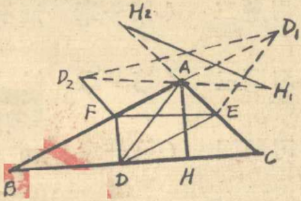
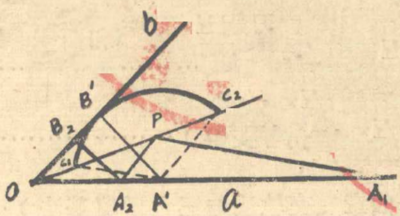
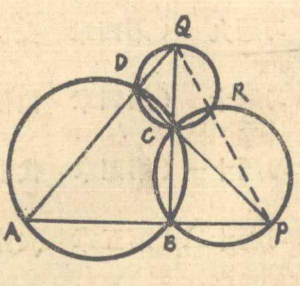
初等数学研究

初等几何

习题解答







芜湖师范专科学校

目 录

习 题 一

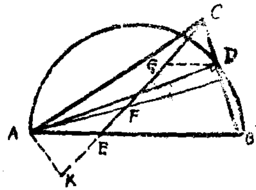
1.△ABC中，AB＝AC，半园AB交BC边于D，E∈AB，且AE：AB＝1：3，若AD∩CE＝F，求证：AF＝FD。

证明Ⅰ、作DG∥EA

则△AEF≌△DGF（∵$DG=\frac{1}{2}EB=AE$）

∴AF＝FD。

证明Ⅱ、作AK⊥AD交CE延长线于K。



（图1—1）

$\therefore \frac{AK}{BC}=\frac{AE}{EB}=\frac{1}{2}$

$\therefore AK=\frac{1}{2}BC=CD$

Rt△AKF≌Rt△DCF，

∴AF＝FD

2.在△ABC的外边作正方形ABEF和ACGH，则△ABC的高线AD必将线段FH平分。

证明：作FK、HN⊥AM于K、N。

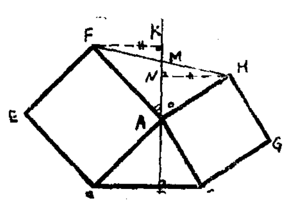
∵AF＝BA

∠FAK＝90°－∠BAD

＝∠ABD

∴Rt△AFK≌Rt△BAD、

FK＝AD



（图1—2）

同理由Rt△AHN≌Rt△CAD得

HN＝AD

∴FK＝HN，又∵∠FMK＝∠HMN

$\therefore Rt\triangle FMK \cong Rt\triangle HMN$，$\therefore FM = MH$

注：①若$\angle ABC > 90°$时，图形将有变化，但证法基本相同．读者试证之。

②也可在AM上截取一段$AL = BC$，然后证AFLH为平行四边形，也可得同样结果。

3．在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$\angle B$的平分线交AC于E，作$CD \perp AB$而交BE于G，过G作AB的平行线交AC于F，则**$AE = CF$。**

证明：作$EH \perp AB$于H，

则$\angle 1 = \angle 2$，$\because \angle 3$与$\angle 5$互余，$\angle 4 = \angle 7$与$\angle 6$互余，而$\angle 5 = \angle 6$，

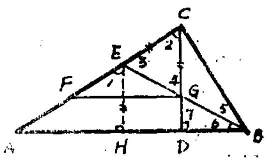
$\therefore \angle 3 = \angle 4$，则$CG = CE$

$\because BE$是$\angle B$平分线

$\therefore CE = EH$

于是$Rt\triangle CGF \cong Rt\triangle EHA$

$\therefore AE = CF$



（图1—3）

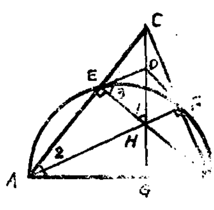
4．AB为半园的直径，C为园外一点，AC、BC分别交半园于E、F，$AF \cap BE = H$，过E、F分别作半园的切线交于D，则$CD = DH$。

证明：$\because AF \perp BC$、$BE \perp AC$，

$\therefore H$为$\triangle ABC$的垂心

故连$CH \perp AB$于G，则A、G、H、E共园，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$，设切线ED交CH于$D'$，则$D'$为$Rt\triangle CEH$斜边的中点。



（图1—4）

同理FD也过CH之中点D′，即D与D′重合，故DC＝DH。

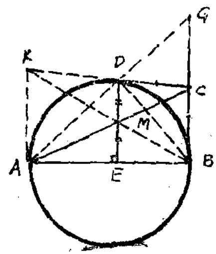
5.在Rt△ABC中，∠B＝90°，CD切⊙（AB）于D点，DE⊥AB于E而交AC于M，求证：DM＝ME。

证明Ⅰ：连AD交BC延长线于G，连BD，在Rt△BDG中，

CD＝CB，∴CB＝CG

∵DE∥GB　　∴DM＝ME

证法Ⅱ：过A作⊙（AB）之切线交CD延长线于K。



（图1—5

则$\frac{AM}{AK}=\frac{AM}{KD}=\frac{CM}{CD}=\frac{CM}{BC}$

且∠KAM＝∠BCM　　∴△AKM∽△CBM

∠AMK＝∠CMB

故K、M、B三点共线，由平行截割定理可得

$$\frac{DM}{AK}=\frac{CD}{CK}=\frac{BE}{BA}=\frac{ME}{AK}\therefore DM=ME$$

6.园内接四边形ABCD的一组对边BA、CD延长后交于M，直线BD交⊙ACM于E、F，求证：$\overset{\frown}{EM}=\overset{\frown}{MF}$

证明：连AC、AF、ME、MF，由△BEM的外角定理和园周角定理可得：

∵∠1＝∠2＋∠3

＝∠6＋∠4＝∠6＋∠5＝∠MFE

∴　$\overset{\frown}{EM}=\overset{\frown}{MF}$。

7.已知AB、AC切⊙O于B、C、BC∩AO＝H，EF为过H的任意弦，则∠EAH＝∠FAH。

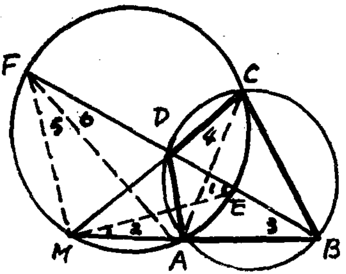
证明：∵HE·HF＝HB·HC＝HB²，

在$Rt\triangle ABO$中，$HB^2 = AH \cdot HO$

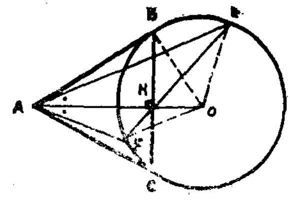
$\therefore HE \cdot HF = AH \cdot HO$

故A、E、O、F四点共园，且$OE = OF$

$\therefore \angle EAO = \angle FAO$，即$\angle EAH = \angle FAH$。



（图1—6）



（图1—7）

8. $\odot O_1 \cap \odot O_2 = \{A, B\}$，$\odot O_1$的弦BC交$\odot O_2$于E，$\odot O_2$的弦BD交$\odot O_1$于F，试证：①若$\angle DBA = \angle CBA$，则$DF = CE$，②若$DF = CE$，则$\angle DBA = \angle CBA$。

证明①：$\because \angle 1 = \angle 2$，

$\therefore$在$\odot O_1$中有　$AF = AC$，

又$\angle 3 = \angle D$，$\angle 4 = \angle C$，

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle AFD$

故　$DF = CE$

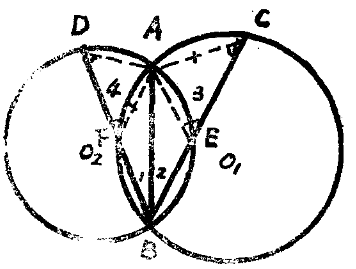
②$\because DF = CE$

$\angle 3 = \angle D$，$\angle 4 = \angle C$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle AFD$

$\therefore AC = AF$

在$\odot O_1$中可得$\angle 1 = \angle 2$



（图1—8）

9.线段AB的中点为M，从AB上另一点C向直线一侧引线段CD，令CD的中点为N，BD的中点为P，MN的中点为Q，求证：直线PQ平分线段AC。

证明Ⅰ：设直线$PQ\cap AC=x$

$\because NP\parallel Mx$，$QN=QM$，

$\therefore \triangle QPN\cong\triangle QxM$，

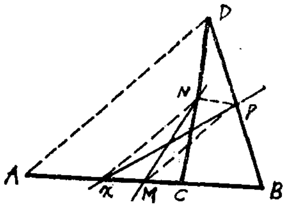
$NP=Mx$

$\therefore PNxM$为平行四边形，

$Nx \mathrel{\underline{\parallel}} PM \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$

又$\because$ N是CD的中点，

$\therefore$ x必为AC的中点。



（图1—9）

证明Ⅱ：易证$Mx=NP$

$=\frac{1}{2}BC$，

又$Ax=AM-Mx=\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AB-BC)$

即$Ax=\frac{1}{2}AC$，故x为AC的中点。

10.四边形两组对边延长后分别交于两点，且交点的连线平行于四边形的一条对角线。证明：另一条对角线延长后必平分对边交点间连成的线段。

已知：□ABCD中，$AB\cap CD$

$=E$，$AD\cap BC=F$，且

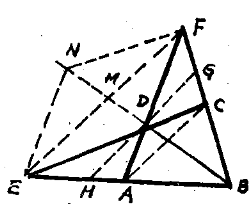
$EF\parallel AC$，$BD\cap EF=M$。

求证：$EM=MF$

证明Ⅰ：过D作$GH\parallel AC\parallel EF$

则$\dfrac{EF}{DH}=\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AD+DF}{AD}$

$=1+\dfrac{DF}{AD}$



（图1—10）

$$\frac{EF}{DG}=\frac{CE}{CD}=\frac{CD+DE}{CD}=1+\frac{DE}{CD}$$

$\because \frac{DF}{AD}=\frac{DE}{CD}$ $\therefore \frac{EF}{DH}=\frac{EF}{DG}$

故 $DH=DG$,

但$\frac{DH}{EM}=\frac{BD}{BM}=\frac{DG}{MF}$ $\therefore EM=MF$

证法Ⅱ：过E作EN∥AF交BM延长线于N，连NF

则：

$\frac{BA}{BE}=\frac{BD}{BN}$ ……………………………………①

又$\because EF\parallel AC$ $\therefore \frac{BA}{BE}=\frac{BC}{BF}$ ……………………………②

比较①②得 $\frac{BD}{BN}=\frac{BC}{BF}\Rightarrow NF\parallel DC$

$\therefore$EDFN为▱， 故$EM=MF$

11.自⊙O的中心向园外一直线MN作$OA\perp MN$于A，过A任作两割线ABC和ADE，直线BE和CD分别交MN于P、Q，求证：$AP=AQ$。

证明：作C点关于OA的对称点C′，连C′A，C′P，由对称性质可知，$AC=AC'$，$\angle 1=\angle 2$，则$\angle PAC'=\angle QAC$，

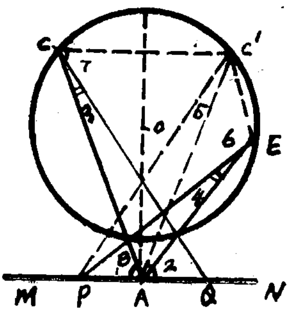
$\because \angle 6+\angle 7=180°$

而$\angle 7=\angle 1=\angle 2$

故 $\angle 6+\angle 2=180°$

而$\angle 2+\angle PAC'=180°$

$\therefore \angle 6=\angle PCA'$,



（图1—11）

故　P、A、E、C′四点共园

$\therefore \angle 4 = \angle 5$

但$\angle 4 = \angle 3$　　　　$\therefore$　$\angle 5 = \angle 3$

$\therefore \triangle APC' \cong \triangle AQC$，　　　　故　$AP = AQ$

12．过园内接四边形对角线交点作一弦，使此弦被此点所平分，则此弦在边与弧间的两线段相等。

证明：作弦心矩OM、ON，则$BC = 2CM$，$AD = 2DN$

又$\triangle AED \backsim \triangle BEC$

$\therefore \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{BC} = \frac{2DN}{2CM} = \frac{DN}{CM}$

$\angle 7 = \angle 8$

$\therefore \triangle EDN \cong \triangle ECM$

故　$\angle 5 = \angle 6$

从而可得$\angle 3 = \angle 4$

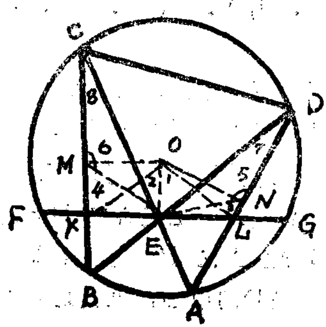
$\because$ E、O、N、L与E、O、M、K分别共园。

$\therefore$　$\angle 1 = \angle 3$，

$\angle 2 = \angle 4$，可得$\angle 1 = \angle 2$，

在$\triangle OKL$中，有$EK = EL$，

但$EF = EG$，$\therefore FK = GL$，



（图 1—12）

13．在$\triangle ABC$中，M为BC的中点，已知$AM^2 = AB \cdot AC$，$\angle C - \angle B = 60°$，试证：AM等于⊙ABC的半径。

证法Ⅰ，$\because \angle C > \angle B$

$\therefore \angle CAM > \angle BAM$

故可在$\angle CAM$内部作$\angle 1 = \angle 2$，

并截取$AM' = AM$，连CM'，

$\because AM^2 = AB \cdot AC$，

$\therefore AM \cdot AM' = AB \cdot AC$,

从而得$\triangle ACM' \backsim \triangle AMB$

$\therefore \angle 3 = \angle 4$,

故得A、B、M′、C四点共园,

又作$\angle ABC = 60°$,

则$\angle DBC = \angle BCA$,截取

$BD = AC$,

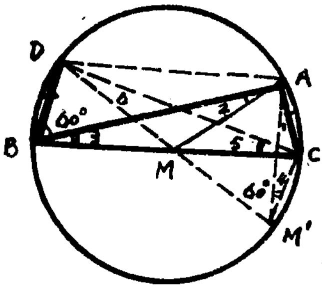
由$\triangle ABC \cong \triangle DCB$得

$\angle 3 = \angle 5$,

$AB = DC$,故ACBD为等腰

梯形,则A、D、B、M′、C

共园。



(图1—13—1)

$\because$M为下底中点,故$AM = DM$。$\angle 6 = \angle 2 = \angle 1$,连$DM'$则$\angle CDM' = \angle 1$,$\therefore \angle CDM' = \angle CDM$,故D、M、M′三点共线,于是$\angle AM'D = \angle ABD = 60°$。

$\therefore$等腰$\triangle AMM'$为正$\triangle$,即$MM' = MA = MD$,故M为$\odot M'AD$的中心,也就是$\odot ABC$的园心,$\therefore AM$为$\odot ABC$的半径。

证法Ⅱ:设$\angle ABC = \alpha$,则$\angle ACB = 60° + \alpha$(图1—13—2)作$\triangle BCD$及$\angle DBE = \alpha$,则$BE \parallel AC$,又过D作AB的平行线交AC延长线于F,交BE于E,则ABEF为▱。

$\because \angle BDE = \angle ABD = 60° + \alpha = \angle BCA$

$BD = BC$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BCA$　　$BE = BA = c$,故ABEF为菱形。

$\because AF = AB = c$,$CF = c - b = DF$

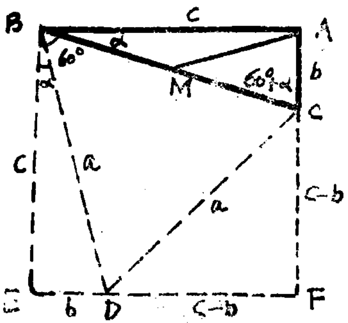
在$\triangle ABC$中,已知$AM^2 = m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = bc$

$\therefore\ 2(c-b)^2=a^2$　即 $(c-b)^2+(c-b)^2=a^2$

在△CDF中，$CD=CB=a$，于是有 $CF^2+DF^2=CD^2$

$\therefore \angle CFD=90^\circ$，于是 $\angle A=\angle CFD=90^\circ$，

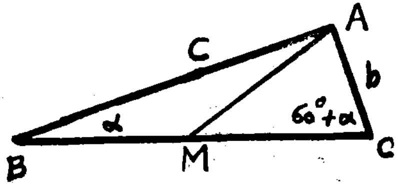
故△ABC为Rt△　　$\therefore AM=\frac{1}{2}BC=$ ⊙ABC的半径。



（图1—13—2）

证法Ⅲ：用三角法来证。（图1—13—3）

$\because AM^2=m^2_a=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)=bc$



(图1—13—3)

$\therefore a^2=2(c-b-{}^2$　　$a=\sqrt{2}(c-b)$

$$\because \frac{a}{\sin(60^\circ+2\alpha)}=\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin(60^\circ+\alpha)}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}(c-b)}{\sin(60^\circ+2\alpha)}=\frac{c-b}{\sin(60^\circ+\alpha)-\sin\alpha}$$

$$=\frac{c-b}{2\text{Cos}(30°+\alpha)\text{Sis}30°}=\frac{c-b}{\text{Cos}(30°+\alpha)}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{\text{Sin}(60°+2\alpha)}=\frac{1}{\text{Cos}(30°+\alpha)}$$

$$\sqrt{2}\,\text{Cos}(30°+\alpha)=2\text{Sin}(30°+\alpha)\text{Cos}(30°+\alpha)$$

$\therefore$ $\text{Sin}(30°+\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$30°+\alpha=45°$

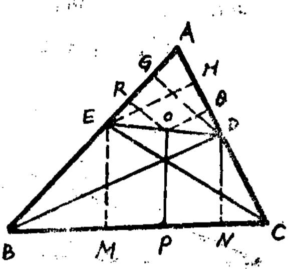
$\therefore$ $\alpha=15°$，即$\angle B=15°$，$\angle C=60°+15°=75°$，

$\therefore$ $\angle A=90°$，$\triangle ABC$为$Rt\triangle$，AM为斜边BC的中线，

$\therefore$ $AM=\odot ABC$的半径。

14.在$\triangle ABC$中，BD，CE为两角的平分线，O为DE的中点，求证、O点到BC的距离等于O点到AB、AC距离的和。

证明：设O到BC、CA、AB三边的距离，分别为OP、OQ、OR，因为BD是$\angle B$的平分线，$\therefore$作$DN\perp BC$于N，$DG\perp AB$于G时，则$DN=DG$，同理有$EM=EH$。



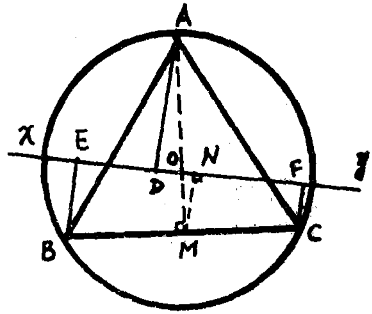
（图1—14）

$\because$ OP是梯形DEMN的中位线。

$$\therefore\ OP=\frac{1}{2}(DN+EM)$$
$$=\frac{1}{2}(DG+EH)$$
$$=\frac{1}{2}(2OR+2OQ)$$
$$=OR+OQ$$

15.O为正$\triangle ABC$的外心，直线xy过O点且与AB、AC两边相交，求证：A点到xy的距离等于B、C两点到xy距离的和。

证明：设A、B、C三点到xy的距离分别为AD、BE、CF。取BC的中点M，作MN⊥xy于N，则BE＋CF＝2MN ……………………①



（图1—15）

∵O为正△ABC的外心，同时又为重心，故AM必过O点，并且

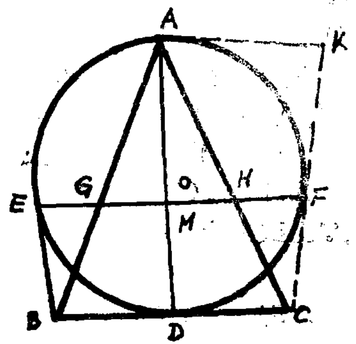
$$\frac{AD}{MN}=\frac{AO}{OM}=2$$

∴ AD＝2MN……… ②

比较①和②得 BE＋CF ＝AD

16.△ABC中，AB＝AC，AD为高线，由B、C分别作⊙(AD)的切线BE，CE（不同于BC）、E、F为切点。试证：弦EF在△ABC内部一段的长等于它在外部两段长之和。

证明：∵图形关于AD为对称，∴B与C、E与F为对称点，故EF∥BC，设EF与AB、AC、AD分别交于G、H、M，过A作切线交CF的延长线于K，则AK∥MF∥DC，且CF＝CD，AK＝KF。



（图1—16）

$$\therefore\frac{MH}{CD}=\frac{AH}{AC}=\frac{KF}{CK}=\frac{AK}{CK}=\frac{HF}{CF},$$

∴ MH＝HF，

同理有$MG=GE$　　故　$MH+MG=HF+GE$。

即　$GH=GE+HF$。

17．自任意一点P向正△ABC的三高引垂线，试证：其中较长者等于其余两者的和。

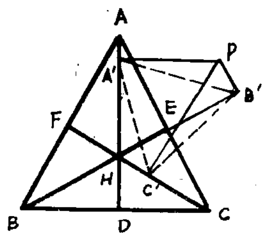
证明：设自P向三高所引三垂线分别为PA'，PB'，PC'。连结A'、B'、C'三点得△$A'B'C'$。∵P、A'、H、B'及P、A'、H、C'分别共园，故P、A'、H、B'、C'五点共园。已知$\angle AHE=\angle CHE=60°$。

$\therefore \angle A'C'B'=\angle A'HB'$

$=\angle C'HB'=\angle C'A'B'=60°$

故△$A'B'C'$为正△，

$\therefore PC'=PA'+PB'$。



（图 1—17）

18．M为△ABC的边BC的中点，在BM上任取一点D，自D点作MA的平行线交AB于E，交CA延长线于F，求证：$ED+DF=2AM$。

证明：延长AM至G使$MG=AM$，连BG交FD的延长线于K，∵$DF\parallel AM$，

$\frac{DE}{AM}=\frac{DK}{MG}$，$\therefore DE=DK$

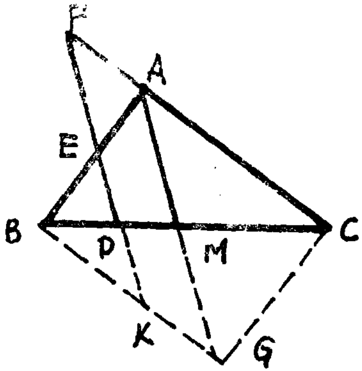
又∵ABGC为平行四边形。

$\therefore$　$AF\parallel GK$　　于是AFKG为▱

$\therefore FK=AG$

但$FK=FD+DK=FD+ED$

而$AG=2AM$　$\therefore DE+DF=2AM$。



（图1—18）

19.在△ABC的外面作正方形ABEF和ACGH，AM为△ABC的中线，连FH，则FH＝2AM。

证明Ⅰ：取FH的中点K，连AK，由第2题可知AK⊥BM，AM⊥EH，且AF⊥AB，AF＝AB。

∴△AFK≌△BAM

故FK＝AM∴FH＝2AM

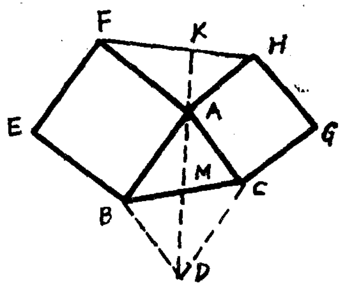
证法Ⅱ：延长AM一倍至D，则ABDC为▱

∴∠BAC＋∠ABD＝180°，

但∠BAC＋∠FAH＝180°

∴∠ABD＝∠FAH，从而有△ABD≌△FAH（SAS）

∴FH＝AD＝2AM



（图1—19）

20.E是正方形ABCD的CD边的中点，F是线段CE的中点，求证：∠DAE＝$\frac{1}{2}$∠BAF。

证法Ⅰ：（折半法）作∠BAF的平分线，交BC于G，交DC延长线于H，则∠H＝∠FAH

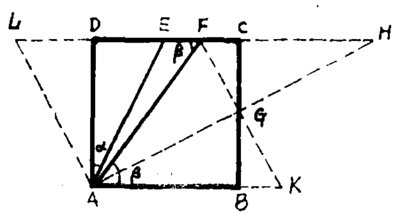
$\therefore FH = AF = \frac{5}{4}AD$

$\because CF = \frac{1}{4}AD$

$\therefore CH = AD = AB$

故$Rt\triangle ABG \cong Rt\triangle HCG$

$BG = CG = DE$



（图1—20）

又得$Rt\triangle ADE \cong Rt\triangle ABG$

$\therefore \quad \angle DAE = \angle BAG = \frac{1}{2}\angle BAF$

证法Ⅱ：（加倍法）在AD左侧作$\angle LAD = \angle EAD$，过F与BC的中点G作直线交AB延长线于K，可以算得$\triangle AEL$与$\triangle AFK$的三边对应成比例，故$\triangle AEL \backsim \triangle AFK$

$\therefore \quad \angle DAE = \frac{1}{2}\angle EAL = \frac{1}{2}\angle BAF$

证法Ⅲ：（三角法）设$\angle DAE = \alpha$，$\angle BAF = \beta = \angle AFD$

$\because \quad tg\,\alpha = \dfrac{DE}{AD} = \frac{1}{2} \qquad tg\,\beta = \dfrac{AD}{DF} = 4/3$

$\therefore \quad tg\,2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} = 4/3 = tg\,\beta$

故 $2\alpha = \beta$ 　即$\angle DAE = \frac{1}{2}\angle BAF$。

习 题 二

1.三角形中三中线的和小于三角形的周界，而大于其四分之三。

已知：AD、BE、CF是△ABC的三中线。

求证：$AB+BC+CA>AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$

证明：延长AD至H，使DH=AD连BH，则$AB+BH>AH$

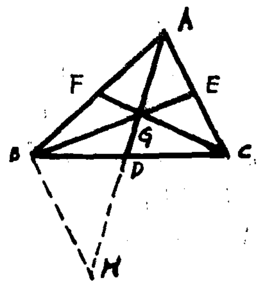
即$AB+AC>2AD$ ……………①

同理有$AB+BC>2BE$ …………②

$AC+BC>2CF$ …………③

三式相加即得

$AB+BC+CA>AD+BE+CF$、



（图2—1）

又在△BCG中，$BG+CG>BC$

即 $\frac{2}{3}BE+\frac{2}{3}CF>BC$ ……………………④

同理有 $\frac{2}{3}AD+\frac{2}{3}BE>AB$ ……………………⑤

$\frac{2}{3}AD+\frac{2}{3}CF>AC$ ……………………⑥

④+⑤+⑥$\frac{4}{3}(AD+BE+CF)>AB+BC+CA$

$\therefore AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$

2.设△ABC为正△，P是任意点，求证：$PA\leqslant PB+PC$

证明：以C为中心，将△BCP旋转60°至△ACP′，则△PCP′为正△，

$\therefore \quad PP'=PC=P'C$