

數理化自學叢書



代 數

第 一 冊



香港三育圖書文具公司 出版

數理化自學叢書

代 數

第 一 冊

香港三育圖書文具公司出版

數理化自學叢書

代 數

(第一冊)

出版發行：**三育圖書文具公司**

香港九龍彌敦道五八〇號G

San Yu Stationery & Publishing Co.

580G, Nathan Road Kowloon, Hong Kong

印刷：光輝印刷廠

灣仔謝菲道三九九號地下

1978年10月版

版權所有・翻印必究

前 言

這套叢書中代數書共有四冊，其內容包括現在中學代數課程的全部主要內容，第一、二兩冊和三、四兩冊分別相當於普通初中和高中的水平。爲了便於自學，書中材料的選擇處理與現行學校課本略有出入，但這並不影響各分冊之間的相對獨立性。凡是已備具小學畢業算術水平的讀者可從第一冊讀起，而對已有初中畢業水平的讀者，則可從第三冊開始選讀。

數學是一門基本工具學科，而代數又是數學的重要基礎之一。在進一步學習其他中學數學，如幾何、三角、解析幾何等，或在學習物理、化學等自然學科的時候，都需要或多或少地用到代數的知識。

本書是代數第一冊，其主要內容是把數的範圍擴大到有理數，用字母表示數，引進代數式，然後研究有理代數式的基本運算，爲第二冊學習方程作好準備。

在第一章的開始，我們對算術裏的一些重要知識作了簡單的回顧，其目的是讓讀者鞏固基礎，溫故知新。正文裏有很多“注”和“說明”，用小字排印，作爲正文的補充，給讀者指出一些應該注意的事項和對問題的思考方法。每章之末有一簡單的提要，對這章的內容作了概括，可供讀者在複習時參考。各章各節之間的內容是緊密銜接的，讀者應該按照本書次序細細閱讀，循序前進，切勿跳越。

要真正掌握知識，光靠閱讀是不夠的，必須自己動手去做。數學習題的演算，是爲了深刻理解課文內容，牢固掌握知識技巧

Handwritten: H-1594/06

的一個重要途徑。本書中配有足夠數量的習題，分散在各段各節各章之後，同時，還配有大量的例題，對思考途徑，解題方法，解題步驟，書寫格式，注意事項等作了盡可能詳細的說明。希望讀者對書中的習題，根據例題的示範，盡可能全做或多做，至少亦應選做一半左右，從模仿到創造，逐步提高自己的解題能力，培養自己的解題技巧。除較簡單的題目外，書後有習題答案。讀者應先自獨立做好，再行核對，切忌先看答案再行解題，這對培養自己的獨立思考能力是不利的。帶有星號的習題是比較難的，初次接觸時可以不做。

從本書開始，我們要習慣於用字母表示數。通常用的是拉丁字母。這些字母按我國習慣是照英語讀音的。有時也用希臘字母。本書後面專附一張英語字母表及常用希臘字母表，讀者對這些字母如還不熟悉，必須先化一定時間學會它們的讀法和寫法。

學習是一個從不知到知的過程，在這過程中，不可避免地會遇到一些困難。希望讀者要以堅強的信心和決心，堅持不懈，鍥而不舍，這樣，就一定能夠把代數這門功課學好。

編者

前 言	
第一章 有理數	1
§1.1 算術裏有關數的運算知識的複習	1
§1.2 負數的引進	9
§1.3 有理數	12
§1.4 數軸	13
§1.5 相反的數	15
§1.6 數的絕對值	18
§1.7 有理數大小的比較	19
§1.8 有理數的加法	22
§1.9 加法的運算性質	28
§1.10 有理數的減法	32
§1.11 減法的運算性質	35
§1.12 代數和	38
§1.13 有理數的乘法	39
§1.14 乘法的運算性質	46
§1.15 有理數的除法	49
§1.16 倒數	53
§1.17 除法的運算性質	54
§1.18 有理數的乘方	57
§1.19 一位數與兩位數的平方表	61
§1.20 有理數的運算順序	63
本章提要	64
第二章 代數式	68
§2.1 用字母表示數	68
§2.2 代數式	71
§2.3 列代數式	71
§2.4 代數式的值	75
本章提要	81
第三章 整式	84
§3.1 整式	84
§3.2 單項式	84
§3.3 多項式	87
§3.4 整式的加減法	93
§3.5 去括號與添括號	104
§3.6 整式的乘法	107
§3.7 整式的乘方	117
§3.8 整式的除法	121
§3.9 有餘式的除法	131
§3.1) 乘法公式	133
本章提要	152
第四章 因式分解	156
§4.1 因式分解的意義	156
§4.2 提取公因式的因式分解法	158
§4.3 分組提取公因式的因式分解法	161
§4.4 公式分解法	164
§4.5 二次三項式 x^2+px+q 的因式分解法	174
§4.6 因式分解的一般步驟	179
§4.7 最高公因式	181
§4.8 最低公倍式	184
本章提要	186

第五章 分式	189	§6.1 比	232
§5.1 分式	189	§6.2 比的基本性質	233
§5.2 分式的基本性質	192	§6.3 比的反比	235
§5.3 分式中分子和分母的符 號變換	194	§6.4 比例	237
§5.4 約分	196	§6.5 比例的基本性質	238
§5.5 通分	201	§6.6 解比例	238
§5.6 分式的加減法	205	§6.7 成正比例的量	241
§5.7 分式的乘法	212	§6.8 成反比例的量	244
§5.8 分式的乘方	217	本章提要	248
§5.9 分式的除法	219	總複習題	251
§5.10 繁分式	223	習題答案	256
本章提要	228	附 英語字母表及常用希臘 字母表	271
第六章 比和比例	232		

第一章 有 理 數

讀者們都學過了算術。我們現在要開始學習代數了。代數和算術，雖然是兩門學科，但他們却是緊密地聯系着的。算術裏有許多內容，都是在學習代數時必須用到而且經常要用到的，因此，我們在開始學習代數的時候，要先來複習一下算術裏學過的一些有關數的運算的知識。

§ 1.1 算術裏有關數的運算知識的複習

1. 算術裏學過的數 算術裏學過哪一些數呢？我們先來看一看下面這些數：

(1) 1, 2, 3, 5, 16, 30, 132, 478;

(2) 0;

(3) 3.5, 0.326, 0.0037, 364.24;

(4) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{13}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{13}{7}$.

你認識這些數嗎？能夠說出這四類數的名稱嗎？

在第一類數裏，1, 2, 3, 5, 16等，它們都是在我們數個數時按照1, 2, 3, 4, 5, 6, ……這樣的次序一個一個順次數下去時，總會數到的。這樣的數叫做**自然數**。自然數的個數是無限多的。任何一個自然數總還有比它更大的自然數。

第二類數只有一個，就是0，讀做“零”，它不是自然數。

第一類和第二類數都叫做**整數**，也就是說，**自然數和零都叫做整數**。

第三類數 3.5, 0.326, 0.0037 等叫做小數，小數裏的圓點叫做小數點。

第四類數 $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{13}$, $1\frac{2}{3}$ 等叫做分數。各個分數中間的一劃叫做分數綫，分數綫上面的這個數叫做分子，分數綫下面的這個數叫做分母。

在算術裏所學過的小數，實際上也是分數的一種寫法。例如，3.5 就是 $3\frac{5}{10}$ ，0.326 就是 $\frac{326}{1000}$ ，0.0037 就是 $\frac{37}{10000}$ ，364.24 就是 $364\frac{24}{100}$ 。所以我們說：算術裏所學過的數，就是整數和分數。

2. 算術裏學過的運算

(1) 四種基本運算：我們在算術裏學過哪幾種運算呢？

我們學過四種運算，就是加法、減法、乘法和除法。這四種運算，總起來叫做四則運算。

加法是從兩個加數求它們的和的運算，如 $3+5=8$ ，那就是：

$$\text{加數甲} + \text{加數乙} = \text{和}.$$

任意兩個數，總可以相加，求出它們的和來。

減法是已知兩個加數的和與其中一個加數求另一個加數的運算。已知的和叫做被減數，已知的一個加數叫做減數，所求的另一個加數叫做差，如 $8-5=3$ ，那就是：

$$\text{被減數} - \text{減數} = \text{差}.$$

在算術裏，減法不是一定可以進行的。只有當減數小於被減數或者等於被減數的時候，減法才能够進行。如果減數大於被減數，如 $3-4$ ，在算術裏，這個減法就不能做。

乘法是從兩個數求它們的積的運算，這兩個數一個叫做被乘數，另一個叫做乘數，也可以把這兩個數都叫做因數。如 $8 \times 5 = 40$ ，這裏是：

$$\text{被乘數} \times \text{乘數} = \text{積};$$

或

因數甲 × 因數乙 = 積。

任意兩個數，總可以相乘，求出它們的積來。

除法是已知兩個因數的積與其中一個因數求另一個因數的運算，已知的積叫做被除數，已知的一個因數叫做除數，所求的另一個因數叫做商，如 $40 \div 5 = 8$ ，那就是：

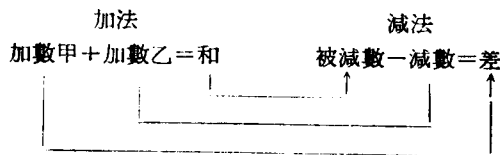
被除數 ÷ 除數 = 商。

當我們只學到整數的時候，除法不一定可以除盡，例如 $16 \div 3$ 就不能除盡，只能得到部分的商 5，同時得餘數 1。但當我們學習了分數以後，那末只要除數不是零，除法就總可以進行，例如

$$16 \div 3 = 5 \frac{1}{3}.$$

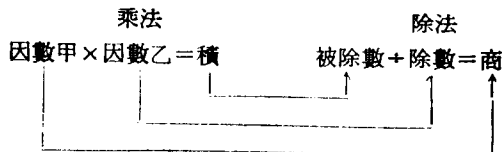
零不能作為除數，因為拿零作為除數是沒有意義的。

(2) 逆運算關係：**減法是加法的逆運算**，減法裏的被減數，就是加法裏的和，減法裏的減數，就是加法裏的一個加數，而減法裏的差，就是加法裏的另一個加數。它們之間的關係如下：



例如 $8 + 5 = 13$ ，即得 $13 - 5 = 8$ ，或 $13 - 8 = 5$ 。

除法是乘法的逆運算，除法裏的被除數，就是乘法裏的積，除法裏的除數，就是乘法裏的一個因數，而除法裏的商，就是乘法裏的另一個因數。它們之間的關係如下：



例如 $8 \times 5 = 40$ ，即得 $40 \div 5 = 8$ ，或 $40 \div 8 = 5$ 。

3. 算術裏學過的運算符號和關係符號 在算術裏，我們學過下面這三類符號：

(1) 有關運算種類的符號：

加號	+	讀做“加”，或“加上”；
減號	-	讀做“減”，或“減去”；
乘號	×	讀做“乘以”；
除號	÷	讀做“除以”。

注 除號的讀法要特別注意，有人讀做“除”，那是不適當的。如 $16 \div 2$ 應該讀做“十六除以二”，不要讀做“十六除二”。我們要養成正確讀出符號的習慣。

分數裏把分子分母隔開的這條“分數綫”，實際上也是一個除號，例如 $\frac{11}{12}$ ，實際上就是 $11 \div 12$ 。

(2) 括號：括號是一種關於運算順序的符號。括號有小括號 ()、中括號 []、大括號 { }。

注 有時還應用“括綫”，例如 $\{[(3-5-4) \times 8 + 3] \times 2 + 1\} \times 3 + 5$ ，小括號裏邊 $5-4$ 的上面的一條綫，就是括綫，表示 $5-4$ 要先進行運算。

在分數裏的分數綫，既有除號的意義，有時也帶有括號的意義，例如 $\frac{25-4}{8+6}$ ， $25-4$ 與 $8+6$ 都要先做，然後再把分子除以分母，這裏的分數綫就既有除號的意義，又有括號的意義。在繁分數裏，我們還要依照分數綫的長

短來確定運算次序的先後，例如 $\frac{32}{4}$ 就是 $32 \div (4+2) = 32 \div 2 = 16$ ，而 $\frac{32}{\frac{4}{2}}$

就是 $(32+4) \div 2 = 8 \div 2 = 4$ 。這裏兩條分數綫的長短，就相當於括號的大小的區別了。

(3) 數的大小關係的符號：在算術裏，我們學習過三種關於數的大小關係的符號：

等號	=	讀做“等於”	例如 $3+5=8$ ，
大於號	>	讀做“大於”	例如 $5>2$ ，
小於號	<	讀做“小於”	例如 $1<4$ 。

4. 算術裏學過的運算順序的規定 在一個包含幾個運算的式子裏，對運算的先後次序，有下面這些規定：

(1) 在一個沒有括號的算式裏，如果只含有加減運算(叫做第一級運算)，或者只含有乘除運算(叫做第二級運算)，應該從左往右依次運算。

(2) 在一個沒有括號的算式裏，如果既含有第一級運算，也含有第二級運算，應該先做第二級運算(乘、除)，後做第一級運算(加、減)。簡單說起來，就叫做“先乘除、後加減”。

(3) 一個算式裏有括號的，括號裏面的運算要先做。如果有幾種括號，先算最裏層的小括號裏面的運算，再算較外面的中括號裏面的運算，最後才算最外面的大括號裏面的運算。如果括號裏面也有幾種運算，同樣按照上面(1)、(2)兩條規定的次序進行演算。

例 1. 計算： $16 + 5 - 8 + 100 - 113$ 。

分析 這裏只有第一級運算——加、減運算，按照規定(1)，運算從左到右一步一步進行。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } 16 + 5 - 8 + 100 - 113 &= 21 - 8 + 100 - 113 \\ &= 13 + 100 - 113 \\ &= 113 - 113 = 0. \end{aligned}$$

例 2. 計算： $18 \div 3 \times 2 \times 4$ 。

分析 這裏只有第二級運算，按照規定(1)，運算從左到右一步一步進行。

$$\text{【解】 } 18 \div 3 \times 2 \times 4 = 6 \times 2 \times 4 = 12 \times 4 = 48.$$

例 3. 計算： $540 \div 18 + 5 \times 64 - 40 \div 2$ 。

分析 這裏既有第一級運算，又有第二級運算，按照規定(2)，先做乘除，後做加減。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } 540 \div 18 + 5 \times 64 - 40 \div 2 &= 30 + 320 - 20 \\ &= 350 - 20 = 330. \end{aligned}$$

例4. 計算： $8 - \{7 - [6 - (5 - 1) - 2] - 1\}$ 。

分析 這裏有三層括號，先做小括號裏面的運算，再做中括號裏面的運算，再做大括號裏面的運算，再做括號外面的運算。每一次把括號內的式子算出結果以後，這個括號就失去作用，可以不必再寫了。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } & 8 - \{7 - [6 - (5 - 1) - 2] - 1\} \\ & = 8 - \{7 - [6 - 4 - 2] - 1\} \\ & = 8 - \{7 - 0 - 1\} = 8 - 6 = 2. \end{aligned}$$

例5. 計算：

$$\{(24 - 16) \times 3 - 4 \times 6\} \div (36 \div 3 - 2 \times 5) + 40\} \div 4.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】 } & \{(24 - 16) \times 3 - 4 \times 6\} \div (36 \div 3 - 2 \times 5) + 40\} \div 4 \\ & = \{[8 \times 3 - 4 \times 6] \div (12 - 10) + 40\} \div 4 \\ & = \{[24 - 24] \div 2 + 40\} \div 4 = \{0 \div 2 + 40\} \div 4 \\ & = \{0 + 40\} \div 4 = 40 \div 4 = 10. \end{aligned}$$

例6. 計算： $\left[\left(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}\right) \div 3\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right] \div 8\frac{8}{9} + \frac{1}{4}$ 。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } & \left[\left(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}\right) \div 3\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right] \div 8\frac{8}{9} + \frac{1}{4} \\ & = \left[4\frac{1}{6} \div 3\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right] \div 8\frac{8}{9} + \frac{1}{4} \\ & = \left[\frac{25}{6} \times \frac{4}{15} - \frac{2}{5}\right] \div \frac{80}{9} + \frac{1}{4} \\ & = \left[\frac{10}{9} - \frac{2}{5}\right] \div \frac{80}{9} + \frac{1}{4} \\ & = \frac{32}{45} \times \frac{9}{80} + \frac{1}{4} = \frac{2}{25} + \frac{1}{4} = \frac{33}{100}. \end{aligned}$$

注意 分數的加減法裏，如原有分母不相同，必須進行通分，在乘除運算中，各個帶分數要化成假分數，並須隨時注意約分，化成最簡分數。

例7. 計算： $3 + \frac{1}{7}$
 $5 - \frac{1}{3}$

分析 這是繁分數，中間的分數綫是兼有括號的作用的，所以 $3+\frac{1}{7}$ 的加法與 $5-\frac{1}{3}$ 的減法都要先做。

$$\text{【解】} \quad \frac{3+\frac{1}{7}}{5-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{22}{7}}{\frac{14}{3}} = \frac{22}{7} \div \frac{14}{3} = \frac{22}{7} \times \frac{3}{14} = \frac{33}{49}.$$

例 8. 計算： $(5\frac{1}{2}-0.37) \times 0.4 + 1\frac{1}{8}$.

分析 這個算式裏既有分數又有小數，因為 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{8}$ 都可以化做有限小數，所以這個題目可以用兩種方法來計算：(1) 把小數先化成分數後再算；(2) 把分數先化成小數後再算。

【解 1】 化成分數做：

$$\begin{aligned} & (5\frac{1}{2}-0.37) \times 0.4 + 1\frac{1}{8} \\ &= (5\frac{1}{2} - \frac{37}{100}) \times \frac{4}{10} + 1\frac{1}{8} \\ &= 5\frac{13}{100} \times \frac{2}{5} + 1\frac{1}{8} \\ &= \frac{513}{100} \times \frac{2}{5} + 1\frac{1}{8} = \frac{513}{250} + 1\frac{1}{8} \\ &= 2\frac{13}{250} + 1\frac{1}{8} = 3\frac{177}{1000}. \end{aligned}$$

2】 化成小數做：

$$\begin{aligned} & (5\frac{1}{2}-0.37) \times 0.4 + 1\frac{1}{8} \\ &= (5.5-0.37) \times 0.4 + 1.125 \\ &= 5.13 \times 0.4 + 1.125 \\ &= 2.052 + 1.125 = 3.177. \end{aligned}$$

例 9. 計算： $(3\frac{1}{3}+0.33) \times \frac{1}{2} - 1.35$.

分析 這裏 $\frac{1}{3}$ 不能化成有限小數，所以要先把小數化成分數後再算。

【解】 $\left(3\frac{1}{3} + 0.33\right) \times \frac{1}{2} - 1.35$

$$= \left(3\frac{1}{3} + \frac{33}{100}\right) \times \frac{1}{2} - 1\frac{35}{100}$$

$$= 3\frac{199}{300} \times \frac{1}{2} - 1\frac{35}{100} = \frac{1099}{300} \times \frac{1}{2} - \frac{135}{100}$$

$$= \frac{1099}{600} - \frac{810}{600} = \frac{289}{600}$$

習題 1.1

回答下列問題(1~7):

1. 寫出三個自然數來。寫出最小的自然數來。有沒有最大的自然數?
2. 在算術裏,“整數”和“自然數”這兩個名稱有沒有區別?有什麼區別?

3. 寫出四個分數來,其中兩個是真分數,兩個是假分數。 $\frac{3}{9}$ 是真分數還是假分數?

4. 寫出三個繁分數來,其中一個的分母是整數,分子是分數;另一個的分母是分數,分子是整數;還有一個的分母分子都是分數。再把它們化成普通分數。

5. 寫出三個小數來,並把它們化成分數。

6. 在算術裏,加法、乘法、減法、除法是不是總可以進行?那些運算在怎樣的情況下不能進行?

7. 零可以做除數嗎?零可以做被除數嗎?

計算(8~20):

8. $328 + 672 + (72 + 9 \times 4)$.

9. $(56 + 44) \times 0 + 1 + 1 + 0 + 100 + 9$.

10. $1 + 2 \times \{2 + 3 \times [3 + 4 \times (4 + 5 \times 6) \times 7 + 8] - 9\}$.

11. $18 + \left\{1 - \left[\frac{2}{5} + \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{5}\right]\right\}$.

12. $\left(13\frac{1}{2} - 3\frac{2}{3} \times 1 + 5\frac{5}{12} + 2\frac{1}{6}\right) \times \frac{3}{37}$.

13. $3.6 + 43.05 + 1.8 - 13.08 - 4.87$.

14. $7.5 \times 15.2 + (38 \times 2.5 \times 0.06)$.

$$15. (3.54 - 2.54 \times 0.7) \times 1.2 .$$

$$16. \left[\left(\frac{1}{2} + 0.3 \right) \times 0.5 + \frac{1}{4} \times 0.16 \right] + 11 .$$

$$17. 0.3 \times 0.2 - \frac{1}{7} \times 0.15 .$$

$$18. \frac{3}{2} - \frac{3}{5} .$$

$$19. \frac{1}{3} + \frac{1}{5} .$$

$$20. \left(1 - \frac{426}{697} + \frac{2 \frac{1}{2}}{8 \frac{1}{2}} \right) + \frac{3 \frac{1}{2}}{5 \frac{1}{8}} .$$

§ 1.2 負數的引進

讓我們看這樣的問題：

在溫度計上，某一天下午的溫度是 7° ，如果半夜裏的溫度比下午的溫度下降 6° ，那末半夜裏的溫度是多少呢？

這個問題很容易做，只要用減法，得

$$7 - 6 = 1,$$

就可以知道半夜的溫度是 1° 。

現在讓我們再看一個類似的問題：

在溫度計上，某一天下午的溫度是 3° ，如果半夜裏的溫度比下午的溫度下降 4° ，那末半夜裏的溫度是多少呢？

這個問題和上面的問題性質是一樣的，照理它也可以用減法來解。

但是，如果我們列出式子，就得到 $3 - 4$ 。

這裏被減數小於減數，在算術裏這個算式是沒有意義的。

這個問題到底有沒有意義呢？

在實際生活中，我們都了解這個問題是有意義的。從 3° 下降 4° ，半夜裏的溫度是零下 1° 。

從溫度計上，我們知道，有零上 1° ，也有零下 1° ，雖然同樣是

1°，實際意義是不同的。要說明它們之間的區別，必須說明是“零上”還是“零下”。



圖 1.1

如果我們想省去“零上”“零下”這些字眼，而又不使零上的度數與零下的度數混淆不清，那麼，除了原有算術裏所學過的數以外，還需要引進新的數來解決這個問題。

我們採用原有的算術裏的數來表示零和零上的度數，如零度寫成 0° ，零上 1° 寫成 1° ，把原來算術裏的數的前面加上一個符號“-”（讀做“負”）來表示零下的度數，如零下 1° 就寫成 -1° ，零下 20° 就寫成 -20° 。這裏 -1 ， -20 是一種新的數，叫做負數。在引進了負數以後，我們把算術裏學過的數，除了 0 以外，都叫做正數。爲了使正數與負數區別清楚起見，我們也可以在正數的前面加上一個符號“+”（讀做“正”），如 20 寫成 $+20$ ， 1 寫成 $+1$ 等。

$+30$ 讀做正三十， -30 讀做負三十，正數前面的“+”號叫做“正號”，負數前面的“-”號叫做“負號”。

注 正號“+”和負號“-”，它們指出數的性質，所以把它們叫做性質符號。

$+1$ ， -1 ， $+20$ ， -20 這些數是不是只有溫度計裏用得到呢？讓我們再看一個例子。

某人在一條公路上騎自行車要從甲地到乙地。有人告訴他要行 20 公里路程。這個人騎自行車走了 20 公里之後一問，並沒有到達乙地，却和乙地相差 40 公里了。

爲什麼會這樣呢？

原來他走錯了一個方向。從甲地到乙地，應該是往東走的，但他却往西走，所以越走越遠了。

從這裏可以看出，路程上也有一個方向的問題。例如向東和