

环与理想

[美] N.H. 麦克可依 著

刘绍谋 译

2

1983.5.

卡拉斯数学专论

第八辑

环

江苏工业学院图书馆

史密斯学院数学教授
藏书章
N.H. 麦克可依著

刘绍谋 译

1983.5.

序

在最近的二、三十年间，由于研究工作者的大量增加，抽象代数已经非常快速和行时地发展起来。事实上，对于一般数学家来说，即使他们的志趣在于其它方面，这个理论的一般方法和基本结果也已经引起他们相当大的兴趣。这个专论的目的是要介绍抽象代数的一个分支，这就不得不涉及环的理论，不得不对这个理论中理想的作用作某些强调。

除了在第八章和第七章的一些地方关于行列式的一些基本定理知识假定为已知外，本书几乎整个地自成一个体系。因此，为了明瞭所举的实例，读者必须具有相当的“数学素养”，同时还要领悟抽象推理的意义。然而，就形式上的技术而言，比代数的基本原理稍多一点的知识，也包含在本书之中。

本书前四章所论述的那些基本概念和结果，在环论的任何分支的进一步研究中，都是十分重要的。然而本专论的其它内容所研究的一些更为专门化的结果，也具有相当广泛的兴趣和应用价值。自然地，由于篇幅的限制，许多具有同等重要性的其它类型的材料不得不加以删削，就大部分内容而言，那些不需要对我们所考虑中环作有限性假定的材料已经精选出来——甚至于条件链的概念直到最后一章的末尾都没有提及。

第五章主要叙述可换环中关于素理想的克鲁尔 (Krull) 结果由于没有有限性条件的限制，所以，在确立素理想的存在

性时就必须应用超限的方法。实际上佐恩(Zorn)的最大原则是完全必要的，并且在本章适当的地方还作了详细的叙述和说明。

第六章阐述了环的子直和的理论。同时也略为介绍环的贾柯勃逊(Jacobson)根。第七章讨论了布尔(Boolean)环和这些环的某些代数的通则。特别地，作为某一个集合的子集，它的任何布尔环的表示的施顿(Stone)定理，是容易从上一章抽绎而出的。

元素在可换环中的矩阵理论是第八章的主题，明显地，在简短的一章中要给这一理论以广泛的说明是不可能的。然而。这一章之所以只作简要的叙述，部分的原因是由于本书还是属于一般入门的性质，部分是由于它的材料只是提供了初等环论中一些基本方法的说明，所以这一章是脱离于前两章而独立成篇的。最后，第九章介绍了可换环中准素理想的研究，本书末尾还对诺德(Noetherian)环和代数流形作了简短的讨论和剖析。

因为本专论的相当部分材料在以前尚未以书的形式出现，那末，或多或少地提供一点较为完整的参考资料还是聊胜于无的，因此，在每一章的末尾都附有一个参考书目，作为该章一般材料的补充，同时，对于在所能得到的论文中尚未论证的一些较专门化的结果，也附有偶或有用的资料出处，本书背后的文献绝不是完全的；就大部分内容而言，只是在本书中某些方面有参考价值的那些项目才列在其中。

在这里要一一列出我所参考的书和论文是不可能的。但是，我却要破例地提到那本引起了人们对抽象代数的普遍兴趣，而起了重要作用的B·L·范德瓦尔登的《近世代数》，

就内容而言，本专论前四章的很多地方和最后一章的小部分都采用B·L·范德瓦尔登的论文内容与材料。

我衷心地感谢Bailey Brown教授，R·E·Johoson教授和Saunders MacLane教授，他们曾细读了本书的全部原稿并提出很多有益的建议，特别是Brown教授对这个专题一开始就非常热心，同时，我在与他多次的讨论中也获益不浅，他不仅以特别精细和评品的态度读完了本书所有的原稿，而且在校订本书的证明中一直给我无可估量的帮助。

尼尔·亨利·麦克可依于马萨诸塞州诺塞姆顿城

1947. 8. 22.

书 目 提 要

Albert, A. A.

[1] *Modern Higher Algebra*, Chicago, 1937.

[2] *Introduction to Algebraic Theories* Chicago, 1941.

Artin, E., Nesbitt, C. J. and Thrall, R. M.

[1] *Rings With Minimum Condition*, Ann Arbor, 1944.

Birkhoff, G.

[1] *Subdirect unions in universal algebra*,
Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 50(1944)pp. 764—768.

Birkhoff, G. and MacLane, S.

[1] *A Survey of Modern Algebra*, New York, 1941.

Bochner, S.

[1] *Lectures on Commutative Algebra*, Princeton Univ. Lectures, 1937—1938 (Planographed).

Bourbaki, N.

[1] *Eléments de mathématique. part 1. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I. Algèbre. Chapitre I. Structures algébriques* (Actual. Sci. Ind. no. 934) Paris, 1942.

Brown, B. and McCoy, N. H.

[1] *Rings with unit element which contain a given ring.* Duke math. Jour., Vol. 13(1946)pp. 9—20.

[2] *Radicals and Subdirect Sums,* Amer. Jour math., Vol. 69(1947)pp. 46—58

Busemann, H.

[1] *Introduction to Algebraic Manifolds,* Princeton Univ. Press, 1939(planographed).

Dickson, L. E.

[1] *Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory,* Leipzig 1901.

[2] *Modern Algebraic Theories,* Chicago, 1926,

Dubreil, P.

[1] *Algèbre. Vol. 1. Equivalences opératoires groupées, anneaux, Corps.* (Cahiers Scientifiques, no. 20), Paris, 1946.

Forsythe, A.

[1] *Divisors of Zero in polynomial rings,* Amer. Math. Monthly vol. 50 (1943) pp.7—8.

Forsythe, A. and McCoy, N. H.

[1] *On the Commutativity of certain rings,* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 52(1946), pp.523—526.

Fraenkel, A.

[1] *Über die Teiler der Null und der Zerlegung von Ringen,* Jour. Reine Angew. Math., Vol. 145 (1915), pp. 139—176.

Grell, H.

[1] *Beziehungen zwischen Idealen verschiedener Ringe*, Math. Ann. Vol. 97 (1927), pp. 490—523.

Halmos, P. S.

[1] *Finite Dimensional Vector Spaces*, Annals of Mathematics studies, no. 7, Princeton, 1942.

Jacobson, N.

[1] *The Theory of Rings*, New York, 1943.

[2] *The radical and Semi—simplicity for arbitrary rings*, Amer. Jour. Math., Vol. 67 (1945), pp. 300—320.

[3] *Structure theory for algebraic algebras of bounded degree*, Annals of Math., Vol. 46 (1945), pp. 695—707.

Köthe, G.

[1] *Abstrakte Theorie nichtkommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen*, Math. Ann., Vol. 103, (1930), pp. 545—572.

Krull, W.

[1] *Ein neuer Beweis für die Hauptsätze der allgemeinen Idealtheorie* Math. Ann. Vol. 90 (1923), pp. 55—64.

[2] *Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung*, Math. Ann., Vol. 101 (1929), pp. 729—744.

[3] *Idealtheorie*, Berlin, 1935.

[4] *Enzyklopädie der Mathematischen Wissens—*

chaften (second edition), Vol. I, part B, Algebra:
I, 1, 11: *Allgemeine Modul-, Ring- und Ideal-*
theorie,

I. 1, 12: *Theorie der polynomideale und Elim-*
inationstheorie,

Leipzig and Berlin, 1939.

Macaulay, F. S.

[1] *The Algebraic Theory of Modular Systems*,
Cambridge Tracts in Mathematics and Mathema-
tical physics, no. 19, London, 1916.

MacDuffee, C. C.

[1] *The Theory of Matrices*, Berlin, 1933.

[2] *An Introduction to Abstract Algebra*, New
york, 1940.

[3] *Vectors and Matrices*, Carus Mathematical
Monographs, no. 1, Ithaca, 1943.

McCoy, N. H.

[1] *Subrings of infinite direct sums*, Duke
Math. Jour., Vol. 4(1938), pp. 486—494.

[2] *Concerning matrices with elements in a com-*
mutative ring, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 45
(1939), pp. 280—284.

[3] *Divisors of zero in matrix rings*, Bull.
Amer. Math. Soc., vol. 47(1941), pp. 166—172.

[4] *Remarks on divisors of zero*, Amer. Math.
Monthly, Vol. 49(1942), pp. 286—295.

[5] *Subdirectly irreducible commutative rings*,
Duke Math. Jour. vol. 12(1945), pp. 381—387.

[6] *Subdirect sums of rings*, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 53(1947), pp. 856—877.

McCoy, N. H. and Montgomery, D.

[1] *A representation of generalized Boolean rings*, Duke Math. Jour., vol. 3 (1937), pp. 455—459.

Von Neumann, J.

[1] *On regular rings*, proc. Nat. Acad. Sci., vol. 22(1936), pp. 707—713.

[2] *Continuous Geometry*, Princeton Univ. Lectures, 1936—37(planographed).

Noether, E.

[1] *Idealtheorie in Ringbereichen*, Math. Ann., vol. 83(1921), pp. 24—66.

Stone, M. H.

[1] *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 40(1936) pp. 37—111.

[2] *The theory of Real Functions*, Harvard Univ. Lectures, 1940(Lithoprinted).

Tukey, J. W.

[1] *Convergence and Uniformity in Topology*, Annals of Mathematics Studies, no. 2, Princeton, 1940.

Van der Waerden, B. L.

[1] *Moderne Algebra*, Vols. 1 and 2, Berlin, 1930 and 1931; 2nd edition, vol. 1, 1937; vol. 2, 1940.

[2] *Algebraische Geometrie*, Berlin, 1939. Reprinted, New York, 1945.

Wedderburn, J. H. M.

[1] *A theorem on finite algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 6(1905), pp. 349—352.

[2] *Lectures on Matrices*, American Mathematical Society. Colloquium publication, vol. 17, New York, 1934.

Weil, A.

[1] *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society. Colloquium publication, vol. 29, New York, 1946.

Zariski, O.

[1] *A new proof of Hilbert's Nullstellensatz*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 53(1947), pp. 362—368.

Zorn, M.

[1] *A remark on method in transfinite algebra*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 41(1935), pp. 667—670.

汉英术语索引

一 画

- 1—1对应 *One-to-one correspondence* (62)
一个元素的象 *Image of an element*..... (61)
一个理想的象 *Image of an ideal*..... (67)
一个流形的理想 *Ideal of a manifold*..... (184)
一个理想的基 *Basis of an ideal* (52)
一个理想的流形 *Manifold of an ideal*..... (184)
 p —环 *p-ring* (129, 130)

三 画

- 子集 *Subset* (4)
子集的环 *Ring of subset*..... (4, 126)
子环 *Subring*..... (2, 47)
子直和 *Subdirect sum*..... (109)
子直可约 *Subdirectly reducible* (115)
子直不可约 *Subdirectly irreducible* (115)

四 画

- 不定元 *Indeterminate*..... (27)
双边理想 *Two-sided ideal*..... (47)
分配律 *distributive laws* (1)

元素的和	<i>Sum of element</i>	(1)
元素的积	<i>product of element</i>	(1)
不可换环	<i>Noncommutative ring</i>	(8)
不可约理想	<i>Irreducible ideal</i>	(180)
不可约流形	<i>Irreducible manifold</i>	(186)
不可约多项式	<i>Irreducible polynomial</i>	(39)
无赘表示	<i>Irredundant representative</i>	(165)
不相对于一个理想	<i>Unrelated to an ideal</i>	(96)
升链条件	<i>Ascending chain condition</i>	(174, 175)

五 画

加 法	<i>Addition</i>	(1)
包 含	<i>contain</i>	(48, 89)
对称律	<i>Law of symmetry</i>	(25)
主理想	<i>principal ideal</i>	(49)
可约多项式	<i>Reducible polynomial</i>	(39)
可约理想	<i>Reducible ideal</i>	(180)
可约流形	<i>Reducible manifold</i>	(186)
右因子(除子)	<i>Right factor (divisor)</i>	(35)
右剩余	<i>Right remainder</i>	(34)
正则环	<i>Regular ring</i>	(132)
左因子(除子)	<i>Left factor (divisor)</i>	(35)
左剩余	<i>Left remainder</i>	(34)
由一个元素生成的理想	<i>Ideal generated by an element</i>	(49)
由多个元素生成的理想	<i>Ideal generated by several elements</i>	(52)

布尔环	<i>Boolean ring</i>	(126)
布尔代数	<i>Boolean algebra</i>	(124)
代数基本定理	<i>Fundamental theorem of algebra</i>	(77)
代数流形	<i>Algebraic manifold</i>	(184)

六 画

交换群(阿贝尔群)	<i>Abelian group</i>	(9)
交换元素	<i>Commutative elements</i>	(8)
交换律	<i>Commutative law</i>	(1)
交换环	<i>Commutative ring</i>	(8)
次 数	<i>Degree</i>	(29, 42, 44)
因子定理	<i>Factor theorem</i>	(35)
有限域	<i>Finite field</i>	(20)
同 态	<i>Homomorphish</i>	(60)
同态象	<i>Homomorphic image</i>	(61)
同 构	<i>Isomorphism</i>	(62)
同构象	<i>Isomorphic image</i>	(62)
交	<i>Meet</i>	(93)
多项式	<i>polynomial</i>	(27)
自反律	<i>Reflexive law</i>	(25)
有限子集的环	<i>Ring of finite subsets</i>	(6)
传递律	<i>Transitive law</i>	(25)
余(补)	<i>Complement</i>	(85)
完全直和	<i>Complete direct sum</i>	(111, 113, 114)
伽罗华域	<i>Galois field</i>	(20)

纯量矩阵	<i>Scalar matrix</i>	(138)
佐恩引理	<i>Zorn's Lemma</i>	(90)

八 画

空 集	<i>Void set</i>	(4)
环	<i>Ring</i>	(1)
表示为子直和	<i>Representation as subdirect sum</i>	(114)
拟一正则元素	<i>Quasi-regular element</i>	(118)
实四元数环	<i>Ring of real quaternions</i>	(8)
环的最大理想	<i>Maximal ideal in a ring</i>	(71, 89)
孤立成份	<i>Isolated component</i>	(174)
孤立准素成份	<i>Isolated primary component</i>	(174)
线性系统	<i>Linear system</i>	(90)
除 环	<i>Division ring</i>	(16)
除法变换	<i>Division transformation</i>	(32)
单位元	<i>Unit element</i>	(13)
直 和	<i>Direct sum</i>	(102, 105)
抽象恒等环	<i>Abstractly identical rings</i>	(64)

九 画

结合律	<i>Associative laws</i>	(1)
相 等	<i>Equality</i>	(24)
逆(元)	<i>Inverse</i>	(14)
逆 象	<i>Inverse image</i>	(67)
首系数	<i>Leading coefficient</i>	(29)

首 1 多项式	<i>Monic polynomial</i>	(29)
真零因子	<i>proper divisor of zero</i>	(12)
相对于一个理想	<i>Related to an ideal</i>	(96)
结 式	<i>Resultant</i>	(154)
项	<i>Term</i>	(41)

十 画

矩阵环	<i>Ring of matrices</i>	(7, 137)
根	<i>Root</i>	(35)
矩阵的秩	<i>Rank of a matrix</i>	(143)
根理想	<i>Radical ideal</i>	(182)
准素理想	<i>primary</i>	(162)
乘 法	<i>Multiplication</i>	(1)
乘法系统	<i>Multiplicative system</i>	(79)
矩 阵	<i>Matrix</i>	(136, 142)
流 形	<i>Manifold</i>	(184)
核	<i>Kernel</i>	(66)
贾柯勃逊根	<i>Jacobson radical</i>	(118, 119)
特征数	<i>Characteristic</i>	(21)
特征理想	<i>Characteristic ideal</i>	(147)
特征多项式	<i>Characteristic polynomial</i>	(147)

十一画

逻辑代数	<i>Algebra of logic</i>	(124)
常数项	<i>Constant term</i>	(29, 42)
域	<i>Field</i>	(19)

理想	<i>Ideal</i>	(46)
理想的交集	<i>Intersection of ideals</i>	(68)
理想的根	<i>Radical of an ideal</i>	(88)
商环	<i>Ring of quotients</i>	(79, 84)
斜域	<i>Skew field</i>	(17)
理想的和	<i>Sum of ideals</i>	(69)
理想的并集	<i>Union of ideals</i>	(69)

十二画

集合的并集	<i>Union of sets</i>	(89)
集合的交集	<i>Intersection of sets</i>	(5)
集合的和	<i>Sum of sets</i>	(5, 125)
集合的积	<i>Product of sets</i>	(5, 125)
解	<i>Solution</i>	(183)
短表示	<i>Short representation</i>	(173)
剩余类	<i>Residue class</i>	(57)
剩余类环	<i>Residue class ring</i>	(57)
剩余定理	<i>Remainder theorem</i>	(34)
属于一个理想的素理想	<i>Prime ideal belonging to an ideal</i>	(164, 171, 173)
属于一个理想的最小素理想	<i>Minimal prime ideal belonging to an ideal</i>	(92)
幂零元	<i>Nilpotent element</i>	(89)
诺德环	<i>Noetherian ring</i>	(177)
最小函数	<i>Minimum function</i>	(146)