{r_K\}+\{P\} \qquad (2\text{-}22)$$

则结构的总势能简洁表达式是：

$$\pi_P=\frac{1}{2}\{D_K\}^T[K_K]\{D_K\}-\{D_K\}^T\{R_K\} \qquad (2\text{-}23)$$

把上式和(2－11)式，代入到(2－14)式，得到：

$$L=\frac{1}{2}\{\dot{D}_K\}^T[m]\{\dot{D}_K\}-(\frac{1}{2}\{D_K\}^T[K]\{D_K\}-\{D_K\}^T\{R_K\}) \qquad (2\text{-}24)$$

根据(2－15)式，对上式和(2－13)式求导，合并和移项，即得：

$$[M]\{\ddot{D}_K\}+[C]\{\dot{D}_K\}+[K_K]\{R_K\}=\{R_K\} \qquad (2\text{-}25)$$

需要说明的是：

[M]－－结构总质量矩阵，与展开项号k无关；

[C]－－结构总阻尼矩阵，根据假设的模型而定；

$[K_K]$－－结构总刚度矩阵，与展开项号k有关；

$\{D_K\}$－－结构总位移向量，与展开项号k有关；

$\{R_K\}$－－结构的总外力向量，一般与展开项号k有关。

当考虑无阻尼和没有外力作用下结构的自由振动时，可由(2－25)式得结构自由振动方程：

$$[M]\{\ddot{D}_K\}+[K_K]\{D_K\}=0 \qquad (2\text{-}26)$$

此时，因为所有质点作彼此相同的简谐运动，设其为：

$$\{D_K\}=\{\bar{D}_K\}\sin\omega_K t \qquad (2\text{-}27)$$

$$\{\ddot{D}_K\}=-\omega_K^2\{\bar{D}_K\}\sin\omega_K t \qquad (2\text{-}28)$$

其中：$\{\bar{D}_K\}$ ——结构自由振动各自由度的振型向量；

ω_K ——简谐运动的圆频率。

将(2－27)和(2－28)式代人到自由振动方程(2－26)式，移项即得：

$$\underset{n\times n}{[K_K]}\underset{n\times 1}{\{\bar{D}_K\}}=\omega_K^2\underset{n\times n}{[M]}\underset{n\times 1}{\{\bar{D}_K\}} \qquad (2\text{-}29)$$

(2－29)式是对第k项谐波的自由振动广义特征值问题，其中$\{\bar{D}_K\}$又叫特征向量，ω_K又称之为特征值。

我们采用迁移式子空间迭代法，对结构的N个富里叶展开的环向谐波，分别求出其对应的广义特征值问题(2－29)式的特征对，亦即求得各个谐波的自振频率和振型，这些自振频率构成了原问题的自振频率的子集，其中最低的频率就可作为结构的真实的最低自振频率。

具体的广义特征值问题(2－29)式的求解过程如下所述：

设预先猜测的q个振型列向量$\underset{n\times 1}{\{X\}}^{(i)}$线性组合构成振型向量$\underset{n\times 1}{\{X_K\}}$为：

$$\underset{n\times 1}{\{X_K\}}=a_{K1}\{X\}^{(1)}+a_{K2}\{X\}^{(2)}+\cdots\cdots+a_{Kq}\{X\}^{(q)}=\underset{n\times q}{[X_{Kq}]}\underset{q\times 1}{\{A_K\}} \qquad (2\text{-}30)$$

代人瑞利(Rayleigh)商的表达式：

$$\omega_K^2=\frac{\{X_K\}^T[K_K]\{X_K\}}{\{X_K\}^T[M]\{X_K\}} \qquad (2\text{-}31)$$

得到结构特征值的近似表示式：

$$\omega_K^2=\frac{\{A_K\}^T[X_{Kq}]^T[K][X_{Kq}]\{A_K\}}{\{A_K\}^T[X_{Kq}]^T[M][X_{Kq}]\{A_K\}} \qquad (2\text{-}32)$$

令：

$$\underset{q\times q}{[K_K]^*}=\underset{q\times n}{[X_{Kq}]^T}[K_K]\underset{n\times q}{[X_{Kq}]} \qquad (2\text{-}33)$$

$$\underset{q\times q}{[M]^*}=\underset{q\times n}{[X_{Kq}]^T}\underset{n\times n}{[M]}\underset{n\times q}{[X_{Kq}]} \qquad (2\text{-}34)$$

则(2－32)可写成：

$$\omega_K^2=\frac{\{A_K\}^T[K_K]^*\{A_K\}}{\{A_K\}^T[M]^*\{A_K\}} \tag{2-35}$$

我们希望找到一组“最佳的”列向量$\{A_K\}$，使(2－30)式表示的$\{X_k\}$能使(2－35)式取驻值，即能满足条件：

$$\frac{\partial\omega_K^2}{\partial\{A_K\}}=0 \tag{2-36}$$

于是得到：

$$\underset{q\times q}{[K_K]^*}\underset{q\times 1}{\{A_K\}}-\omega_K^2\underset{q\times q}{[M]^*}\underset{q\times 1}{\{A_K\}}=0 \tag{2-37}$$

这是q阶广义特征值问题，q远小于结构总自由度n，所以问题得到了很大简化。具体计算时可按下列五式循环迭代，直至达到所需的精度：

$$\left.\begin{array}{ll}
\underset{n\times n}{[K_K]}\underset{n\times q}{[\bar{X}m]}=\underset{n\times n}{[M]}\underset{n\times q}{[Xm-1]} & \text{(a)}\\
\underset{q\times q}{[K_K]^*}=\underset{q\times n}{[\bar{X}m]^T}\underset{n\times n}{[K_K]}\underset{n\times q}{[\bar{X}m]} & \text{(b)}\\
\underset{q\times q}{[M]^*}=\underset{q\times n}{[\bar{X}m]^T}\underset{n\times n}{[M]}\underset{n\times q}{[\bar{X}m]} & \text{(c)}\\
\underset{q\times q}{[K_K]^*}\underset{q\times q}{[Am]}=\underset{q\times q}{[\Omega m^2]}\underset{q\times q}{[M]^*}\underset{q\times q}{[Am]} & \text{(d)}\\
\underset{n\times q}{[Xm]}=\underset{n\times q}{[\bar{X}m]}\underset{q\times q}{[Am]} & \text{(e)}
\end{array}\right\} \tag{2-38}$$

当m＝1时，(2－38)(a)式右端$[X_0]$是按一定法则形成的初始振型。进行一次逆迭代后，便可求得左端的$[\bar{X}_1]$，它是n×q阶的。然后，用(2－38)(b)及(c)式，求得$[K_K]^*$及$[M]^*$，它们是q×q阶的。(2－38)(d)式是q阶子空间内的广义特征值问题，它的全部q个特征对都是要求出的。程序

中采用修正的QL法求解其q个特征对。所求得的q列特征向量，形成q×q阶方阵[A_m]，而对角矩阵[Ω_m^2]则存放相应的q个特征值 ω_{m1}^2，ω_{m2}^2，……，ω_{mq}^2。(2-38)(e)式是将子空间的特征向量[A_m]还原为原空间的特征向量，从而结束了一次迭代。在数学上可以证明，当$m\to\infty$时，[Ω_m^2]的q个对角线元素可以按任意精度逼近n自由度体系的前q阶 ω^2，而[X_m]的q个列向量则为相应精度的振型。

需要指出，我们采用迁移式子空间迭代法来进行迭代求解所需精度的特征对的振型，即并不是让q列初始向量自始至终参加迭代，而是在经过若干次迭代后，当前面已有若干阶q_i个特征值满足精度，在以后的迭代中，让已满足精度的q_i 个特征对迁移出去，再补充q_i 个特征向量，使其继续迭代。当然，后续迭对之前，还必须用M^-正交化方法，将继续参加迭代的向量中所含的前面q_i 阶振型的分量清除掉。这样，直至求出第k阶谐波所要求的p个特征值和特征向量。

对于回转对称结构半解析法自由振动分析，原问题已降阶为(N+1)个谐波的分问题，因而，共得到(N+1)×P个特征值：

$$(\omega_{01},\omega_{02},\cdots,\omega_{0p},\cdots\cdots;\omega_{i1},\omega_{i2},\cdots,\omega_{ip},\cdots\cdots;\omega_{N1},\omega_{N2},\cdots,\omega_{Np},)$$

这样就求得了原问题的自由振动的解。

（三） 谐荷载强迫振动的稳态响应

任意谐荷载作用下强迫振动的回转对称结构半解析法的稳态响应，也是将其进行富里叶级数展开，然后对任一第k项谐波作稳态响应分析。最后，对结构的N个富里叶展开的环向谐波的稳态响应进行迭加，即求得原问题的稳态响应的解了。

对于第k项谐波的谐荷载强迫振动的动力平衡方程为：

$$[m]\{\ddot{d}_k\}+[C_k]\{\dot{d}_k\}+[K_k]\{d_k\}=\{R_k(t)\} \qquad (3-1)$$

其中：

$\{d_k\}$ --稳态响应的位移向量；

$[C_k]$ --瑞利阻尼模型：$[C_k]=\alpha[M]+\beta[K]$；α、β：常数；

$\{R_k(t)\}=\{P_k(r,z)\}Sin\varphi t$ 简谐强迫振动荷载在第k阶富里叶展开项中的投影分量。

采用振型迭加法来求解方程(3－1)，即根据自由振动分析获得的第k项谐波前m阶固有频率ω_{kj}及振型$\{X_k\}^{(j)}$(j＝1,2,…，m)，将解向量$\{d_K\}$，在所求得的前m阶振型上分解，即设：

$$\underset{n\times1}{\{d_K\}}=u_{K1}\{X_K\}^{(1)}+u_{K2}\{X_K\}^{(2)}+\cdots+u_{Km}\{X_K\}^{(m)}$$

$$=\underset{n\times m}{[X_{Km}]}\underset{m\times1}{\{u_K\}}\qquad(k=0,1,\cdots\cdots,N)\qquad(3\text{-}2)$$

式中：$[X_{Km}]$——是由m个振型向量$\{X_K\}^{(j)}$ (j＝1,2,……,m)构成的(n×m)阶系数阵，n为结构总自由度数；

$\{u_k\}$——是待求的时间t的函数的(m×1)阶系数阵；

将其代入到(3－1)式，并用$[X_{Km}]^T$再左乘两边，由于$[X_{Km}]$关于[M]、$[C_K]$、$[K_K]$都正交，因此，可得到m个不相耦联的独立的强迫振动方程：

$$M_j^*\ddot{u}_j+C_{Kj}^*\dot{u}_j+K_{Kj}^*u=P_{Kj}^*\sin\phi t\qquad(j=1,2,\cdots\cdots,m)\qquad(3\text{-}3)$$

其中：M_j^*、C_{Kj}^*、K_{Kj}^*分别是对角阵$[M]^*$、$[C_K]^*$、$[K_K]^*$的第j个对角元素。而$[M]^*$、$[C_K]^*$、$[K_K]^*$分别由下式求得：

$$\begin{aligned}\underset{m\times m}{[K_K]^*}&=\underset{m\times n}{[X_{Km}]^T}\underset{n\times n}{[K_K]}\underset{n\times m}{[X_{Km}]}\\\underset{m\times m}{[M]^*}&=\underset{m\times n}{[X_{Km}]^T}\underset{n\times n}{[M]}\underset{n\times m}{[X_{Km}]}\\\underset{m\times m}{[C_K]^*}&=\underset{m\times n}{[X_{Km}]^T}\underset{n\times n}{[C_K]}\underset{n\times m}{[X_{Km}]}\end{aligned}\qquad(3\text{-}4)$$

而P_{Kj}^*则是$\{P_K\}^*$的第j个元素，$\{P_K\}^*$向量由下式求得：

$$\underset{m\times1}{\{P_K\}^*}=\underset{m\times n}{[X_{Km}]^T}\underset{n\times1}{\{P_K\}}\qquad(3\text{-}5)$$

在程序设计中，我们已让m列振型$[X_{Km}]$经过规范正交化处理，即使其满足如下条件：

$$\underset{m\times n}{[X_{Km}]^T}\underset{n\times n}{[M]}\underset{n\times m}{[X_{Km}]}=\underset{m\times m}{\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\ddots\\&&&1\end{bmatrix}}\qquad(3\text{-}6)$$

所以，上述公式中$M_j^* = 1$。

因此，我们也得到：

$$[X_{km}]^T_{m\times n} [K_k]_{n\times n} [X_{km}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} \omega_{k1}^2 & & & \\ & \omega_{k2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_{km}^2 \end{bmatrix}_{m\times m} \quad (3\text{-}7)$$

所以，(3－3)式中：$K_{kj}^* = \omega_{kj}^2$

由阻尼常数α及β可计算得到每一阶振型的阻尼比ξ_{kj}值，进而可以计算出C_{kj}^*：

$$\xi_{kj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_{kj}} + \omega_{kj}\beta\right); \quad (3\text{-}8)$$

$$C_{kj}^* = 2M_j^*\ \xi_{kj}\ \omega_{kj}; \quad (M_j^* = 1) \quad (3\text{-}9)$$

方程(3－3)的特解(即稳态解)为：

$$Y_j = a_j \sin\phi t + b_j \cos\phi t \quad (3\text{-}10)$$

式中的a_j、b_j等系数可用一般的解微分方程的公式求得：

$$a_j = \frac{P_j^*}{\omega_{kj}^2} \cdot \frac{1 - \dfrac{\phi^2}{\omega_{kj}^2}}{\left(1 - \dfrac{\phi^2}{\omega_{kj}^2}\right)^2 + 4\xi_{kj}^2\left(\dfrac{\phi}{\omega_{kj}}\right)^2} \quad (3\text{-}11)$$

$$b_j = \frac{-P_j^*}{\omega_{kj}^2} \cdot \frac{2\dfrac{\phi}{\omega_{kj}}\xi_{kj}}{\left(1 - \dfrac{\phi^2}{\omega_{kj}^2}\right)^2 + 4\xi_{kj}^2\left(\dfrac{\phi}{\omega_{kj}}\right)^2} \quad (3\text{-}12)$$

(3－10)式表示了第k项谐波第j阶振型对简谐激振力的响应。

将前m阶振型的响应组合起来，就得到：