

内部材料

继续教育数学高级教师研修班
《数学教育研究》文献选

(二)

编译 王长沛

北京教育学院
数学系

目 录

1、结构与顿悟(节选)	Van. 赫尔
—— 一种数学教育的理论	P 1
2、对问题的态度	S. 克莱因
	P 2 1
3、学生概念发展水平研究	王长沛编译
	P 6 9
4、改革数学教学的一项实验研究	顾冷源等
	P 1 0 7
5、根据中学生心理特点进行数学教学	马明
	P 1 4 5
6、《论文目录》选	
	P 1 6 6
7、数学教学法文献分类与文摘卡片(选)	
	P 1 7 8

结构与顿悟 (摘译)

一种数学教育理论

Pierre M. Van Hiele 著

王长沛 (译)

译者的话:

Van 赫尔 以其“几何思维发展的水平”而闻名于全世界数学教育界。全美数学教师协会称赫尔的工作是“几何学习与教学心理学方面的突破”。国内有关数学教材教法论著恐怕也很少有不提到赫尔的“水平”理论的。那末, 赫尔的思想的本来面目是怎样的呢? “吃别人嚼过的馍没有味道”。我认为, 最好还是读一读赫尔本人的文章。为此, 我于匆忙中翻译了赫尔的若干文章。它们都取自《结构与顿悟》这本书。由于篇幅、精力的限制, 我不可能全部译出。请谅。但希望老师们从中能各自悟出各自的道理。我完全赞同赫尔的这一般话: “如果这本书使读者增强了批判意识, 那么他的目的也就达到了。”也许, 这也正是我们整个研讨班最终所要达到的目的。——译者

引言: 我理论的根

我从小就喜欢教学。在学校里, 我爱帮助那些学习上有困难的同班同学, 甚至是低年级的同学。他们似乎什么也不懂, 这使我对产生这种现象的原因感到十分困惑, 很想弄清楚。我不认为教师没有责任。记得, 我父亲有时给我老师写信, 指出(我父亲认为)他们所犯的错误。我记得, 我不喜欢父亲给老师写这种信。因为每个人, 甚至父亲自己, 还有我自己都常常犯错误。

我还有一个印象，当时的代数课本写得不好。在书的开头，一下子介绍了许多运算。我们很难马上理解为什么 $3a + 5a = 8a$ 而 $3a \times 5a = 15a$ 却不对了。你还得小心，不要把 $a' \times a'$ 写成 a'' 。就这样，甚至当我还是初中学生的时候，就想写一本新的代数课本，把所有这些困难分散开。许多年后，我终于写出了这样的代数教科书。

我在学几何时遇到了很大的困难。虽然我的考试成绩很好，但是并不懂得公理和定义有什么用处。过一般时间以后，我明白些了，但是又遇到了新的困难：我的理解看来又是错误的。我的老师告诉我们“在几何上，每一个新东西都应当通过公理和定义来确立”。书上提到“把三角形拿起来”，“再放下”及“另一面”等等，但在书上的公理和定义中，却找不到“拿起来”，“放下”及“另一面”等。现在知道，如果我问老师，他会告诉我：这里省去了许多严格的叙述过程，但在当时，整个课堂环境使我没有勇气提出那样的问题。

又过了几年，我开始学立体几何。这时，老师告诉我们，在学平面几何的时候，他有意略去了许多严格的叙述与论证，而在立体几何的教学中，他要补上这些疏漏。不久，他就向我们证明，若两平面有一个公共点，则它们至少有一公共直线。在证明中讲道：一平面得空间分为两部分。但是前面的公理又根本没有提到空间被平面分成两部分，所以我不懂这个证明。从这儿，你也会明白，为什么以后我对公理化方法很感兴趣。由于学习了 Pasch 公理系统，我的问题被解决了。

当我成为一名教师后，我决心要做一个好教师。代数教学问题

不大，我只须对运算进行分析，然后依次呈现给学生。教学效果有了显著的改进。我现在知道，我还能做得更好，那要依靠我所提出的思维水平的理论。但是，我的几何教学却并不成功。那时的几何课本编写的目的是要把几何建立在纯粹的公理系统之上。虽然课本做了许多简化，但对学生来讲仍太困难了。太多数学生根本没有学懂。我花了许多时间给学生补课，想让学生弄懂教科书，所以我对学生在学习上所遇到的困难十分了解。

现在我们都很清楚，从一组完备的公理集合开始，并不能改进几何的结果。那时，还产生了一种新的思想，从非常初等的水平的课程开始几何的引入。这是一个很好的想法，因为这种引入方式可以建立起现实世界和几何之间的联系。在儿童们充分熟悉空间之后，他们会懂得把所了解，所熟悉的各种性质组织起来的必要性。然后，我们才能开始真正的几何学习。其结果当然要好些，但仍然还有许多问题。儿童不真正理解公理和定义的实质。他们确实尽了自己最大的努力，但是仍然不真懂。但是过了很长一般时间，他们真正领悟了，常常对我这样说：“现在我懂了，但是以前你为什么用那样令人难懂的话有给我讲课呢？”我立刻认识到，并不是什么语言困难，而是学生自己长大了，是他们自己变了。这似乎是一种使人沮丧的事实，老师帮不了学生什么忙，是学生们自己找到了道路。但话又讲回来，如果没有老师，孩子们也不会发现这条成功之路。

从1938到1951，我一直在蒙特梭利中学教书。一方面，非常幸运的是，我们可以自己选择教科书。甚至于，我们还能自己编写教材。如果教师教学出了错误，对学生也不会有太大影响。原

因是，在这所学校里，师生之间接触和交流如此频繁，所以总有机会纠正他们的错误。而另一方面，在这所学校工作又十分困难，因为它要求老师花许多时间在课外帮助学生。备课、备教材等也要占去大量时间。

我在蒙特梭利学校任教期间，还写过一篇关于教学法方面的论文。我认为，许多学生被低估了。我还见过，一些学生虽然并不大努力，但却学得很好。所以我想，最好能跟踪观察一些学生，把这几年观察到的和在数学方面的表现与进步有关的各方面的现象记录下来、报告给同行。我现在仍然认为，这样的调查研究一定很有意义。但是，做这种工作会有巨大的困难。你教某个学生一年，第二年也许就不再教他了。

蒙特梭利学校为那些有志于教学，真正想了解儿童思维的教师创造了一个十分好的环境。学生们常常告诉老师他们在学习遇到的各种困难。这些暴露出来的困难常常是令人吃惊的。开始，你会发现，学生们的理解比你原先所期望的要差的很远，即使他们的分数也许很高。而最后呢？学生的学习结果却又远远超乎我的预料。从这点出发，你会觉得很难预言学生在学习的结果。

我还和许多教师有着密切的联系。我们还常常参加由H·弗罗登塔尔及T·埃伦弗斯特—阿法拉斯杰瓦所指导的研讨班。有一次，在讨论班上，人们介绍了由波司和列波依特所编的新教科书。按照A·D·de Groot的观点，这本教科书是塞尔茨（Selz）的心理学思想的产物。该书是立足于问题解决的几何书。例如，如果要想证明两角相等，这本书告诉你去找两条相互平行的直线，等腰三角

形，等腰梯形，平行四边形，如此等等。对每一类初等几何的常规问题情景，都有一种特别的“配方”。我不喜欢这本书。我们中间大部分人都认为，问题只是手段，途径，而不是终点。如果问题是一种手段，是显示一个人是否理解某一结构的手段，那么我们为什么不直接地、分别一个一个地学习这些结构的各个元素呢？当然，如果问题解决本身就是目的或终点，那么对学生进行问题解决的训练就有重要的意义。但是，如果只把问题解决当作是证明学习过程进展顺利的一种手段，那末一旦训练结束，它所能向你提供的信息就很少。

我认为值得对塞尔茨的理论做一番研究。在《精神产生及再产生活活动》(Selz, 1924)这本书中，我找到了答案。按照塞尔茨的观点，思维是由连续不断的问题解决所确定的。而为了求解，回忆你已经知道的事实就是很必要的。而为了回忆这些事实，你还需要某种策略，而知道的策略越多，你的思维也就越有成效。

当然学习许多解题方法会有助于你的几何问题求解。但是在我们想要改进几何解题能力之前，首先应当想想为什么要学习解决几何问题。而为了回答这一问题之前，首先又要回答“为什么要教几何？”这样一个问题——即教几何的目的究竟是什么？并且还要问：从几何问题的解决是否可以迁移到一般的问题解决。

为了回答第一个问题。我问了许多对几何感兴趣的人，例如弗罗登塔尔和埃伦弗斯特——阿法拉斯杰瓦。你们可以在第23章找到。这一调查研究的结果。对于第二个问题的答案，我是在墨塞尔(Murcell)的书《中学教学心理学》中找到的。(1939)墨

塞尔在他的书中讨论了“训练的迁移”。他还给了一些例子以说明，在某一领域某些能力的学习，一般地说，并不意味着这种能力也能在其它领域里获得。所以，会解决许多几何问题的能力并不意味着有能力解其他问题。

我们也许还会问：为什么教师那么喜欢几何的问题解决？为什么许多心理学家也如此欣赏几何问题的求解呢？对第一个问题的回答是很复杂的。几何问题通常都有很长的历史。许多几何中的理论问题植根于古代的一些重要的技术问题，而这些问题早已被解决了。进而言之，许多人喜欢解谜。把解智力问题当作为一种快乐。他们还愿把这类趣题给其他人做，以分享这种乐趣。所以，一些几何老师喜欢解几何题，往往是因为他们自己会解几何题。应当承认，几何问题也确实有着一定的教育功能。这将在第2.7章讨论。

心理学家们所进行的一些实验也支持了他们对问题解决的积极态度与乐观看法。塞尔茨理论的主要部分正是建立在问题解决的结果的基础上的。给实验被试者一个概念，譬如说“树”，然后要他们回答这个概念的一部分，例如“枝”，在被试者给出答案之后，还必须解释他们是怎样获得这一答案的。被试者为获得答案而采用的策略被记录下来。而那些有困难的被试者则需接受训练，学习其它各种策略。塞尔茨在他的另外一本书《为了提高智力水平》(1935)中，描述了上述方法，并且证明了所取得的成功。但是，他的例子是一数的连续为列——没有什么教育价值。经过一段时间以后，很多塞尔茨的被试者们很多都能颇有根据地连续地继续数的序列。但是，这种能力又有什么用呢？真正的学习在于关于结构的控制。塞

尔茨的问题的结论很难说有什么意义。我也理解，塞尔茨的工作所受到的客观条件的限制，他很难有其他的选项。因此我并不争辩他的结论。但是，我以为一些塞尔茨的追随者错误地认为，他的实验结果也完全可以用来指导相应的学科教学。学习一些毫无意义的词汇，对于学习过程的研究来讲，也许是很重要的。但是，对于教学来讲，学习这些无意义的东西只是浪费时间。

1951年，我成为非蒙特梭利型学校的一名教师，很快就陷入为使學生获得真正理解的一场斗争。因为，我已深知，学习一堆事实并非是教学的目的。我深信，真正理解的发展才是教学的目的。但是学校的方法是完全与此相反的。这种教学思想的实质是：教师最好是教给学生事实与方法，即使他们并不理解。由于这一冲突，在·兰吉维尔德和弗罗登塔尔的指导下，我开始写了一篇关于理解的论文。兰吉维尔德把我带入格式塔心理学的领域。从那里我学到理解与顿悟可以被看作是对某一结构知觉的结果。起初我认为，这仅仅是转移困难，它把问题转化为：什么是结构？后来我才开始理解。“格式塔心理学，又译作“完形心理学”。（知觉——请查有关文献）结构就是结构之所为”，这是一个非常重要的口号。首先你应当理解结构起着什么作用？它是如何运转的？然后你才理解什么是结构。在我写的这本书中，我正是要把这一思想付诸实践。

在本书我所发展的关于结构的思想大都来自格式塔理论。但是，我也同意塞尔茨对格式塔的批评。韦特海默和克勒，作为格式塔心理学的两位主要领袖，试图运用心理学的规律来解释人类的思维活动。但我以为这是毫无成效的。如果我们想要解释人类的思维，就

必然要涉及到诸如“愿望”、“意见”之类的概念，但是到现在为止，把这类研究与心理学相联系还很少。即使有，研究的水平也很有限。但是，当我们要把心理学应用于教学法，对上述问题就毫无关注的必要。如果你要使用电视机，你没有必要去弄懂它是怎样构造而成的。如果你想在教学中应用结构，你也不必知道人的大脑是如何形成结构的。结构是一般规律，只要知道这些一般规律就足够了。皮亚杰的著作《结构主义》（1968）促使我动手写关于结构的文章。

1954年，我读了科恩林的著作《自然科学，特别是化学，教学法中的一些问题》（1948）。该书援引了皮亚杰在1927年所写的一篇论文，其中谈到水平问题。正是这篇文章启发我以后关于建立思维水平的理论。在读了皮亚杰的初期的论文之后，我起初并不同意他，特别是反对他在《数的发展》（1941）的论点（1941）。我认为，作者关于由一个水平发展到下一个水平的转变的描述是生物发展的方式，而不符合于学习过程。我知道，这些研究许多并不出自皮亚杰本人，而是由他的许多追随者所完成的。不管怎么样，我的工作的许多最重要的部分正是来源于皮亚杰的理论。当然，我也很有必要对我和皮亚杰之间的不同加以强调：

1. 皮亚杰的心理学是发展的，而不是关于学习的。所以他没有任何讨论如何促进学生由一个水平发展到下一个水平。这恰好是我的工作。

2. 皮亚杰只划分了两个水平。在几何上，看来需要划分成更多的水平。如果皮亚杰把发展水平划分为更多的层次，也许更容易

为人们所理解。

3、在由一个水平发展到另一水平的转交中，皮亚杰没有认识到语言所起的重要作用。他只是偶尔发现，儿童没有听懂、理解他的问题。他总是认为，儿童们真正理解了他的问题，你们可以从儿童们的活动中发现这一点。虽然活动也许是能充分说明问题的，但你仍然不能由此认识到他们思维活动所处的水平。

4、按照皮亚杰的观点，人类的精神发展是按照某种理论概念的方向。他没有认识到，这种理论概念只是人们自己的构造物。而随着时间的推移，这些概念可能改变。所以在某些理论中关于发展的结论也应当看作是一个学习过程，之受到那个时代人类本身发展的限制。

5、皮亚杰并没有把高水平的结构看作为在低水平结构下学习的结果。在我的理论中，如果指导低水平结构的那些规则达到了明确化，并被学习者主动地加以学习，那么它本身就成为了一种新的结构，而在此基础上，学习者也就升华到了较高的水平。在皮亚杰的理论中，较高的结构是基本的，是儿童生与俱来的，儿童要做事情只是必须自觉意识，了解这种结构。

6、在我的理论中，结构是一种被赋予的事物，它服从于某种规律（这是从格式塔心理学那里借用来的）。如果，这一结构是很强大的，就可以把某种数学结构赋予这种结构之上，而在皮亚杰的理论中，数学结构永远确定着整个结构。

所以，你可以看出，在皮亚杰和我之间存在着许多不同。但最重要的还是，是皮亚杰第一次把水平引入了研究领域，在较低水平

的被实验的人不理解在较高水平的人。其次，在另一方面，皮亚杰也把自己与别的心理学家加以区分。由皮亚杰所提出的学习材料具有十分完整的结构，而其他一些心理学家只是注意一些个别的要素，无意义的词组，一些并列的概念，数的序列等等。很清楚，在和皮亚杰持有异议的同时，我从他那里学到了许多东西。

在我进行研究的过程中，我还接触了冯·帕瑞林的一系列工作，特别是读了他的著作《在学习过程中的注意和自律》（1951）。这本书反对那种观点：学习必需总是伴随着注意。冯·帕瑞林的实验证明，仅仅只是“学习做”也可能是一种很充分的学习活动。这一思想对我的理论也有很大影响，它促使我去注意那种不需要思维的视觉结构，及根据结构无须进行推理便可得到结论等重要事实。

在我这二十多年的研究中，我从H·J·De 米兰达那里得到了许多支持。在了解了我的理论之后，他成了热情的支持者。在理论具体的构造中，他做出了许多重要的贡献。在本书中，我力图提到他在各处所做的贡献，但是我知道有时也会无意地忘记了。

第一章

最初所提的问题

为了研究人类思维的本质，你会遇到各种不同类型的问题，而这些问题之间的联系也许会超出你的想像。下面是我所列的一部分问题：例如：

1、在格式塔心理学中，有下面这样的论断：“顿悟是因有知觉的结构化才产生的”。你是否认为，这只是把“顿悟”这样一个

困难的概念转换成为另一个新的、模糊的概念“结构化”？或者，你认为从新的“结构”这一概念出发，我们就问题的研究可以前进一步，继续下去？

2、数学在许多科学领域得到广泛的应用，它可以把科学问题的解决建立在数的基础之上。这是否证明，数学构成了这些学科的基础？或者数学仅只是构建模型的一种工具而已？就像20世纪以前那个时代的化学的原子理论起的作用那样。

3、有许多概念，就像“因果关系”这类概念，人们对它们存在着不同的意见。有人认为，关于这类概念的理解之所以存在着不同看法，是因为还未给它们以精确的阐述。试问，对这类概念予以精确的描述是可能的吗？我们又应当怎样做呢？

4、许多研究者，在其研究过程中，常常描述一些发展阶段，如一个儿童在学习理解某一复杂概念时是否经历一些阶段，或某一疾病的发展可分为阶段。但也有相反的看法，它认为这种阶段通常并不存在，是这种阶段的发现者们把自己的结果表示为不同阶段。因此，这种阶段是总会出现的，不管它们是否有实质上的重要性。请问，这种处理方法在科学研究中是否是常见的现象？将发展表达为阶段性是否是科学研究中的固有方式？或者只是一个例外？有没有某种方法可以减少这种对“阶段”的滥用？

5、你在学习一门新课题时，你常常会有不能理解作者的思想路线的感觉。这时你的结论是什么？是埋怨自己太笨了，所以搞不懂呢？还是认为作者也许没有给出足够清楚的证据。

6、在一些问题的讨论中，有些人常常会说：“我知道它是因为

我见到它”。你认为这种类型的论据是不可取的吗？是否总是应当使用演绎的论据？

在本书，你会读到关于认知水平理论的描述。我将向你说明思维水平是怎样以其本来面目呈现出来的？它们是如何存在的？教师与学生又是如何经验到它们的？你还会看到，我们在编写教科书时，又是怎样考虑到这种思维水平的？

人们总倾向于自己总是重复做的事情，或者有名的老师的训导视为理所当然的真理。但对另一些具有创新精神的人来讲，这些真理并不一定就正确。对他们来讲，常常还存在着另外的可能性。如果这本书使读者增强了批判的意识，那么，作者也就达到了自己的目标。

第二章

我们怎样遇到结构的？

许多人写过关于结构的著作。这里没有必要提到它们，因为大多数的著作都是借助于传统的演绎的方法来构造关于结构的理论的。如果我要讨论它们，我就不可避免地也要使用这些术语来推论。当你读下去的时候，也许就会明白为什么我避免在开始时用演绎构造来进行思考。

我也不能从结构的定义开始。只有当人们已经，在一定程度上，知道要被定义的事物，这个事物才能被赋予定义。正因为这样，非常可能，你所想像的、关于结构的观点和我在本书所要建立的，很不相同。

你在一种重要的传播媒介中可以发现结构，这个媒介就是语言。对于思维来讲，语言是十分重要的。没有语言，也就不可能思维。没有语言，也就没有科学的进步。

我知道，你对此会有反对意见。多年前，当时我的两个孩子还很小，他们为一件事争论起来了，找到我，要我来裁决。第一个说：“只要我没睡觉，我就在思考”。另一个说：“不对！有时我在树林里散步，我看见树木了，但我并未思考”。第一个接着说：“那你一定在思考。你知道这是树林，你在里面散步，而能知道你一直在里面散步”。另一个孩子说：“可能是这样，但要知道我没有在脑里使用词语，所以我并不在思考”。

那时，我认为第一个孩子是对的。没有使用语言的思考，你一样可以行动，可以正确地做一些事情。看来思维是必要的，没有语言也可以思维。后来，我把这个故事讲给弗罗登塔尔听，他却同意第二个孩子。他说：“没有语言的思考，你也能做很多事情，但是真正的思维是争论，没有语言也就不可能进行争论。”现在，我认为弗罗登塔尔和第二个孩子是正确的。当然，反对的意见仍然存在，这只是选择问题。在本书的最后，我还要为自己的观点辩护。

语言有结构。小孩是怎样发现这种结构的呢？是通过构造他们从来听到过的句子！记得，我的大女儿发现了“indeed”这个词，那一天，从早到晚，她总是在不同的句子里使用“indeed”这个词。

在我们所生活的这个世界里充满了许多不同的结构。依照波普尔（K·Popper）的提法，我把这个世界称之为第一世界——

世界Ⅰ。(当然你还可以说，它不是现实世界，而是我们心中的一种构造(波普尔把它称为第三世界——世界Ⅲ)。我们在第一世界所看见的结构，只是我们自己的构造。这是一个站得住脚的观点，但却不太实际。

*·波普尔——K. Popper，是当代著名的科学哲学家，其名著有《猜想与反驳——科学知识的增长》。有中译本。

为了使讨论简单些，我们可以接受世界Ⅰ的存在性，而我们看见了这个世界的结构。但还存在一些困难，如果我们看见一棵树，即使我以前从未见过这根特殊的树。这时在形成这个结构的过程中，语言发挥了它的作用。在以前的许多讨论中，我们一直常常谈到树。我们还见到过许多不同种类的树，还知道灌木不是树。在我们心中，已经有了关于“树”的一种想法，一种思想。例如，它与“生长”、“枝条”、“叶片”和所有那些用语言所组成的概念联系在一起。所以，人们会认为，第一世界的结构仅仅是语言的结构。

我们在第一世界看见的事物的概念的形成大多数都与由语言所建立起来的观念混合在一起。当然，这是一个很长的发展过程的结尾。尚未完全发展语言来表达某一事物的小孩，仍然能对该事物做出各种反应或采取某些行动。他们看见了那个结构，他们通过行动来给出自己的回答——充分的回答。所以，毫无疑问是，第一世界有着自己的结构。

一个动物，牠没有语言，也能对第一世界的结构作出直接反应。牠的大多数反应是常规化的，固定化的，牠的反应好像已成为周围世界的一个组成部分。而人类的反应则通常被一种语言形式的结构

所装扮，所包装。对我们来讲，常常很难对第一世界直接做出反应。

当我们教学时，却常常忘记这种直接方式的存在。为了使他能接触第一世界，我们对他进行解释。这样做，我们赋予和学生之间的交流以某种演绎的特征（使这种交流带有演绎的性质）。但这常常过早的发生，因为学生们首先需要的是与物质现实世界的直接交流。

在科学交流中，我们总是使用演绎式的语言。我们把人脑之间的交流（第二世界）转交给第一世界，而且未加认真地考虑，这样做，使我们促进发展语言交流的知识，但却不知道在这种交流中，我们对象的实在情形。

在书中，我将证明，又可改进在科学讨论中的交流。而这一方法也同样可以用之于教育。正因为如此，我要阐明的那些概念将通过实际例来说明，而不是用定义的方式。

本页的图（图 2·1，略原书附有几张建筑、机械及植物的图片，都显示出某种结构。——译者注）都是作者自己拍摄的。我选出这些照片，用以显示什么是结构。当然，我可以任意选择某化的图形、照片，什么都可以，因为里面总有某种结构。但这里所选的照片能很清楚地显示结构，你们也不能看出这里所存在的结构。这里你所看到的是第一世界的结构。如果你问我，“在这张照片里，我应当看什么？”那末，你就走上了一条错误的道路。因为，在这种情况下，你就已经试图借助第二世界的结构来解释第一世界的结构。你要求第二世界中的一个结构。

（图略）

~ 15 ~