常微分方程讲义

刘志汉 主编

陕西师范大学数学系

编 者 说 明

很早以前就希望有一本适合师范院校的常微分方程教材。过去使用过综合性大学教材，内容多、篇幅大，在规定的课时内讲不完，只好删删减减，为了解决这个矛盾，我们按教学大纲编写了讲义。并根据过去的教学实践，对教材中某些部分作了适当的处理，使学生易于接受。下面就编写过程中的想法作几点说明。

一、常微分方程是师范院校数学系一门基础课，规定在72学时讲完。因此，在教材中应当重点讲授其中最基本的内容。除此之外，还要根据科技发展的需要，使学生注意本学科的发展方向，为进一步学习这门学科做些准备。根据大纲的要求在教材中增加了有关定性理论和稳定性理论中的一些基本概念。另外还引入了向量、矩阵等有关的概念，并多次采用对比的方法，使用和熟悉其符号及意义，这对继续本学科的学习也是必不可少的。

二、为了使学生对常微分方程的内容有一个清晰的轮廓，内容基本上是按学生习惯的认识规律编排的。即由一阶方程到高阶方程，再到微分方程组，然后在第五章中看到它们之间的相互转化，从而将各种方程联系起来。这样编排还能使讲授的内容集中，教学效果会比较好些。

三、在编写过程中考虑到由浅入深、由具体到一般的原则，我们从教学观点出发，采用讲解的方式努力做到容易理解，便于自学。例如，为了更好地理解定性理论的概念，我

们在第二章强调了方程的几何解释，介绍了图象解法，这就对定性理论有一个初步的感性认识。例如，n阶常系数齐次线性方程组基本解组的结构，用到许多线性代数知识，历来都是教学中的一个难点，在编写中我们从具体分析三阶方程组入手，得到基本解组的结构。从而，n阶方程组化成约当型后，基本解组的结构就比较清楚了。

四、在加强基础理论的同时，也注意基本运算技能的培养和训练。在教材中配有适量的例题，每节后都配有习题，这些习题都是围绕巩固基本理论，基本方法而设置的，也有个别是引导学生思考的。书后附有习题答案，以供读者练习时参考。

五、教材中所安排的内容，基本上符合教学计划所规定的学时要求。我们认为在师范院校的基本教材中，不宜写入超过学时过多的内容。如果学时有余，任课教师就有自选补充教材或介绍自己的专长的余地。如果学生有余力，可以参考综合性大学的教材，这样既保证了教学大纲的要求，又发挥任课教师的特长。

六、各章内容简单介绍如下：第一章介绍了微分方程的背景和一般概念。第二、三、四章介绍各种方程的基本解法和基本理论。第五章证明存在定理，并叙述解的其他性质和各种方程的存在定理。第六章介绍有关定性理论和稳定性理论中的基本概念，第五、六章的内容可以适当增减。

七、在教材中介绍了科技工作者常用的拉普拉斯变换法求初值解，将拉氏变换表作为附录Ⅰ备查。又考虑到与其他课程的联系和配合，将一阶偏微分方程作为附录Ⅱ。

本讲义是由微分方程组刘志汉同志主编的。全坚同志编

选了本讲义的全部习题和解题工作，并编写了附录Ⅱ。艾克仁陈菊芳同志一直参加初稿的讨论、修改和试用工作。初稿虽经多次讨论和修改，由于水平所限，也由于我们教学实践中总结的经验不全面，所以对教材的内容和处理方法一定还存在不少缺点和错误，诚恳地希望同志们批评指正。

本教材在编写和修改过程中，得到了北京师范大学、北京师院、南京师院、湖南师院、甘肃师大、青海师院、西安师专等兄弟院校有关老师们的鼓励和帮助，并给教材提出了许多宝贵意见，特此表示感谢。

编　者

一九八一年四月

My teacher

目　　录

第　一　章

微分方程实例和基本概念

这一章主要介绍几个微分方程的实例，通过这些例题可以看到从各方面都提出了微分方程问题。因此，研究微分方程是非常必要的。然后通过例题介绍微分方程的一些基本概念。

§1.1　微分方程实例

在几何学中的问题

例1　求曲线，使它在每点处的切线斜率都等于该点的横坐标的二倍，并求出过点（1，1）的那一条曲线。

解　要求的是曲线，曲线方程是个未知函数，设 $y=y(x)$表示所求的曲线方程。

由数学分析可知，在每点处的切线斜率就是在该点的导数$\frac{dy}{dx}$，由题意有以下的关系式：

在每点处切线的斜率＝已知函数$2x$，

即

$$\frac{dy}{dx}=2x \qquad (1)$$

满足（1）的函数$y(x)$就是我们所求的曲线方程。

用积分的方法，对（1）两边积分得

$$y=x^2+c$$

其中c是任意常数。

可知满足要求的曲线是抛物线，当c任意取值，就可得到一个抛物线族。

在这一族抛物线中，我们还要选出过点（1.1）的那一条曲线来。（见图1，1）

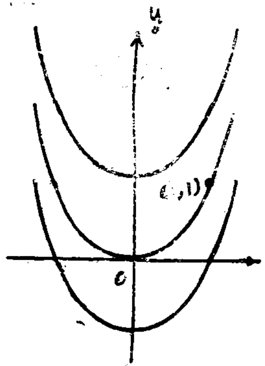

图 1.1

实际上就是用“过点（1，1）”这个条件，确定任意常数c，将点（1，1）代入$y=x^2+c$中得

$$1=1^2+c,\ c=0$$

故我们所求的过点（1，1）的那条曲线为

$$y=x^2$$

这个例题是求一个未知函数，由给出的要求，建立方程（1），从（1）中可以看出是一个关于未知函数和未知函数的导数的一个关系式。这就是我们所说的微分方程，由于解出（1）的未知函数，使所求的问题得到解决。

在动力学中的问题：

例2 一质量为m的物体，在空中由静止自由下落，设空气阻力与运动速度成正比，试求物体运动速度的变化规律。

解 所求的物体运动速度变化规律，是时间t的未知函数，我们用$v=v(t)$表示。

物体下落时，受到重力和阻力的影响，

重力为mg，与运动方向一致，

阻力为kv，k是比例系数，与运动方向相反。

运动所受的净力为

$$F = mg - kv$$

按照牛顿第二定律，即

$$F = ma$$

a是加速度，得到关系式为

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

或

$$m\frac{dv}{dt} + kv = mg \tag{2}$$

满足（2）的函数$v(t)$，就是所求的速度变化规律。

还要注意，这个变化规律还要满足一个特定条件，即“物体由静止自由下落”的，当运动开始时，速度是零，即

当$t = 0$时，$v = 0$

要求满足这个条件的一个确定的变化规律，最后得到的应当是一个确定函数$v(t)$。

在（2）中看到是未知函数及其导数，按照物理中的规律建立起来的关系式，它是一个微分方程，这个问题仍是求满足微分方程的未知函数。

在电学中的问题

例 3　$R—L$电路

在闭合电路中，电阻R，电感L是串联的，（见图1—2）R、L是常数，电源供给电动势$E = E(t)$，电路中的电

流$i=i(t)$，t是时间，试求电流的变化规律。

解 所求的电流变化规律，就是未知函数$i=i(t)$

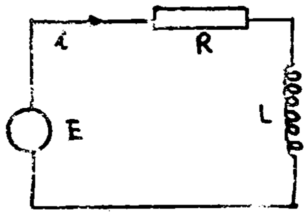

图 1—2

由电学中知道线圈的感应电动势为$-L\frac{di}{dt}$，故在电路中总电动势为

$$E-L\frac{di}{dt}$$

又电流通过电阻时产生的电压降为iR

这时我们由电学中的规律知道：

电路中的总电动势等于整个电路中的电压降。

由此可得

$$E-L\frac{di}{dt}=Ri$$

或

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E \qquad (3)$$

满足（3）的函数$i(t)$就是所求的电流变化规律，

我们所求的电流变化规律，是一个特定的规律，它要满足以下条件：

当$t=0$时，$i(0)=i_0$（i_0是一个常数）.

在解决电学问题中仍用到微分方程这个数学工具。

在这里我们指出一个重要现象，在例 2 中解决动力学中的问题得到微分方程为（2）式

$$m\frac{dv}{dt}+kv=mg \qquad (2)$$

在例3中解决电学中的问题得到微分方程为（3）式

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E \qquad (3)$$

（2）、（3）两式中只是用的字母不同，所代表的物理意义不同，但从微分方程的形式看是完全相同的，也就是说，讨论不同的物理现象，可以得到相同的微分方程，反过来，研究一种类型的微分方程可以解决多方面具有同样规律的问题．所以，在微分方程中抽象地讨论某种类型的微分方程是非常必要的，也只有这样，才能更好的解决实际问题，在后面讲到各种类型微分方程的解法时，会更多的看到这种现象。

在化学中的问题 已

例4 混合溶液问题：在一容器中(见图1—3)~~容器内~~含有盐的溶液，又以流速为v_1流入浓度为c_1的盐溶液，经过搅拌后，成均匀的混合溶液，其浓度为c_2，又以v_2的流速流出，设开始时含盐量为x_0，求经过t时后在容器中的含盐量。

解 所求的含盐量是时间t的未知函数，用$x=x(t)$表示。

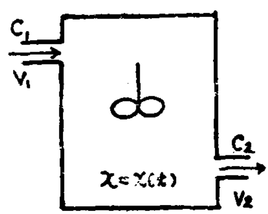

图1—3

在Δt时间内有以下的关系：

流入的盐量为$c_1v_1\Delta t$，

流出的盐量为$c_2v_2\Delta t$，

容器中的盐的增量Δx为$x(t+\Delta t)-x(t)$

这里按照化学中的物质守恒定律，即

入量－出量＝增量

由此得

$$\Delta x = c_1 v_1 \Delta t - c_2 v_2 \Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c_1 v_1 - c_2 v_2$$

当$\Delta t \to 0$时，则得到时间t的变化规律为

$$\frac{dx}{dt} = c_1 v_1 - c_2 v_2 \tag{4}$$

我们所求的变化规律还要满足下列条件：

当$t = 0$时，　$x(0) = x_0$

这个化学问题也要用微分方程解决。

在各种增长和衰减中的问题

例5　例如某国人口在30年内增长一倍，设人口增长率与人口的数量成正比，问多少年后人口为原人口的三倍。

解　人口的数量是时间t的未知函数，我们用$y = y(t)$表示，用y_0表示原人口数量，从题意知人口增长率与人口数量成正比，由此得

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{5}$$

k是比例系数。

我们所求的人口数量是满足下条件的：

当$t = 0$时，$y(0) = y_0$，

当$t = 30$时，$y(30) = 2y_0$。

例如镭的衰减等等，这类增长和衰减的问题中，仍是用微分方程解决，可以看到它们也是用同一类型的方程解决。

再看动力学中的一个问题

例6　假若在例2的同样条件下，要求物体的运动变化

规律。

解 物体运动的变化规律是位移与时间的关系，用 $s=s(t)$ 表示。

物体运动仍是受到重力和阻力的影响。

重力为mg；

阻力为$-kv=-k\frac{ds}{dt}$；

由牛顿第二定律有

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\frac{ds}{dt}$$

或

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+k\frac{ds}{dt}=mg \qquad (6)$$

我们所求的运动规律还要满足下条件：

当$t=0$时，$s(0)=0$，$s'(0)=0$

在（6）中，我们看到不但出现未知函数的一阶导数，也出现了未知函数的二阶导数，这又是一种不同类型的微分方程

通过以上的例题，我们看到微分方程的一些背景。当然，我们还可以举出大量的实例，如在物理、化学、天文、生物、电子技术、自动控制、宇宙飞行等等，都存在着大量的微分方程问题。因此，社会生产实践是微分方程取之不尽的基本泉源。微分方程是解决这类问题的一个非常有力的数学工具，这也是微分方程理论联系实际的一个重要方面。

通过上面的例题，我们还可以看到，要想解决实际问题，都要根据所讨论问题本身的规律来进行。如牛顿第二定律，化学中的某些原理等等，然后得到一个微分方程，想要

建立微分方程就要熟悉自然科学和工程技术方面的专业知识。

通过上面的例题还可以看到，不同的物理现象可以得到同样类型的微分方程，这个微分方程叫做实际问题的数学模型，实际问题是千千万万的，我们不能一个一个地去研究，我们可将它们的微分方程归类，然后对某种类型的微分方程进行研究，从而解决一大批同类性质的实际问题。

通过上面例题，我们还以看到，建立数学模型不是一个简单的事情，这是对实际问题的一个“去粗取精”的过程，要抓着主要因素，忽略次要因素，这样所得到的微分方方程才可能与讨论的实际问题比较接近，一个数学模型的建立是否成功，还要通过实践来检验。例如在例5中就是比较粗糙的，虽然考虑到了主要因素，但还不够，还有一些因素也应当考虑进去．在人口问题中，如死亡率，自然灾害等都直接影响人口数量。因此，要做更细致的工作，建立更好的数学模型，同时，由于数学模型的不断改进，也推动了微分方程本身的发展。

但微分方程是数学的一个重要分支，我们还应当对微分方程本身的基本理论和解微分方程方法有所了解。只有掌握它，才能更好地使用它，作为一门基础课我们应当把重点放到微分方程本身的问题上，即弄清常微分方程的一些基本理论和掌握各种类型方程的求解方法。这也就是我们解决实际问题的必要工具。

§1·2基本概念

1·2·1 微分方程的定义

1、什么叫做微分方程?

凡含有自变量、未知函数和未知函数的导数的方程，叫做**微分方程**。

这是一个一般的定义，我们还要再分类，先看一些微分方程的例子，前面六个例题中，都是微分方程，再看几个：

$$y'' + by' + cy = f(t) \tag{7}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = \sin x \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\frac{\partial u}{\partial t} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{11}$$

看到在（1）～（8）中，都是一个自变量的未知函数，和未知函数的导数．而（9）、（10）、（11）中是含有三个或两个自变量的未知函数，所出现的都是偏导数．因此，我们还要进一步分类。

2、什么叫常微分方程?

如果在微分方程中，未知函数是一个自变量的函数，这种微分方程叫做**常微分方程**。

如果未知函数是两个以上自变量的函数，这种方程叫做**偏微分方程**。

从这些例题中还看到，在一个微分方程中不一定明显地出现自变量和未知函数，但一定要出现未知函数的导数。

本课程主要讲常微分方程，以下简称“方程”。