

經濟數學與統計

**Mathematics and Statistics
for Economists**

Gerhard Tintner
Charles B. Millham 著

高 翠 蓮 譯

經濟學名著翻譯叢書第一三五種

經濟數學與統計

中華民國六十八年十一月出版

原 著 者 G. Tintner 著
 C. B. Millham

翻 譯 者 高 翠 蓮

編 印 者 臺灣銀行經濟研究室
 臺 北 市 重 慶 南 路

發 行 者 臺 灣 銀 行
 臺 北 市 重 慶 南 路

經 售 者 中 華 書 局
 臺 北 市 重 慶 南 路

 中央文物供應社
 臺 北 市 仁 愛 路

印 刷 者 臺灣省政府印刷廠
 臺 中 縣 大 里 鄉 中 興 路

二版序言

本書為1953年版之修訂本。於此修訂版中，我們自擴大的法文譯本 (*Mathématiques et statistiques pour les économistes*, Paris: Dunod, 1962)中摘錄頗多，並融合丁特勒氏(Tintner)之德文譯本(*Handbuch der Oekonometrie*, Berlin, Springer, 1960)中某些資料。本書也已有俄文譯本 (*Vvednie v ekonometriu*, Izdatel'stvo Statistika, Moscow, 1965)，而日文譯本之序言亦附錄於下文。韓文譯本且於1965年出版。

本修訂版新加各節為：1. 基本的集合論；2. 成對的序對與卡蒂森乘積；3. 排列與組合，二項式定理；4. 關係；19. 以克魯特法對直線方程體系求其數字解；33. 不等式；34. 直線型規劃：圖形解；35. 直線型規劃：一般型；36. 單純形法；37. 投入—產出分析；38. 正方矩陣：加法與減法，與純量相乘；39. 兩正方矩陣之相乘；40. 向量，逆矩陣，克魯特法；42. 以克魯特法計算行列式；43. 虛數與複數；44. 二階有限差分方程；93. 微分方程；94. 變分學之要素；123. 複迴歸與相關；124. 認定；125. 直線型加總。而且，原來的許多章節也經部分修改，並在習題中加進新的問題。

由目次中，讀者應可了解，作者欲將本書編得更配合當前需要所花費之苦心，例如加入數理經濟學，作業研究與計量經濟學等之現代的數學方法。

本書原稿係由作者在Iowa State University(Ames Iowa), the University of Pittsburgh, the University of Southern California(Los Angeles)幾所大學教學之講義編成，期使一般經濟學系學生，不論大學部或研究所者，皆能具備某些數學及統計學方面的知識，以便了解現代經濟理論的發展，以及由計量經濟中導出之實證結果。本書包括在經濟學上運用之基本數學，以及討論一些有關微積分、

機率論、基本統計學之粗淺問題。文內所舉的例子都取自經濟學。一般經濟學系學生時常感覺沒有時間深入研習這些領域的問題，然而，本書實際上用到的數學觀念並不多，相信只需具有一些代數與基本三角學觀念便够了；惟對基本經濟學則需有深刻了解。我們希望，學生或讀者於深入研讀本書後，能獲得足夠的統計與數學知識，足以閱讀刊載在下列諸雜誌之文章，如 *Econometrica*, *International Economic Review*, *the Journal of the American Statistical Association*, *American Economic Review*, 等等。

本書旨在訓練未來的經濟學家，而非數學專家，故常用直接說明的方式來代替嚴謹的數學證明。詳盡的證明不在本書範圍內，相信它亦非多數讀者與學生之能力所及。想要深入研究之讀者，儘可參閱書末附錄中之書目。

本書習題部分包括很多實證例子，是由多位計量專家以具體的統計資料為基礎，再運用統計方法求得者，並具有經濟理論上之意義。例中之實證關係應予以小心解釋，它們僅表示變數間經估計而得到之關係。作者希望經由這些理論與實際相互配合之例子，激發經濟學家對數學、統計學之研究興趣，而在這個領域中作更深入之探討。

本書例子所用之數學圖表，見書末附錄，或 Harold D. Larsen 的 *Rinehart Mathematical Tables, Formulas and Curves*, 擴大版 (紐約: Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1953)

本書之完成，得感謝下列諸位同仁之幫忙：Iowa State Univ. (Ames) 之 E. S. Allen, 已故的 D. L. Holl, B. Vinograde, W. G. Murray, 已故的 E. R. Smith, K. Fox 及 Pittsburgh 大學之 B. Chinitz, 南加大之 A. Morgner。以前的一名學生 F. Jarred (澳洲之 Adelaide 大學) 亦協助解答部分習題。

洛杉磯 1969 年 11 月

—G. T. —C. B. M.

日本譯版序言

作者深深慶幸本書能有日文譯版。日本學者最近在數理經濟、機率論、數理統計與計量經濟等方面均有相當的貢獻。本書致力使具有初級基本數學訓練之經濟學家，能在這些方面有初步的認識。

簡言之，本書旨在使熟悉當代經濟理論之經濟學者，對近年來日趨重要之計量經濟方法有初步了解。

根據Oskar Lange教授之定義：「經濟學為管理人類社會稀少資源之一門科學」。^①

計量經濟係經濟學領域中之一種特殊方法，它融合數理經濟理論與數理統計學，目的在於得到某些數字結果，以證明經濟法則與定理。^②

本人極願意利用這個機會，說明計量經濟對經濟政策之重要性。我們應注意，經濟學是「正反」的科學，至於「對錯」等道德上判斷之敘述不能適用於經濟學及計量研究。經濟政策的原則無法利用數學或非數學方法，經由經濟理論導出，而係基於倫理和道德上之考慮，或由此領域工作者之政治觀念導出。計量經濟對經濟政策的問題只能作如下貢獻：有時我們能由調查資料中導出與事實極為近似的數字關係，並指出，若我們的實證關係成立的話，此一近似的結果亦成立。

舉例說明之，假設我們考慮由實證資料導出需求函數，即某商品在市場上，其價格與數量間之關係（見本書11節）。於書中討論的某些情況下，我們可由市場上搜集的資料，以一些統計方法導出此需求函數之近似值（見第122節）。

由經濟理論可知，一般而言，需求函數為負斜率，即，在其它情況不變時，商品的價格愈高，市場上之需求量愈少。此一法則唯一的例外是劣等財——當所得愈高，價格不變時，對該商品消費數量

愈少。又需求函數全部性質皆可以數理經濟方法說明之(第87節)。

由計量經濟可進一步導出，於某些情況下，存在於市場之實際需求函數近似值(第122節)。此種計量關係者有該商品的生產者與消費者，亦與交易市場的組織相關。至目前為止，我們所討論的人或組織均未將政府包括在內，亦即在一沒有任何政府干預的理想自由放任經濟體系中。計量經濟便是處理其中人物的關係，例如市場研究。

若考慮政府干預的情況，如限價政策，此時計量經濟結果若可靠的話，則具有相當重要性，設政府固定某項商品價格，則以統計方法導出之計量經濟關係，即需求函數，可給予如下問題有近似解值：其他情況不變時，價格固定，市場的銷售量若干？

我們可以想像，若價格訂得太高，以致商品之銷售量可能極少，也許因此對人們的健康有致命的影響。請注意，支持或反對限價政策絕非計量經濟的範疇，計量經濟只指出，若求得之計量關係成立的話，實行某政策結果大致如何。

政府可以經由多種形式干預經濟體系，如保護關稅、公共事業的控制，以至於計畫經濟中，幾乎完全地操縱整個經濟體系的運行皆是。在此，我們願意再強調，支持或反對任何經濟政策，並非計量經濟學家的事情。他們僅指出，基於所導出的計量經濟關係，某項經濟政策的效果為何。因此，設若制定多項財政和貨幣政策，凱因斯學派的計量模型可能很有用(習題42，8—11題)；至若更廣泛的經濟計畫，如戰時經濟體系，或聯合的經濟計畫，則李昂鐵夫的投入—產出分析可能較有用(習題18，第10題)。

有人認為，數學不能運用到社會科學、或經濟學，只因其基本關係不可數量化，除了某些有關效用或選擇的靜態理論外，作者懷疑此一敘述之一般性。數學，尤以當代數學，常與非數量的關係密切相關。例如，處理純粹序列性關係，見87節(習題87，第13題)，其中對選擇或無差異分析處理有一簡短的介紹。當然，像本書這

種介紹性的教科書，是無法深入探討這些問題的。有興趣的讀者請參閱附錄A「爲更深入研究者之建議」中所提到之書目。

自古迄今，很多著名的數理經濟文獻，皆經過人爲的努力加以數量化，或至少特意予以數學化的。此處，僅提及馬克斯（Karl Marx）的資本論（Das Kapital）一書中有名的勞動價值論，和以後接着以數學加以討論之Von Bortkiewics^③及P. M. Sweezy^④。對馬克斯資本論之其他部分，應用數學方式加以討論者有Shigeto Tsuru^⑤。另一著名的例子，是由Von Boehm-Bawerk所著之“Positive Theorie des Kapitals”，續由Knut Wicksell以數學在其“Über Wert, Kapital und Rente”^⑥一書重加討論並作分析。作者並不認爲，有名的經濟學家以非數學方式提出之理論，與其門徒日後所發展之數學模型，在本質上有任何基本的差異；只覺得數學能將其中邏輯與隱含之假定，闡明得更清楚而已。

許多當代的哲學家與邏輯學家認爲數學實在是邏輯學的一支；而且，沒有人否認當今的數學邏輯與數學之間有很密切之關係。因此，我無法了解，任何運用邏輯，亦即運用推論方法以建立經濟模型者，竟能否認數學在經濟學上之運用。

對極端的歷史學派或制度學派，上述結論並不爲真，然而，我們可看到，這些學派之影響正日趨式微。

當然，我們無法事前證明數學與計量方法必可成功，但，對任何科學方法亦然。希望讀者或學生以開放的心胸接受這些方法，在經濟學領域中，小心地運用計量方法，來對計量作實際而公平的評價。最後，作者惟願本書能引起經濟學系學生對這些現代方法之興趣，從而進一步激勵其對計量之研究。

① O. Lange: "The Scope and Method of Economics," *Review of Economic Studies*, 1945, Vol. 13, p. 19.

② G. Tintner: "The Definition of Econometrics," *Econometrica*, 1953, Vol. 21, pp. 31—40. Japanese translation: *Bulletin of the Bureau of Statistics, Office of the Prime Minister*, March 1954, Vol. 3, no. 6, pp. 57—69.

③L. von Bortkiewicz: *Wertrechnung und Preisrechnung in Marx'schen System*, "Archiv fuer Sozialwissenschaft und Sozialpolitik," 1906, Vol. 23, pp. 445—488.

④P. M. Sweezy: *The Theory of Capitalist Development*, New York: Oxford University Press, 1942, pp. 123—125.

⑤Shigeto Tsuru: "On Reproduction Schemes," Appendix A of P. M. Sweezy: op. cit., pp. 365—374.

⑥K. Wicksell: *Ueber Wert, Kapital und Rente nach den neuen national-ökonomischen Theorien*, Jena: Gustav Fischer, 1893.

經濟數學與統計 目 錄

二版序言.....	(I)
-----------	-----

日本譯版序言.....	(III)
-------------	-------

第一編 經濟學常用到之一些基本數學 觀念	(1)
-------------------------------	-----

第一章 集合、函數、圖形	(1)
--------------------	-----

1. 基本的集合論	(1)
2. 序對與卡蒂森乘積	(4)
3. 排列與組合，二項式定理	(6)
4. 關係.....	(10)
5. 函數.....	(11)
6. 函數之例子與討論.....	(12)
7. 直角座標.....	(13)
8. 方程式之圖形.....	(15)

第二章 有一個未知數之直線方程式， 二次方程式	(19)
----------------------------------	------

9. 直線方程式.....	(19)
10. 直線方程式之圖形.....	(20)
11. 直線型之需求函數.....	(24)
12. 直線型供給函數.....	(27)
13. 市場均衡.....	(30)

14. 租稅	(33)
15. 二次的需求和供給曲線	(36)
第三章 直線方程體系	(39)
16. 多於一個未知數的直線方程式	(39)
17. 多種商品之市場均衡	(42)
18. 設算	(44)
19. 以克魯特法解直線方程體系	(47)
第四章 對數	(53)
20. 巴萊圖的所得分配	(53)
21. 固定彈性的需求曲線	(57)
第五章 級數	(61)
22. 算術級數	(61)
23. 算術級數之和	(63)
24. 企業之成長	(64)
25. 幾何級數	(65)
26. 幾何級數之和	(67)
27. 人口	(68)
28. 複利	(69)
第六章 行列式	(73)
29. 二秩行列式	(73)
30. 以子式作行列式之展開	(75)
31. 以行列式解三個未知數之直線方程體系 ..	(78)
32. 以克魯特法，解行列式	(80)

第七章	不等式、線型規劃，投入— 產出分析	(85)
	33. 不等式	(85)
	34. 線型規劃：圖解法	(89)
	35. 線型規劃：一般型	(92)
	36. 單純形法	(100)
	37. 投入—產出分析	(106)
第八章	矩陣	(115)
	38. 正方矩陣，加法和減法與純量相乘	(115)
	39. 兩個正方矩陣之相乘	(118)
	40. 向量、逆矩陣、克魯特法	(120)
第九章	常數係數之直線差分方程式	(129)
	41. 一階齊次差分方程式	(129)
	42. 一階非齊次差分方程式	(131)
	43. 複數	(134)
	44. 二階有限差分方程式	(139)
第二編	微積分	(145)
第十章	函數、極限與導來式	(145)
	45. 更進一步探討有關函數關係者	(145)
	46. 需求函數和總收益函數	(148)
	47. 總成本函數與平均成本函數	(151)
	48. 差分之商	(153)
	49. 極 限	(157)
	50. 導來式	(162)

51. 邊際成本	(166)
52. 邊際收益	(168)
第十一章 微分之法則	(173)
53. 指數之導來式	(173)
54. 一常數倍數的函數之導來式	(174)
55. 函數和與函數差之導來式	(176)
56. 一常數的導來式	(178)
57. 一乘積之導來式	(179)
58. 兩函數商之導來式	(182)
59. 函數之函數的導來式	(184)
第十二章 對數與指數函數之導來式	(189)
60. 數 e	(189)
61. 自然對數	(190)
62. 對數函數之導來式	(192)
63. 一般對數之微分	(195)
64. 指數函數之導來式	(197)
第十三章 導來式在經濟上之運用	(201)
65. 彈性	(201)
66. 需求彈性	(202)
67. 邊際收益與需求彈性	(204)
68. 第一次導來式之更進一步的幾何意義	(206)
第十四章 較高次之導來式	(209)
69. 較高次之導來式	(209)
70. 二次導來式之幾何說明	(210)

71. 遞增與遞減的邊際成本	(213)
----------------	-------

第十五章 一變數之極大與極小值，轉折

點	(217)
---	-------

72. 具一個變數函數之極大與極小值	(217)
--------------------	-------

73. 獨 占	(221)
---------	-------

74. 平均與邊際成本	(225)
-------------	-------

75. 轉折點	(227)
---------	-------

第十六章 多個變數函數之導來式

76. 多個獨立變數之函數	(231)
---------------	-------

77. 偏導來式	(232)
----------	-------

78. 邊際生產力	(235)
-----------	-------

79. 需求之偏彈性	(237)
------------	-------

80. 隱函數之微分	(241)
------------	-------

第十七章 齊次性

81. 齊次函數	(247)
----------	-------

82. 尤勒定理	(249)
----------	-------

第十八章 高次偏導來式與其運用

83. 高次偏導來式	(253)
------------	-------

84. 具多變數之極大與極小值	(255)
-----------------	-------

85. 聯合生產	(258)
----------	-------

86. 有限制條件之極大值與極小值	(260)
-------------------	-------

87. 效用理論	(262)
----------	-------

88. 於自由競爭下之生產	(265)
---------------	-------

第十九章 積分之要素、微分方程、

變分學	(269)
89. 反導來式	(269)
90. 邊際成本、總成本、平均成本	(271)
91. 積分	(273)
92. 消費者剩餘	(277)
93. 微分方程式	(280)
94. 基本變分學	(285)
第三編 機率和統計學	(289)
第二十章 機 率	(289)
95. 機 率	(289)
96. 機率之法則	(291)
97. 機率分配	(296)
第二十一章 隨機變數	(303)
98. 數學期待值	(303)
99. 數學期待值之計算	(306)
100. 一些簡單的存貨問題	(312)
第二十二章 動 差	(321)
101. 對原點之動差	(321)
102. 關於數學期待值之動差	(323)
第二十三章 二項與常態分配	(327)
103. 重複試驗與二項分配	(327)
104. 常態分配	(331)
105. 波氏過程	(340)

106. 排隊理論之要素	(342)
第二十四章 抽樣理論之要素	(345)
107. 估 計	(345)
108. 次數分配	(354)
109. 樣本均數與變異數	(356)
110. 薛普氏修正	(362)
111. 信賴限	(363)
第二十五章 假設之檢定	(369)
112. 統計假設之檢定 (大樣本)	(369)
113. 統計假設之檢定 (小樣本)	(371)
114. 兩個樣本顯著性之測驗	(373)
第二十六章 各項分配之配合	(381)
115. 常態分配之配合	(381)
116. 配適度之檢合	(384)
117. 列聯表	(387)
第二十七章 迴歸和相關	(391)
118. 最小平方方法	(391)
119. 曲線之配合	(392)
120. 簡單迴歸	(401)
121. 簡單相關	(407)
122. 配合需求與供給曲線	(414)
123. 複迴歸與相關	(425)
124. 認 定	(440)
第二十八章 加總與指數	(449)

125. 直線加總	(449)
126. 指 數	(454)
附錄A 爲更進一步研究所作之建議	(461)
附錄B 部分習題解答	(465)
附錄C 附 表	(513)
附錄D 數學與統計學術語索引	(519)
表1. 普通對數表	(519)
表2. 三角函數表	(521)
表3. 自然對數表	(525)
表4. 常態曲線下之面積	(527)
表5. t 分配表	(528)
表6. X^2 機率表	(529)
表7. F 與 t 值	(530)
附錄E 索引	(535)
附錄F 經濟術語索引	(555)