万学教育·海文考研 UNIVERSAL EDUCATION GROUP

遥遥领先的中国第一考研品牌

2009年强化班

数学讲义

高等数学

主编：李正元 刘西垣

www.hwkaoyan.com

100871 北京大学数学科学学院 李正元

math.pku.edu.cn.

第一讲　极限、无穷小与连续性

一、知识网络图

- 函数，极限，无穷小与连续性
  - 函数
    - 函数概念
    - 几类常见的函数(单调函数、奇偶函数、周期函数、有界函数)
    - 复合函数与反函数
    - 常见的函数形式(初等函数、分段函数、隐函数，由参数方程确定的、由变限积分确定的、由级数确定的)
  - 极限
    - 定义与性质，判别极限存在与不存在的方法
    - 求极限的方法
      - 函数极限
        - 直接用运算法则(四则运算，幂指数运算，代入法)
        - 未定式
          - “$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型(恒等变形相消后代入，洛必达法则，变量替换与重要极限，泰勒公式，等价无穷小因子替换)
          - 其他未定式(转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型)
        - 分别求左、右极限
      - 数列极限
        - 递归数列($x_{n+1}=f(x_n)$)
        - n 项和的数列(恒等变形，夹逼法，化为定积分，级数求和)
        - n 项积的数列(恒等变形，转化为 n 项和)
        - 一般情形(转化为函数极限，恒等变形，夹逼法)
  - 无穷小
    - 概念与性质(高阶、低阶、同阶、等价、阶数)
    - 无穷小阶的比较与确定无穷小的阶的方法(洛必达法则，阶的运算性质，泰勒公式)
  - 连续性
    - 连续与间断的定义
    - 判断连续性与间断点类型的方法(初等函数连续性，连续函数运算性质，按定义)
    - 连续函数的性质

二、重点考核点

这部分的重点是：

① 掌握求极限的各种方法.

北方工大

范京芝

② 掌握无穷小阶的比较及确定无穷小阶的方法.

③ 判断函数是否连续及确定间断点的类型(本质上是求极限)

④ 复合函数、分段函数及函数记号的运算.

§1 极限的重要性质

1. 不等式性质

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = B$,且$A > B$,则存在自然数$N$,使得当$n > N$时有$x_n > y_n$.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = B$,且存在自然数$N$,当$n > N$时有$x_n \geqslant y_n$,则$A \geqslant B$.

作为上述性质的推论,有如下的保号性质:

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,且$A > 0$,则存在自然数$N$,使得当$n > N$时有$x_n > 0$.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,且存在自然数$N$,当$n > N$时有$x_n \geqslant 0$,则$A \geqslant 0$.

对各种函数极限有类似的性质.例如:

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x) = B$,且$A > B$,则存在$\delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$有$f(x) > g(x)$.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x) = B$,且存在$\delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时$f(x) \geqslant g(x)$,则$A \geqslant B$.

2. 有界或局部有界性性质

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,则数列$\{x_n\}$有界,即存在$M > 0$,使得$|x_n| \leqslant M(n = 1,2,3,\cdots)$.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$,则函数$f(x)$在$x = x_0$的某空心邻域中有界,即存在$\delta > 0$和$M > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$|f(x)| \leqslant M$.

对其他类型的函数极限也有类似的结论.

§2 求极限的方法

1. 极限的四则运算法则及其推广

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x) = B$,则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x) = AB;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0).$$

只要设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在或是无穷大量,上面的四则运算法则可以推广到除“$\frac{0}{0}$”,“$\frac{\infty}{\infty}$”,“$0 \cdot \infty$”,“$\infty - \infty$”四种未定式以外的各种情形.即:

1° 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = \infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x) = B$,则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \infty$. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty\ (g(x) \neq 0)$

又$B \neq 0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \infty$.

2° 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = \infty$,当$x \to x_0$时$g(x)$局部有界,(即$\exists\delta > 0, M > 0$,使得$0 < |x - x_0| < \delta$时$|g(x)| < M$),则

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = \infty .$$

设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$，当 $x \to x_0$ 时 $|g(x)|$ 局部有正下界，(即 $\exists \delta > 0, b > 0$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|g(x)| \geqslant b > 0$)，则

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) g(x)] = \infty .$$

3° 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$，则 $\lim_{x \to x_0}(f(x) g(x)) = \infty$，又 $\exists \delta > 0$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) g(x) > 0$，则

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = \infty .$$

4° 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$，$x \to x_0$ 时 $g(x)$ 局部有界，则 $\lim_{x \to x_0}(f(x) g(x)) = 0$(无穷小量与有界变量之积为无穷小.)

2. 幂指函数的极限及其推广

设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A > 0$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ 则 $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = A^B$.

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\ln f(x)} = e^{B\ln A} = A^B\right)$$

只要设 $\lim_{x \to x_0} f(x)$，$\lim_{x \to x_0} g(x)$ 存在或是无穷大量，上面的结果可以推广到除“1^∞”，“0^0”及“∞^0”三种未定式以外的各种情形. 这是因为仅在这三个情况下 $\lim_{x \to x_0} g(x)\ln f(x)$ 是“$0 \cdot \infty$”型未定式.

1° 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$($0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > 0$)，$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \neq 0$，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0 & (B > 0) \\ +\infty & (B < 0). \end{cases}$$

e.g. $I = \lim_{x \to \infty}(4x^3 - 2x^2 + 1)$

$= \lim_{x \to \infty}\left[x^3\left(\underbrace{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}_{4}\right)\right] = \infty$

$\infty \cdot$

2° 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A > 0, A \neq 1$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0 & (0 < A < 1) \\ +\infty & (A > 1) \end{cases}$$

3° 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \neq 0$，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0 & (B < 0) \\ +\infty & (B > 0) \end{cases}$$

【例 1】 设 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$，又 $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$，则 $\lim_{x \to x_0} f(x) =$ ___0___.

【分析】 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)\right) = A \times 0 = 0.$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$

(2) 利用函数的连续性求极限

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

先除定义外，可用别的方法判断 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续求...

3. 对于以上法则下列形式不能应用.

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0

求 可转化为 先约去相消因子再代入 / 洛必达法则

先相消 — 设法消去分子、分母中极限为 $0(\infty)$ 的因子

【例 2】 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在.　　　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

极限∃ 指 极限为有限数

分析: ① $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n\cdot c_n)=\infty$, 不存在 选(D)

(C) 不对. "$0\cdot\infty$" —未定式

② (A)(B) 不对. 由极限的不等式性质.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ ⇒ $a_n<b_n\ (n>N_1)$

~~$a_n<b_n\ (n=1,2,\ldots)$~~

类似(B)×.

1.5 利用变量替换法与两个重要极限求极限

设 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$, $f(u)$在$u=A$连续 ⇒

$\lim\limits_{x\to a}f(\varphi(x))\overset{令u=\varphi(x)}{\underset{x\to a,\ u\to A}{=}}\lim\limits_{u\to A}f(u)=f(A)$

2. 两个重要极限.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

⇓ $u=\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ⟹ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

变量　$u=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

3. 变量替换法与重要极限相结合

(1) 可以求以下极限.

$\lim\limits_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}$

(2) 引列 "1^∞"型 极限的一种求法

设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$　$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$

求. $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}[1+f(x)-1]$

用相消法求$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型极限

【例 1】 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$

【解】 作恒等变形,分子、分母同乘$\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}$得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

分析: $\frac{0}{0}$. 相消法.

$I\overset{恒等}{\underset{变形}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$　$\tan(1-\cos x)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

【例 2】 求 $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

【解】 作恒等变形,分子、分母同除$\sqrt{x^2}=-x\ (x<0)$得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{\sqrt{4+0}-1-0}{\sqrt{1+0}}=1$$

分析: $\frac{\infty}{\infty}$ 相消法. 消去分子、分母中有∞的因子. 同除 $\sqrt{x^2}=-x\ (x<0)$

评注. 求$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$极限. 不一定要用洛必达法则. 有时相消法会更加方便.

利用洛必达法则求极限

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 有连续导数，又

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=2$$

不能拆开，∵它们分别极限不存在

∴只能通分

求 $f(0)$ 与 $f'(0)$．

$I=\lim\frac{\sin x+xf(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{洛}{=}}\lim\frac{\cos x+f(x)+xf'(x)}{2x}$

$=\lim\left(\frac{\cos x+f(x)}{2x}+\frac{1}{2}f'(x)\right)$; $=\frac12 f'(0)+\frac12 f'(0)=f'(0)=2.$

$=\lim\frac{\cos x+f(x)}{2x}+\frac12 f'(0)$; 若 $f(0)\neq -1$, $I=\infty$ 不合题设

$=\lim\frac{-\sin x+f'(x)}{2}+\frac12 f'(0)$

$\frac{0}{0}$ $(\cos 0+f(0))=1+f(0)=0$

必须有 $f(0)=-1$

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$．

$I=\frac12\lim\frac{2\sin x+x^2\cos\frac1x}{\ln(1+x)}$

$\overset{\frac00}{\underset{洛}{=}}\frac{2\cos x+2x\cos\frac1x+\sin\frac1x}{\frac{1}{1+x}}$ 不存在，洛则失效

$I=\frac12\lim\frac{2\sin x+x^2\cos\frac1x}{x}$

$=\frac12(2\cdot 1+0)=1$

【例 3】 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac1x}-e}{x}$． $=e\lim\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}$ $=-\frac{e}{2}$

$I\overset{\frac00}{\underset{洛}{=}}\lim\frac{(e^{\frac1x\ln(1+x)}-e)'}{(x)'}$

$=\lim(1+x)^{\frac1x}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$

$=\lim(1+x)^{\frac1x}\cdot\frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{(1+x)\cdot x^2}$

$\frac{1}{(f(x)-1)}\cdot(f(x)-1)\cdot g(x)=e^{\lim[f(x)-1]g(x)}$

【例 4】 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$．

如果用洛，需用多次，也不简单

$I=\lim e^{\sin x}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}$

$t=x-\sin x$

$=1\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

4. 利用等价无穷小因子替换

设 $\lim\limits_{x\to a}g_i(x)=\lim\limits_{x\to a}g_i^*(x)=0\quad(i=1,2)$

$g_i(x)\sim g_i^*(x)$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)g_1(x)}{f_2(x)\cdot g_2(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)\cdot g_1^*(x)}{f_2(x)\cdot g_2^*(x)}$

评注：以下等价无穷小替换是错误的

因 $x\to 0$ 时 $\tan x\sim x$. $\sin x\sim x$

$W=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$

等价无穷小替换在乘除法中用。在加减使用是有条件，所以不要用

5. 用洛求未定式极限

(1) what 洛．

评注 ① $x\to a$. 可改为 $x\to a\pm$, $x\to\pm\infty$. ∞

也有相应的法则

② $\frac{\infty}{\infty}$. 可改为 $\frac{*}{\infty}$.

(2) 怎样用洛求 $\frac00$. $\frac{\infty}{\infty}$ 型或 $(\frac{*}{\infty})$ 型

① 先验证是否为 $\frac00$. $\frac{\infty}{\infty}(\frac{*}{\infty})$ eg1

② 求 $\frac00$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 时，若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在也不为 ∞. 则原极限不存在，洛则失效 eg2

评注：极限存在 + 极限不存在 = 极限不存在

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在，$\lim g(x)=B\neq 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)$ 不存在

③. 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是 $\frac00$. $\frac{\infty}{\infty}$ 可继续用洛．只要条件符合

用到求出为止．eg3

④ 使用洛也要注意某些技巧．

变量替换，恒等变形，~~条件是~~ 等价无穷小因子替换

分离出非未定因子先求因子 eg 4.5

(3) 其它类型转化为 $\frac00$. 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 再用洛．eg.6

如：$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ $(1^\infty, 0^0, \infty^0)$

$g(x)\ln f(x)$: $0.\infty$

1.6. 分别求左右极限

分别求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n-1}$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}$

(1) 基本情形

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a+0}=\lim\limits_{x\to a-0}=A$

什么情况要分别求左右极限?

1° 求分段函数在分界点处极限

2° ~~左右极限不等~~ 其某个含某些函数左右极限不同, e.g. $e^{\frac{1}{x}}$ e.g.

【例 5】 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\sin x + xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$ <u>1</u>.

建立 $\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 与 $\dfrac{6\sin x+xf(x)}{x^3}$ 的联系

$=\dfrac{6\sin x+xf(x)}{x^3}+\dfrac{6x-6\sin x}{x^3}$

【例 6】 求 $I=\lim\limits_{x\to0+}(\tan x)^{\ln(1-x)}$. (0^0) $=0$

$I=\lim e^{\ln(1-x)\ln\tan x}$

$=\lim \underbrace{\ln(1-x)}_{0}\cdot\underbrace{\ln\tan x}_{\infty}$

$=\lim \dfrac{\ln\tan x}{-\frac{1}{x}}$ $\dfrac{\infty}{\infty}$

【例 7】 设 $\alpha>0,\beta\neq0$ 为常数且 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2\right]=\beta$，则 $(\alpha,\beta)=$ ________.

【分析】 $\infty-\infty$ 型极限.

$$I=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[(1+x^{-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0+}\frac{(1+t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{\alpha}(1+t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-1}\alpha\cdot t^{\alpha-1}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{2}(1+t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot t^{\alpha-2}=\begin{cases}0 & (\alpha>2)\\ \frac{1}{2} & (\alpha=2)\\ +\infty & (0<\alpha<2)\end{cases}$$

因此，$(\alpha,\beta)=(2,\frac{1}{2})$.

1.10 利用导数求极限 (第二讲)

1.11 利用定积分求极限 (第三讲)

1.12 利用泰勒公式求极限 (第五讲)

分别求左、右极限的情形，分别求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n-1}$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}$ 的情形

【例 1】 设 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$，求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

评注. 极限不存在 + 不存在 可以是存在

【例 2】 求 $I = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$ $=1$

$x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$

分析① $\lim x_{2n-1} = \lim\left(\frac{2n-1+1}{2n-1}\right)^{(-1)^{2n-1}} = 1^{-1} = 1$

$\lim x_{2n} = \lim\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{(-1)^{2n}} = 1^{1} = 1$

$\Rightarrow \lim x_n = 1$

② $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{(-1)^n}{n}} = e^0 = 1$

利用函数极限求数列极限

【例 1】 求 $I = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{a^{\sqrt{n}}}(a>1)$.

解. 引入 $f(x)=\frac{x^2}{a^x}$

$y_n = f(\sqrt{n})$

$I = \lim\limits_{n\to} f(\sqrt{n}) = \lim\limits_{x\to} f(x)$

$= \lim \frac{x^2}{a^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\frac{2x}{a^x\ln a} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\frac{2}{a^x\ln^2 a} = 0$

【例 2】 求 $I = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

【解 1】 $I = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\left(n\tan\frac{1}{n}-1\right)\right)^{\frac{1}{n\tan\frac{1}{n}-1}n^2\left(n\tan\frac{1}{n}-1\right)}$

转化为求 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(n\tan\frac{1}{n}-1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan x - x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x} = \frac{1}{3} \Rightarrow I = e^{\frac{1}{3}}$

【解 2】 用求指数型极限的一般方法.

$$I = \lim_{n\to+\infty} e^{n^2\ln\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}$$

转化为求

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\Big/\frac{1}{n^2} = \lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\tan x}{x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}$$（等价无穷小因子替换），余下同前.

eg. 设 $x_1>0$. $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 求 $\lim x_n$.

解: 显然 $0<x_n<3$ $(n=2,3,\ldots)$

$\Rightarrow x_n$有界

引入 $f(x)=\frac{3(1+x)}{3+x}$ $x_{n+1}=f(x_n)$

$f(x)=3-\frac{6}{3+x}$, $x>0$

$f(x)$在$(0,+\infty)\uparrow \Rightarrow x_n$单调. $\overset{有界}{\Rightarrow} \exists \lim x_n \overset{记为}{=} a$

$a=\frac{3(1+a)}{3+a}$

$a=\sqrt{3}$ $(x_n>0)$

(4) 根据 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a \Leftrightarrow \lim x_{2n-1} = \lim x_{2n} = a$

什么时候用? x_n的表达式与n的奇偶性有关时 eg. 1.3.(2)

1.7. 利用函数极限求数列极限

根据. 设 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to a)}} f(x)=A \Rightarrow \forall x_n\to+\infty\ (a)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$

方法. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$ 的一种方法. 引入一个$f(x)$. 使得

$y_n=f(x_n)$. 而 $x_n\to+\infty\ (a)$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}f(x) \overset{设已知}{=} A$

特别因为一般用法.

~~因数列不能用~~ 许多 eg. 1.2.7

1.8. 利用适当放大、缩小法求极限

根据: 夹逼定理

简单的放大、缩小法 eg. $x_n=\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}} = \sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}$

求$\lim x_n=?$ ~~$0<x_n\le1$~~ $x_n\le1$.

$\because (2n-1)!! \ge (2n-2)!!$, $(2n)!! \ge (2n-2)!!\cdot 2n$

$\therefore x_n \ge \sqrt[n]{\frac{(2n-2)!!}{(2n)!!}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}} \to 1$ $(n\to+\infty)$

$\Rightarrow \lim x_n=1$ 注: $\lim\limits_{x\to0}a^x=1$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$ $(\Leftarrow \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1)$

1.9 求递归数列极限

设 $x_{n+1}=f(x_n)$. $(n=1,2,\ldots)$

x_1给定. $f(x)$为已知的连续函数

如何求 $\lim\limits_{n\to}x_n$

主要方法: 先证 $\lim\limits_{n}x_n$ $\exists$. 记为a. 然后对递归方程两边取极限. $a=f(a)$. 解出a. 即可

关键是证明$\exists\lim\limits_{n\to}x_n$. 方法: 单调有界定理

如何证单调性 方法 1 数学归纳法. 2 考察 $f(x)$ 的单调性

结论: 设 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$

$f(x)\in[a,b]$ $(x\in[a,b])$ $x_1\in[a,b]$ ……

eg.

§3　无穷小和它的阶

1. 无穷小、极限、无穷大及其联系

(1) 无穷小与无穷大的定义

(2) 极限与无穷小,无穷小与无穷大的关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$ 极限问题均可化为无穷小问题

其中 $$\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0 \quad (f(x) = A + o(1), x\to x_0).$$

$o(1)$ 表示无穷小量.

在同一个极限过程中,u 是无穷小量$(u\neq 0)\Rightarrow \frac{1}{u}$是无穷大量. 反之若 u 是无穷大量,则$\frac{1}{u}$是无穷小量.

2. 无穷小阶的概念

(1) **定义**　同一极限过程中,$\alpha(x)$,$\beta(x)$ 为无穷小,

设　$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$ $\begin{cases} l\neq 0 \text{ 为有限数,称 } \alpha(x) \text{ 与 } \beta(x) \text{ 为同阶无穷小} \\ l = 1 \text{ 时,称 } \alpha(x) \text{ 与 } \beta(x) \text{ 为等价无穷小,记为} \\ \alpha(x) \sim \beta(x) \quad \text{(极限过程)} \\ l = 0 \text{ 时,} \alpha(x) \text{ 是比 } \beta(x) \text{ 高阶的无穷小,记为} \\ \alpha(x) = o(\beta(x)) \quad \text{(极限过程)} \end{cases}$

定义　设在同一极限过程中 $\alpha(x)$,$\beta(x)$ 均为无穷小,$\alpha(x)$ 为基本无穷小,若存在正数 k 与常数 l 使得

$$\lim\frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = l\neq 0$$

称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小,特别有$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{(x-x_0)^k} = l\neq 0$,称 $x\to x_0$ 时 $\beta(x)$ 是$(x-x_0)$ 的 k 阶无穷小.

(2) 重要的等价无穷小

$x\to 0$ 时

$\sin x \sim x$,　$\tan x\sim x$,　$\ln(1+x)\sim x$,　$e^x - 1\sim x$;

$a^x - 1\sim x\ln a$,　$\arcsin x\sim x$,　$\arctan x\sim x$;

$(1+x)^a - 1\sim ax$,　$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

(3) 等价无穷小的重要性质

在同一个极限过程中

1°　若 $\alpha\sim\beta$,$\beta\sim\gamma\Rightarrow\alpha\sim\gamma$.

2°　$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\alpha = \beta + o(\beta)$

3°　在求"$\frac{0}{0}$"型与"$0\cdot\infty$"型极限过程中等价无穷小因子可以替换

【例1】　求 $I = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1\right]$ $= \lim\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}$

解. 分. 先用等价无穷小因子替换

$(\ln(1+t)\sim t)_{t\to 0}$　记 $t = \left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1$

2.3 怎样比较无穷小的阶

即求分式极限 e.g 7. 10/

$l \neq 0, l \neq 0$. 同阶非等价

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 1 & \text{等价} \\ 0 & f(x) = o(g(x)) \\ \infty & g(x) = o(f(x)) \end{cases}$$

2.4 怎样确定无穷小的阶 e.g 6. 10/

设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. 如何确定 $x \to a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的几阶无穷小?

(1) 四则运算

法1: 利用等价无穷小 若 $f(x) \sim A(x-a)^k$ 则 $f(x)$ 为 $x-a$ 的 k 阶;

法2. 利用洛确定常数 $k>0$ 使得 $\lim \frac{f(x)}{(x-a)^k} \overset{洛}{=} l \neq 0 \Rightarrow \ldots k$ 阶

法3. 利用无穷小阶的运算性质 e.g 3. 9/ 法4. 泰勒公式利用

(2) 积分运算 e.g 4. 9/ e.g 5 10/

【例 2】 设 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left[1 + \dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right]}{3^x - 1} = 5$，则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} =$ ________. 首先建立两极限关系，靠等价无穷小因子替换

【分析】 由已知条件及 $\lim\limits_{x \to 0}(3^x - 1) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \ln\left(1 + \dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\sin 2x} = 0$. 又在 $x = 0$ 某空心邻域 $f(x) \neq 0 \Rightarrow \ln\left(1 + \dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right) \sim \dfrac{f(x)}{\sin 2x} \sim \dfrac{f(x)}{2x} (x \to 0)$，又 $3^x - 1 \sim x\ln 3$. 于是

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)/2x}{x\ln 3} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2x^2 \ln 3} = 5 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 10\ln 3.$$

【例 3】 设 $x \to a$ 时 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 分别是 $x - a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小，又 $\lim\limits_{x \to a} h(x) = A \neq 0$，则 $x \to a$ 时

(1) $\alpha(x)h(x)$ 是 $x - a$ 的 __n__ 阶无穷小.

(2) $\alpha(x)\beta(x)$ 是 $x - a$ 的 __n+m__ 阶无穷小.

(3) $n < m$ 时，$\alpha(x) \pm \beta(x)$ 是 $x - a$ 的 __n__ 阶无穷小.

(4) $n > m$ 时 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 是 $x - a$ 的 __n-m__ 阶无穷小.

(5) k 是正整数时，α^k 是 $x - a$ 的 __k·n__ 阶无穷小.

注: $n=m$ 时. 确断定 $\alpha(x) \pm \beta(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小. 但可确定为 n 阶或高于 n 阶.

e.g. $\alpha(x) = -3x^2 + 5x^k$ $(k \geq 2)$

$\beta(x) = 3x^2$ 2阶

$\alpha(x) + \beta(x) = 5x^k$, k阶.

以上结论容易按定义证明。例如，已知 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{(x - a)^n} = A \neq 0$，$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{(x - a)^m} = B \neq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x)}{(x - a)^{n+m}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} \cdot \frac{g(x)}{(x - a)^m} = A \cdot B \neq 0 \Rightarrow f(x)g(x) \text{ 是 } x - a \text{ 的 } n + m \text{ 阶无穷小}.$$

【例 4】 设 $f(x)$ 连续，$x \to a$ 时 $f(x)$ 是 $x - a$ 的 n 阶无穷小，求证：$\int_a^x f(t)\,dt$ 是 $x - a$ 的 $n + 1$ 阶无穷小.

分析 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\int_a^x f(t)\,dt}{(x-a)^{n+1}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{洛}{=}} \lim \dfrac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \dfrac{1}{n+1} \lim \dfrac{f(x)}{(x-a)^n}$. ∃ ≠ 0.

【例 5】 $x \to 0$ 时，$\frac{x^3(x+1)}{1+x^2}$ 是 x 的 ___3___ 阶无穷小；$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$ 是 x 的 ___$\frac{1}{3}$___ 阶无穷小；$\frac{\sin^3 x}{\ln(1+x)}$ 是 x 的 ___2___ 阶无穷小，$\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t$ 是 x 的 ___3___ 阶无穷小.

$\sin^3 x$ -3阶

$\ln(1+x)$ 1阶

$\sin t^2$ 2阶

【例 6】 $x \to 0$ 时，下列无穷小中（　　）比其他三个的阶高，

(A) x^2 -2阶　　(B) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ 2阶　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　　(D) $x-\tan x$

$= (1-x^2)^{\frac{1}{2}}-1$

$\sim -\frac{1}{2}x^2$ -2阶.

$(1+t)^{\alpha}-1 \sim \alpha t,\ (t\to 0)$

A.B.C 均 2阶

∴只能选D

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^k} = \lim \frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{kx^{k-1}} = \lim \frac{1}{k}\cdot\frac{\cos^2 x-1}{x^{k-1}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} \overset{k=3}{=} -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ (D) 3阶

【例 7】 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 \mathrm{d}t$ 与 $g(x) = x^3 + x^4$ 比较是（　　）的无穷小.

(A) 等价　　(B) 同阶非等阶

(C) 高阶　　(D) 低阶

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2 \mathrm{d}t}{x^3+x^4 \sim x^3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{洛}{=}} \lim \frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2}$, $\sin(\sin^2 x) \sim \sin^2 x$.

§4　连续性及其判断

1. 连续性概念

(1) 连续的定义：

函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续；$f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$），则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处右（或左）连续.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续；若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在 $x = a$ 处右连续，在点 $x = b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) 单双侧连续性

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续 $\Leftrightarrow f(x)\ x = x_0$ 处既左连续,又右连续.

(3) 间断点的分类:

设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某一空心邻域内有定义,且 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

若 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的左、右极限 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0)$ 存在并相等,但不等于函数值 $f(x_0)$ 或 $f(x)$ 在 x_0 无定义,则称点 x_0 是可去间断点;若 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的左、右极限 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0)$ 存在但不等,则称点 x_0 是跳跃间断点:它们统称为第一类间断点. 连续函数的和差积商是连续函数 连续单调函数的反函数连续且有相同的单调性

若 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的左、右极限 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0)$ 至少有一个不存在,则称点 x_0 为第二类间断点.

2. 函数连续性与间断点类型的判断: A 连续性的运算法则 (四则运算、复合运算 反函数运算

B 初等函数在定义域区间连续 C 考察左右连续性(根据定义)或按定义考察连续性

若 $f(x)$ 为初等函数,则 $f(x)$ 在其定义域区间 D 上连续,即当开区间 $(a,b) \subset D$,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续;当闭区间 $[c,d] \subset D$,则 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上连续. 若 $f(x)$ 是非初等函数或不清楚它是否为初等函数,则用连续的定义和连续性运算法则(四则运算,反函数运算与复合运算)来判断. 当 $f(x)$ 为分段函数时,在其分界点处则需按定义或分别判断左、右连续性. 左右连续性

判断 $f(x)$ 的间断点的类型,就是求极限 $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$

1. 局部连续: 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, $f(x_0)>0$. (<0) $\Rightarrow \exists\ \delta>0$, 当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时 $f(x)>0$

3. 有界闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的性质: 2. 整体连续: 有界性; ∃最大小值; 中间值定理

最大值和最小值定理:设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则存在 ξ 和 $\eta \in [a,b]$,使得

$$f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant f(\eta), \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

有界性定理:设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则存在 $M > 0$,使得

$$|f(x)| \leqslant M, (a \leqslant x \leqslant b)$$

介值定理:设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a) \neq f(b)$,则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 c,在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得

$$f(\xi) = c$$

推论 1(零值定理): 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b) < 0$,则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得

$$f(\xi) = 0$$

推论 2:设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 m 和 M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最小值和最大值,若 $m < M$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为 $[m,M]$.

【例 1】 函数 $f(x) = \dfrac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1,0)$. (B) $(0,1)$. (C) $(1,2)$. (D) $(2,3)$.

【分析一】 这里 $\dfrac{x}{|x|}$ 有界. 只须考察 $g(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2}$, $g(x)$ 是初等函数,它在定义域 $(x \neq 1, x \neq 2)$ 上连续,有界闭区间上连续函数有界, $[-1,0] \subset$ 定义域, $g(x)$ 在 $[-1,0]$ 有界,选(A).

【分析二】 设 $h(x)$ 定义在 (a,b) 上,若 $\lim\limits_{x \to a+0} h(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to b-0} h(x) = \infty$,则 $h(x)$ 在 (a,b) 无界. 因

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 2} f(x) = \infty$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ 均无界. 选(A).

【例 2】 设$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1 \\ 1-x & x > 1 \end{cases}$，$g(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 2 \\ 2(x-1) & 2 < x \leqslant 5 \\ x+3 & 5 < x \end{cases}$

讨论$y = f(g(x))$的连续性，若有间断点并指出类型．

【分析与解法 1】 先求$f(g(x))$的表达式．

$$f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) & (g(x) \leqslant 1) \\ 1 - g(x) & (g(x) > 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad f(g(x)) = \begin{cases} x^2 & (x \leqslant 1) \\ 1-x & (1 < x \leqslant 2) \\ 1-2(x-1) & (2 < x \leqslant 5) \\ 1-(x+3) & (5 < x) \end{cases}$$

在$(-\infty,1),(1,2),(2,5),(5,+\infty)$，$f(g(x))$分别与初等函数相同，故连续．$x = 2$或5时可添加等号，左、右连接起来，即左连续又右连续$\Rightarrow f(g(x))$在$x = 2$或5连续．$x = 1$时

$$\lim_{x \to 1+0} f(g(x)) = \lim_{x \to 1+0}(1-x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(g(x)) = \lim_{x \to 1-0} x^2 = 1$$

$\Rightarrow x = 1$是$f(g(x))$的第一类间断点（跳跃间断点）．

【分析与解法 2】 不必求出$f(g(x))$的表达式．用连续性运算法则

$g(x)$的表达式中，$x = 2$或5处可添加等号，左、右连接起来$\Rightarrow g(x)$在$(-\infty,+\infty)$处处连续．

$f(u) = \begin{cases} u^2 & u \leqslant 1 \\ 1-u & u > 1 \end{cases}$，$u \neq 1$时连续．

$u = g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$

因此，$x \neq 1$时由连续函数的复合函数是连续的$\Rightarrow f(g(x))$连续．$x = 1$时

$$\lim_{x \to 1+0} f(g(x)) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0}(1-x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(g(x)) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} x^2 = 1$$

$\Rightarrow \quad x = 1$是$f(g(x))$的第一类断间断点．

评注. 请看下面的说法

x=1 时 g(x) 连续

相应的 g(1)=1, y=f(u) 在 u=1 不连续 ⇏ f(g(x)) 在 x=1 不连续

连续与连续的复合是连续的, 其它的都不确定

第二讲　一元函数微分学的概念、计算及简单应用

一、知识网络图

- 一元函数微分学的概念计算与简单应用
  - 导数，可微性与微分概念
    - 定义
    - 几何意义与物理意义
    - 相互联系　可微$\Leftrightarrow$可导 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 连续
    - 奇偶函数与周期函数的导数性质
  - 求导方法
    - 按定义求导
    - 基本导数表
    - 微分法则
      - 导数与微分的四则运算法则
      - 复合函数求导法与一阶微分形式不变性
      - 由复合函数求导法导出的微分法则
        - 幂指数函数（$f(x)^{g(x)}$）求导法
        - 反函数求导法
        - 隐函数求导法
        - 变限积分求导法
        - 参数式求导法（数三，数四不要求）
    - 分段函数求导法
    - 求 n 阶导数表达式的方法
  - 函数的可导性及导函数的连续性的判断
  - 简单应用
    - 平面曲线的切线与法线
    - 某些物理量的描述（只对数一，数二）
    - 经济应用——边际与弹性（只对数三，数四）

二、重点考核点

这部分的重点是

① 导数与微分的定义、几何意义，讨论函数的可导性及导函数的连续性，特别是分段函数，可导与连续的关系.

② 按定义或微分法则求各种类型函数的一、二阶导数或微分（包括：初等函数，幂指数函数，反函数，隐函数，变限积分函数，参数式，分段函数及带抽象函数记号的复合函数），求 n 阶导数表达式.

③ 求平面曲线的切线与法线,描述某些物理量的变化率.

④ 导数在经济领域的应用如“弹性”,“边际”等(只对数三,数四).

§1　一元函数微分学中的基本概念及其联系

1. 可导与可微的定义及其联系

$f(x)$ 在 x_0 可导:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A+o(1)\quad(\Delta x\to 0),o(1)\text{ 即无穷小量}$$

$A=f'(x_0)$

$$\Updownarrow$$

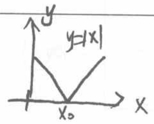
$f(x)$ 在 x_0 可微:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 的微分 $\mathrm{d}f(x)\Big|_{x=x_0}=A\Delta x=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x$

$$\Downarrow$$

$\boxed{f(x)\text{ 在 }x=x_0\text{ 连续}}$

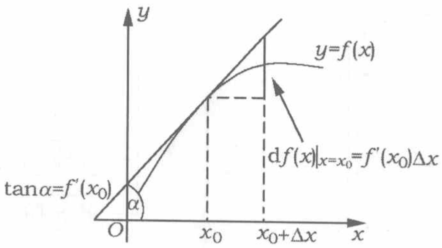
eg 

在 x_0 连续不可导

2. 几何意义与力学意义

$f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率.

$\mathrm{d}f(x)\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$ 是相应于 Δx 该切线上纵坐标的增量.



质点作直线运动,t 时刻质点的坐标为 $x=x(t)$,$x'(t_0)$ 是 $t=t_0$ 时刻的速度.

3. 单侧导数与双侧导数

$f'_+(x_0)$、$f'_-(x_0)$ 均 ∃ ⇒ $f(x)$ 在 x_0 连续

⇓ ∴ 右连续　⇓ 左连续

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导 $\Leftrightarrow f'_+(x_0),f'_-(x_0)$ 均存在且相等.

此时　　$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\quad f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

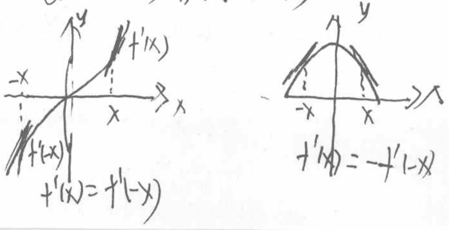
【例 1】　说明下列事实的几何意义

(1) $f(x_0)=g(x_0),f'(x_0)=g'(x_0)$.

曲线 $y=f(x)$,$y=g(x)$ 在公共点 $M_0(x_0,f(x_0))=(x_0,g(x_0))$ 处相切(相同的切线)

1.4. 奇偶函数与周期函数的导数

1° 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 可导为奇(偶) ⇒ $f'(x)$ 在 $(-a,a)$ 为偶(奇)



2° 设 $f(x)$ 在 x 上可导以 T 为周期 $\Rightarrow f'(x)$ 也以 T 为周期

(2) $f(x)$, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处有连续二阶导数, $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0) \neq 0$. 二阶导数刻画凹凸性

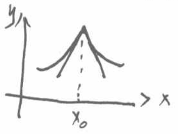
曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 在公共点 M_0 有相同的凹凸性. (由 $f''(x)$, $g''(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, 相等且 $\neq 0$,

$\Rightarrow \exists \delta>0$. 当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时 $f''(x)$, $g''(x)$ 都大于0或都小于0 $\Rightarrow$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 有相同的凹凸性.

曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 在 M_0 有相同的曲率. $k = \dfrac{|f''(x_0)|}{(1+f'^2(x_0))^{3/2}}$

(3) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在 $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$, 但 $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$.

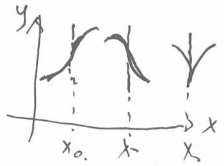
曲线 $y=f(x)$ 在 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处 $\exists$ 左右切线且有一个夹角. 曲线在这一点是尖点



(4) $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续且 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$.

曲线在 M_0 点 $(x_0, f(x_0))$ 有垂直于 x 轴的切线

(不可导也可以有切线.)



【例 2】 $f(x) = \begin{cases} g(x) & x_0 - \delta < x \leq x_0 \\ h(x) & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$, $\delta > 0$ 为某常数. 设 $g(x_0) = h(x_0)$, $g'_-(x_0)$, $h'_+(x_0)$ 均存在且 $g'_-(x_0) = h'_+(x_0)$.

求证: $f'(x_0)$ 存在且 $f'(x_0) = g'_-(x_0) = h'_+(x_0)$.

分析: $f(x)=g(x)$ $(x_0-\delta<x\leq x_0) \Rightarrow f'_-(x_0)=g'_-(x_0)$

$f(x)=h(x)$ $(x_0<x<x_0+\delta)$

$\Rightarrow f'_+(x_0)=h'_+(x_0)$

$\Rightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0)\exists$

【例 3】 请回答下列问题：

(1) 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，相应于 Δx 有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),\quad dy=f'(x_0)\Delta x$$

$\Delta x\to 0$ 时它们均是无穷小．试比较下列无穷小：

Δy 是 Δx 的 高阶 $f'(x_0)=0$ / 同阶 $f'(x_0)\neq 0$ 无穷小；

$\Delta y-dy$ 是 Δx 的 高阶 无穷小； $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{dy}+o(\Delta x)$

$f'(x_0)\neq 0$ 时 Δy 与 dy 是 同阶 无穷小．

(2) du 与 Δu 是否相等？ $\lim\frac{\Delta y}{dy}=\lim\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{f'(x_0)}{f'(x_0)}=1$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$

当 u 为自变量，$du=\Delta u$.

当 u 为另一变量的可微函数 $u=\varphi(x)$

一般说来 $du\neq\Delta u$.

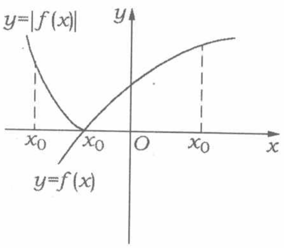
($\varphi(x)$ 在 (a,b) 可微，在 (a,b) 内 $du=\Delta u$

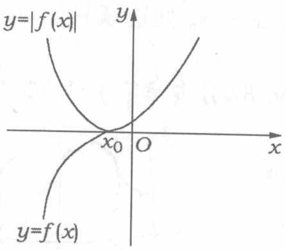
$\Leftrightarrow \varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)(x-x_0)\ \forall x\in(a,b)$

即 $\varphi(x)=ax+b$.)

【例 4】 设 $f(x)$ 连续，试讨论 $f'(x_0)$ 的存在性与 $|f(x)|'\big|_{x=x_0}$ 的存在性之间的关系．

(1) 考察下列两个函数图形，由导数的几何意义来分析 $f'(x_0)$ 存在与 $|f(x)|'\big|_{x=x_0}$ 存在之间的关系．





(2) $f(x_0)\neq 0$ 时，求证：$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow |f(x)|'\big|_{x=x_0}$ 存在．

【证明】 因 $f(x_0)\neq 0$，由连续性，$\Rightarrow \exists\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$，于是在 x_0 该邻域内必有 $|f(x)|=f(x)$ 或 $|f(x)|=-f(x)$ 之一成立，故在点 $x=x_0$ 处两个函数的可导性是等价的．

(3) $f(x_0)=0$ 时，求证：$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow |f(x)|'\big|_{x=x_0}$ 存在．

【证明】 设 $f(x_0)=0$.

$$|f(x)|'\Big|_{x=x_0}\text{ 存在}\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|f(x_0+\Delta x)|-|f(x_0)|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|f(x_0+\Delta x)|-|f(x_0)|}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|f(x_0+\Delta x)|}{\Delta x}(\geqslant 0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|f(x_0+\Delta x)|}{\Delta x}(\leqslant 0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|f(x_0+\Delta x)|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|f(x_0+\Delta x)|}{\Delta x}=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=0\Leftrightarrow f'(x_0)=0.$$