# 高等工程數學

（上册）

# Advanced Mathematics for Engineers

原著者：Wilfred Kaplan

譯述者：劉柏宏　徐澧貽

科技圖書股份有限公司

# 高等工程數學

## （上 册）

# Advanced Mathematics for Engineers

原著者：Wilfred Kaplan

譯述者：劉柏宏　徐澧貽

科技圖書股份有限公司

本書各部分均將電算器列入考慮，作為使用電算器求解各種工程數學方法的重點。並列有專章討論數值分數與最新發展的有限元素法而為其他高等工程數學所未及錄入者，此為本書的特點。Kaplan 教授著作頗多，此為其最近出版的大作，特譯介如上。

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書　　名：高等工程數學（上册）
原 著 者：Wilfred Kaplan
譯 述 者：劉柏宏　徐澧貽
發 行 人：趙　國　華
發 行 者：科技圖書股份有限公司
台北市復興南路一段360號7樓之三
電　話：7056781・7073230
郵政劃撥帳號 15697

七十二年七月初版　　　　特價新台幣180元

# 原　序

本書係供研修工程同學在修完微積分後，繼續研習數學之用。其內容以工程方面的應用爲主，列有爲數頗多的實際示例。

近年來由於電算器的突飛猛進，對數學在應用方面所扮演的角色，已有了重大改變。以往認爲難予解答諸問題，現可採用準備妥當的電算器程式，經常獲得解答而成爲例行作業。有人會輕易的加上結論，認爲以後就不需太多的數學理論，其實不然。在應用電算器時，如果未能眞正瞭解數學，對問題很易導致一個毫無意義的解答。因此，把握住實切的數學觀念。更是迫切需要。

本書在各部分均將電算器列入考慮。用電算器求解的各種數學方法，作爲本書的重點。更進一層，本書列有專章（第十三章），專論數值分析。最近研究所得有關這方面的新工具，如Romberg積分與快速Fourier 變換式等，均作詳盡的考慮。有關有限元素法的介紹，亦用專章予以討論（第十四章）。

鑒於各個主題內容性質有所不同，作者尋得一種方式，使基本上各章可各自獨立。如此，可不依順序對各章分別予以考慮。

微分方程爲本書的中心課題。的確，首先八章形成該主題的一項課程。第一章包括常微分方程的基本觀念。第二章專論無窮級數，章末附有用冪級數求解微分方程式的方法。第三章爲根據Fourier 級數而得的同一目標。第四章也具同一目標，但其方法則以Laplace與Fourier 變換爲主。第五章爲矩陣與基本綫性代數，第六章採用綫性代數處理聯立綫性微分方程式，第七章的本身，係用來處理非綫性微分方程式的。第八章專論偏微分方程式。

這八章的內容，係供僅具初等微積分的知識即可研讀而撰寫的。其中也包含些偏導數，但更高等的微積分論述，*諸如鏈鎖法則*（*chain rule*）與綫積分（ line integrals ）等，則置於第九章與第十章。如

此，有關熱量方程式、波動方程式、以及與此類似的方程式等的推導，可置在第十章論述。依第八章（偏微分方程式）的目的而言，是採用個別方式以誘導此等方程式。此種方式應能使讀者對其包含的內容，有一良好的實質瞭解，並且能促進對一般應用數值計算法的瞭解。第十一章包含複變數函數的基本理論，及其若干應用。第十二章採用這些理論對特殊函數作扼要的介紹。

第十三與十四章分別專章討論數值計算法與有限元素法。第十五章，也是最後一章是對機率與統計作扼要介紹。

下列係按五學分授課對本書分段的一例：

1. 常微分方程式、無窮級數、Fourier 級數、Laplace 變換式（一至四章）。
2. 矩陣、聯立綫性微分方程式、非綫性微分方程式（五至七章）。
3. 偏微分方程式與向量微積分（八至十章，或按九、十、八的順序）。
4. 複變數，保形映像，綫數（十一章）。
5. 特殊函數、數值分析（十二至十四章）。

全書附入頗多習題。書末附有部分習題的答案；所有已附答案的習題均用粗體字編號刊出。

本書各章節中，分別指出參考圖書的出處，以供讀者對該主題作更詳盡的研究用。在本書中屢被提到的參考圖目則用縮寫字或簡短標題標出，與所附參考書目錄情形一致。

在某些章節中（尤其是第五章與第十一章），作者曾從其以往的著述中錄入若干資料。

作者對Addison-Wesley 圖書公司與其同仁的密切合作以及許多同僚的指教，D.A.Lentz與M.D.Spickenagel 對於手稿的打字，均致由衷的感謝。

關於本書整個的校訂，作者對下列諸先生表示由衷的謝意。Jame Dowdy（西維吉尼亞大學）、William J. Firey（俄勒岡州立大學

）、Robert Kadlec（密西根大學）、Ronald J. Lomax（密西根大學）、David O. Lomen（亞利桑拉大學）、Francis C. Moon（康乃爾大學）、William L. Perry（德州農礦大學）Stephen M. Pollock（密西根大學）、David A. Sanchez（新墨西哥大學）、Klaus Schmitt（猶他大學）、David F. Ullrich（北卡羅來納州立大學）、Michael Williams（維吉尼亞工藝學院與州立大學）等。

密西根大學

W Kaplan 凱布倫

# 目　　錄

## 原　序

## 目　錄

## 第一章　常微分方程式

## 第二章 無窮級數



## 第三章 Fourier級數

## 第四章 運算微積分

## 第五章 矩陣與線性代數



## 第六章 常微分方程式

## 第七章　非線性微分方程式



## 第八章　偏微分方程式之介紹

# 第一章　常微分方程式

## 1.1　微分方程式之重要性

多數世紀以來，科學發展曾經得到許多法則，用來說明實質事物的性質。當將這些法則用數學方式來表示時，常會得到微分方程式（（differential equation）—— 亦即方程式中包含有導數項。其中的一例是，Newton 第二定律：

力＝質量×加速度

當一個質量粒子 $m$ 加上一力 $f(x)$，使其沿 $x$ - 軸作直綫移動，同時力 $f(x)$ 又隨着 $x$ 位置發生變動（圖 1-1）時，其定律乃變成：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f(x) \tag{1-10}$$

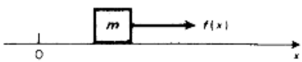

圖 1-1　一粒子沿一綫移動

Newton 第二定律並不是說各粒子將恰好作某種運動。毋寧說是，其可能作某種類型的運動。同樣情形，微分方程式 (1-10)，在 $f(x)$ 爲已知的情形下，對函數 $x(t)$ 而言，也不完整予以規定。微分方程式具有許多解（solution），每一個解則與所允許的一種粒子運動相應。每一特定的情形，其實際解均可用已知的適當初始條件（initial condition）求得。

另一例子是電路網中的 Kirchoff 定律。簡單電路中，計包括電感 $L$，電阻 $R$，電容 $C$ 與帶動的電動力 $E(t)$，電流 $I$ 則適合下列微分方程式：

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E'(t) \tag{1-11}$$

同樣，此方程式並不能求得 $I$ 隨着時間 $t$ 而變動的恰好情形。但卻設定了所容許的某類型的函數 $I(t)$，每一特定情形，均可用其初值條件求得。

電磁現象的一般理論，係根據Maxwell方程式而來，其中含有偏微分。本章僅考慮常微分方程式（ordinary differential equation），式中不含偏微分。隨後各章（特別是第八章）將專爲研究偏微分方程式而設的。許多特殊情形中，此等偏微分方程式解，可簡化成常微分方程式求解而頗具價值。其他重要的物理理論，諸如；流體運動、熱傳導、擴散、彈性、電漿物理，量子力學等等，亦可應用與此類似的方式，每項理論的一般情形，多需用偏微分方程式予以描述，但有許多特殊情形則可用常微分方程式處理。

常微分方程式亦可供作生物與經濟系統，以及其他社會科學方面諸模式的應用。能作成基本現象的變動模式，諸如振動，穩定與不穩定，以及對輸入，暫態情形，諧振等的反應等等。事實上，特解（particular solution），係配合機構作用中由一般經驗所得的初始條件而求得，此種作用一旦付諸操作，其情形完全由操作的初始條件來決定。

## 1.2 基本術語

所謂常微分方程式，其意義是指下列各式中的任一方程式：

$$y'+y=2\sin x \tag{1-20}$$

$$y''+3y'+2y=0 \tag{1-21}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+e^t\frac{dx}{dt}+x=\cos 2t \tag{1-22}$$

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=p_0\cos ax \qquad (E, I, p_0, a \text{ 爲常數}) \tag{1-23}$$

$$y'=x^2+y^2 \tag{1-24}$$

這些方程式，是與一函數以及某階（order）的導數（derivative）

發生關係。

一般情形，吾人的問題是需要求得在某一區間（例如：時間，距離），所有函數均能適合其方程式的情形。此種函數稱爲微分方程式的解（solntion）〔或特解（particular solution）〕。

例如 $y = \sin x - \cos x$ 爲式（1－20）的解，因爲：

$$y' + y = (\cos x + \sin x) + (\sin x - \cos x) = 2\sin x$$

但　$y = \sin x - \cos x + e^{-x}$, $y = \sin x - \cos x + 2e^{-x}$　兩個函數，以及下式的一般情形：

$$y = \sin x - \cos x + ce^{-x} \tag{1-25}$$

式中 c 爲常數，可用代入法證實其亦爲式（1－20）的解。

上例係屬典型情形。每一微分方程式中均會有無窮多的解，其中具有常數。方程式的通解（general solution），是指包含此種常數，用於所有解的一個公式。故可指出式（1－25）爲式（1－20)的通解。

以上所指的常(ordinary)字，係表示未具偏導數者。除非是要強調此種情形，通常不加此“常”字，簡稱爲微分方程式。

微分方程式中的階(order)字，係表示導數中的最高階數。如式（1－20)與（1－24)所具的階爲一階(one order）或第一階（first order）；式（1－21)與（1－22)爲2階，而式（1－23)爲4階。

下列形式的各方程式；

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)$$
$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \text{ 等}$$

稱爲綫性(linear)；其他形式的方程式，則稱爲非綫性(nonlinear)。

上述中的六個方程式，除式（1－24)外，均爲綫性。

常遇一種情形，已知諸如式（1－21)類的方程式，並需要求適合初始條件(initial condition)的解，也就是說，選得一個 $x$ 值後，$y$ 與 $y'$ 應爲何值（例如，當 $x=0$ 時，$y=3$，$y'=-2$）。一個 $n$ 階微分方程式，其正常的初始條件爲；經選一 $x$ 值後，函數本身與 $n-1$ 階之所有各階導數值。

根據基本“存在定理”(existence theorem)可以保證：在適當

的連續性情形下，其中具有一個適合其初始條件的解。就一階方程式 而言，其中所有的（$x$，$y$）對 $F(x, y)$ 而言是連續的，並具有一個連續的偏微分 $\partial F/\partial y$，則此定理可以斷定，每個（$x_0$，$y_0$）值，經確定在 $a < x < b$ 的區間含有 $x_0$ 時，則具有一個 $y = f(x)$ 的解。使 $y_0 = f(x_0)$。此外，其解為唯一（unique）的解。也就是說；假如 $y = f_1(x)$ 為在 $a < x < b$ 區間的另一解，並因此而得 $y_0 = f_1(x_0)$，則在 $a < x < b$ 的區間，$f(x) = f_1(x)$。（見 6-1 節與 7-1 節中有關存在定理的更進一步的討論）。

吾人亦可採用邊界條件（boundary condition），而不採用初始條件。此情形可得到一個形狀上的變化。在 $y$ 的二階方程式中，如式（1-21）的情形，常可訂出 $x_1$ 時，一種 $a_1 y + b_1 y'$ 綫性組合的各值，與 $x_2$ 時，另一種此型組合 $a_2 y + b_2 y'$ 的各值。例如；可能要求在 $x = 0$ 時，為 $2y + 3y' = 0$，而在 $x = 1$ 時，為 $3y - 2y' = 0$。關於邊界值問題（boundary-value problem）將於 3-14 節與第八章中加以考慮。

## （1-2 節）習題

1. 說明下列各微分方程式的階，何者為綫性，何者為非綫性。

 a) $y' = x + y$ b) $y'' - y' + 3y = x^3$ c) $y'' = x + \sin y$

 d) $y'' - 2(y')^4 + y^3 = x^6 - 1$

 e) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + t^5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin 2t$ f) $\dfrac{dx}{dt} = xt + t^4$

 g) $\dfrac{dr}{d\theta} + r^2\cos\theta = 0$

 h) $R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = e_0\omega\cos\omega t$，式中 $R$, $C$, $e_0$, $\omega$ 為常數

2. 試證明下列各函數分別為已知的某微分方程式的一解：

 a) $y = e^{x}$, Eq.(1-21) b) $y = e^{-2x}$, 式(1-21)

 c) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-2x}$, 其中 $c_1$, $c_2$ 為常數 式(1-21)

 d) $x = x_0\cos\omega t$ 為 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ 之解，其中 $x_0$, $\omega$, $m$ 與 $k$ 為正常數且 $\omega^2 = k^2/m$

 e) $I = I_0e^{-t/RC}$ 為 $R\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C}I = 0$ 之解，其中 $R$, $C$, $I_0$ 為非零常數

f) $x = x_0 + v_0 t$ 爲 $m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ 　之解，其中 $m, x_0, v_0$ 爲常數　$(m \neq 0)$

g) $x = x_0 + v_0 t + g\left(\frac{t^2}{2}\right)$ 爲 $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg$ 爲之解，其中 $x_0, v_0, m, g$ 爲常數 $(m > 0, g > 0)$

3. 已知 $y' + y = e^{-x}\cos x$ 爲微分方程式 $y = e^{-x}\sin x + ce^{-x}$ 的通解分別相當於下列各已知初始條件的解。

a) $y = 0$ 當 $x = 0$　　b) $y = 1$ 當 $x = 0$
c) $y = 0$ 當 $x = \pi$　　d) $y = 3$ 當 $x = \pi/2$

4. 習題 2（c）爲式（1－21）的通解。求相當於下列各組初始條件的解：

a) $y = 1$ 及 $y' = -3$ 當 $x = 0$　　b) $y = 0$ 及 $y' = 1$ 當 $x = 0$
c) $y = 1$ 及 $y' = 0$ 當 $x = 1$　　d) $y = 0$ 及 $y' = 0$ 當 $x = 0$

5. 已知其解的微分方程式：若已知一微分方程式的解爲 $f(x, y, c) = 0$ 形式，或某種相當形式，便可對 $x$ 微分，並消除 $c$，求得其方程式。依此，自 $y = x + ce^{2x}$ 便得 $y' = 1 + 2ce^{2x}$，由兩式消除 $c$，得 $y' = 1 + 2(y - x)$。如解的形式爲 $f(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$，或某種相當形式，其中 $c_1 \cdots c_n$ 爲任意常數，則可微分 $n$ 次，並消去 $c_1 \cdots c_n$，得其微分方式（$n$ 階）。據此分別求下列各已知解的各微分方程式：

a) $y = \sin x + cx^2$　b) $y = e^x + c\cos x$　c) $x^2 + y^2 = c$
d) $xy = c$　e) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$　f) $y = c_1\cos x + c_2\sin x$

## 1.3　一階方程式

許多一階方程式（first-order equation）很容易直接求得其通解。但亦可能遇到一種方程式，無法求得其通解的一般公式。因此，同時爲要瞭解微分方程式與其解間的關係，在此，對問題在圖解上的意義加以說明。