运筹学及其BASIC程序

张 福 德 编译

一九八一年十月

运筹学及其BASIC程序

张福德　编译

长春市科协自动化技术研究会
吉林工业大学系统工程研究室

一九八一年十月

内 容 提 要

本书有分配模型、动态规划模型、库存管理模型。分配模型介绍了Hanger rear 法；动态规划模型有资本投资、最短路线、生产计划、设备更新等模型；库存管理模型有确定型和概率型多种模型。各数学模型均有数值举例、BASIC 程序清单、试算数据和打印结果等。

本书的主要特点在于，利于小巧灵活、便利可靠的微型机，使用简单易懂的BASIC 语言，解决或处理较复杂的运筹学问题。

本书可供电子计算机应用研究人员、程序设计员，以及运筹学、经营管理、工业技术经济、系统工程研究人员和有关大专院校师生参考。

编译者说明

本书编译自日本《微型机》杂志(《マイコン》)1980年11月号至1981年10月号中的《*BASIC*与运筹学专集》(*BASIC* & *OR* シリーズ)。原文著者有日本足利工业大学的山城光雄、玄 光男、井田憲一等。

运筹学是一门新兴的"软科学"，它利用现代数学及计算机科学的成就，定量地运筹人类所从事的各种活动，帮助人们选定最合理的活动规律，做出最优决策，制订出最优行动方案，充分运用有限的人力、物力、财力、时间、空间等资源，尽可能地多创造出财富，使人们获得更大的效益。近几年来，运筹学应用范围迅速扩大，广泛应用于经营管理、工业技术经济、系统工程等科学领域。

一般来说，运筹学问题是比较复杂的，需要利用电子计算机求解，目前，多半使用高级算法语言，如*FORTRAN*等编制程序，需要用较大型的电子计算机进行运算。

本书的特点在于，使用较简单易懂的*BASIC*语言，利用小巧灵活、便利可靠的微型电子计算机，处理和解决较复杂的运筹学问题。这也是编译本书的主要原因。

本书有三章。第一章：分配模型，介绍了*Hanger rear*法；第二章：动态规划模型，有资本投资、最短路线、生产计划和设备更新等模型；第三章：库存管理模型，有确定型和概率型多种模型。(第四章以后在第二册)。各数学模型均有数值举例、*BASIC*程序清单、试算数据和打印结果等，并利用非正式语言介绍了算法。

本书的出版曾得到长春市科协自动化技术研究会、吉林工业大学系统工程研究室的大力支持。曾得到吉林工大系统工程研究室主任、副教授沈景明同志、中国科学院应用数学研究所副研究员董泽清同志和哈尔滨工业大学张福恩同志的帮助。特在此表示衷心的感谢。

由于编译者水平有限、上机条件也有限，错误难免，欢迎读者批评指正。如本书能对读者有所裨益，编译者将感到欣慰。

编译者　张福德

一九八一年十月于长春

目　录

第一章　分配模型

所谓分配问题（*Assignment Problem*），一般是指已知有 n 个设施和 n 种工作时，分别向各个设施仅分配一项工作，并且在给定的评价标准下，使其分配为最优的问题。这里是使各种“事物”与设施及工作相对应，建立具有实用性的分配模型。先举例介绍几个分配模型。

在出售某种产品的企业中，把1名推销员安排在市内的 n 个地方（或者也可以看成在 n 个地方有营业所）。今从 n 个地方接受订货，把1名推销员分别派往订货单位，使总运转时间为最小的问题，就是分配模型之一。

今假设有 n 名作业人员，分别应该担负 n 种工作，在针对各项工作来评价作业人员的效率时，某一作业人员分配哪一项工作时才能最有效率地进行作业的问题，也是一个分配模型。

在 $n=5$ 时，如果用图来表示这个分配模型，则如图1—1所示。图1—1中，C_{ij}表示评价项目或者成本，具体分配模型的评价矩阵，如表1—1所示。为将这个分配模型作为线性规划问题来处理，则在使问题的有效性为最大的目标函数中，以不重复的分配方法为约束条件，当向设施 i 分配工作 j 时，令变量X_{ij}为1，否则（即不向设施 i 分配工作 j 时）令X_{ij}为0，则有：

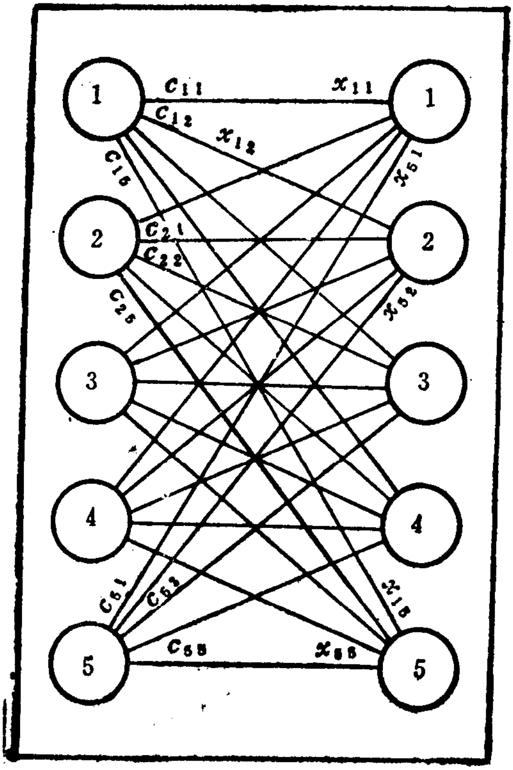

图 1—1　分配模型（n = 5 的情况）

i\i	1	2	3	4	5
1	3	2	5	8	9
2	6	7	4	2	3
3	5	3	5	4	2
4	4	7	3	2	4
5	2	6	5	5	3

表 1—1 评价矩阵C =〔C_{ij}〕

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
i \backslash j & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\
\hline
1 & C11 & C12 & C13 & \cdots & C1n \\
2 & C21 & C22 & C23 & \cdots & C2n \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n & Cn1 & Cn2 & Cn3 & \cdots & Cnn \\
\hline
\end{array}
$$

表 1—2　**评价(或成本)矩阵** C

$$
\begin{aligned}
\max \quad Z = {} & 3X_{11} + 2X_{12} + 5X_{13} + 8X_{14} + 9X_{15} \\
& + 6X_{21} + 7X_{22} + 4X_{23} + 2X_{24} + 3X_{25} \\
& + 5X_{31} + 3X_{32} + 5X_{33} + 4X_{34} + 2X_{35} \\
& + 4X_{41} + 7X_{42} + 3X_{43} + 5X_{44} + 4X_{45} \\
& + 2X_{51} + 6X_{52} + 5X_{53} + 5X_{54} + 3X_{55} \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{subj.to} \quad & X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 1 && (1.2) \\
& X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 1 && (1.3) \\
& \cdots\cdots \\
& X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} = 1 && (1.4) \\
& X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = 1 && (1.5) \\
& X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = 1 && (1.6) \\
& \cdots\cdots \\
& X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} = 1 && (1.7) \\
& X_{ij} = 0 \quad or \quad 1, \\
& \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 5 \\
& \qquad j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 5 && (1.8)
\end{aligned}
$$

将根据这个分配模型的线性规划问题所列出的公式，进一步再紧凑地加以表示。如设 C_{ij} 为如表 1—1 所示的评价矩阵的元素，即所谓成本矩阵的元素，则得：

$$max \quad Z=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}C_{ij}X_{ij} \tag{1.9}$$

Subj·to

$$\sum_{j=1}^{5}X_{ij}=1, j=1,2,\cdots\cdots,5 \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^{5}X_{ij}=1, j=1,2,\cdots\cdots,5 \tag{1.11}$$

$$X_{ij}=0 \text{ or } 1, \quad i=1,2,\cdots\cdots 5, \quad j=1,2,\cdots\cdots,5, \tag{1.12}$$

一般地说，设有 n 名工程师和 n 种项目，当向工程师 i 分配项目 j 时，如设表1—2的评价系数(或者成本系数)为 C_{ij}，则使其有效性为最大（或者为最小）而进行最优分配的问题，可以作为如下的线性规划问题列出公式。

$$\underset{(or\ min)}{max} \quad Z=\sum_{i=i}^{n}\sum_{i=j}^{n}C_{ij}X_{ij} \tag{1.13}$$

subj·to

$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=1, \quad i=1,2,\cdots\cdots,n \tag{1.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=1, \quad j=1,2\cdots\cdots,n \tag{1.15}$$

$$X_{ij}=1 \text{ or } 0, \quad i=1,2,\cdots\cdots,n, \quad j=1,2,\cdots\cdots,n \tag{1.16}$$

当然，可能要发生工程师数和项目数未必一致的情况。在这种情况下，就令其数值多的一方为 n，将不足的数值填空格（*dummy*），令其成本系数的值为 0 。

这种情况的数值举例是第 2 个试算问题 $AP-2$，将在后面介绍。

1 *Hanger rear* 法

下面来说明一下如何高效率地求解分配模型的线性规划问

题。由于这个分配模型是1种线性规划问题，当然也可以利用单纯形法（*simplex*）来求解，但那不是高效率方法。这里介绍的*Hanger rear*法是在分配模型问题中充分运用有关性质的计算方法。

*Hanger rear*法（最大化的分配问题）

第1步：

1）在成本矩阵C的各行中，从最大值中减去各行元素。

2）再在各列中，从各列元素中减去不为零的最小值，变换为变形成本矩阵C'。

第2步：

1）在变形成本矩阵C'的各行中，如果0元素只有一个，则将该元素划上□号（也就是分配）；并且，如果该元素所在列中还有其它0元素，则将这些元素划×号消掉（也就是不分配）。

2）再在各列中，如果只有一个没划有□号或×号的0元素，则将该元素划上□号；并且，如果该元素所在行还有其它没划有□号或×号的0元素，则将这些元素划×号消掉。

3）反复进行1)和2)步，直到变形成本矩阵的全部零元素都划上□号或×号为止。但在剩有没划□号或×号的0元素时，因为最优解为多个，则将这样行的任意0元素划上□号，并将该元素所在行和列中所存在的其它0元素划×号消掉。

第3步：如果在变形成本矩阵的所有行和列中，各仅有一个划□号的0元素时，则便获得最优分配（也就是最优解）。否则进行下一步。

第4步：

1）在变形成本矩阵中，对于没分配的行，全部划✓号进行检查。

2）在按1）进行检查的行中，对划×号的0元素所在

列，全部划✓号进行检查。

3）在按2）进行检查的列中，尽管还有分配，对于没检查的行，还要划✓号进行检查。

4）尽可能地反复进行2）和3）步。

第5步：

1）在没有被检查的行和已经检查了的列中，分别划线（这是通过所有0元素的条数最少的线，如果这种线的条数与行数相等，就达到最优解）。

2）在没有线通过的所有元素中，选出最小者，从被检查的各行元素中减去最小值，再在被检查的列的元素中加上最小值。

3）返回第2步。

对于分配模型最小化的问题，只要把第1步中的1）作如下修改即可，后面则与最大化问题的步骤完全相同。

第1步：1′）在成本矩阵C的各行中，从各行的元素中减去最小值。

成为*Hager rear*法基础的第1步，是把分配问题的0—1变量看成是实变量，求其对偶问题，是根据互补性松驰（*sla-ck*）条件推导出来的。并且，第5步还利用了分配问题约束条件（1.14）和（1.15）的性质。本文仅着眼于分配模型的应用，其数学证明全部从略。

2. 例 题

第1步：

1）成本矩阵各行的最大值如表1—3所示，减去各行元素后，则如表1—4所示。

2）各列的最小值如表的最下一行所示，从各列元素中减去后，则如表1—5所示。

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	最大值
1	3	2	5	8	9	9
2	6	7	4	2	3	7
3	5	3	5	4	2	5
4	4	7	3	2	4	7
5	2	6	5	5	3	6

表 1—3

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	6	7	4	1	0
2	1	0	3	5	4
3	0	2	0	1	3
4	3	0	4	5	3
5	4	0	1	1	3
最小值	0	0	0	1	0

第 2 步： 表 1—4

1）由于在第 2 行仅有一个 0 元素，所以划上□号；把第 2 列的另两 0 元素划×号消掉。另外，当对第 5 行的 0 元素划上□号时，则将第 4 列的另两个 0 元素划×号消掉。则如表 1—6 所示。

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	6	7	4	0	0
2	1	0	3	4	4
3	0	2	0	0	3
4	3	0	4	4	3
5	4	0	1	0	3

表 1—5

i \ j	1	2	3	4	5
1	6	7	4	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
2	1	$\boxed{0}$	3	4	4
3	0	2	0	$\cancel{0}$	3
4	3	$\cancel{0}$	4	4	3
5	4	$\cancel{0}$	1	$\boxed{0}$	3

表1—6

2）由于在表1—6的第1列有一个0元素，则划上□号，把第3行的另两个0元素划×号消掉。另外，由于在第5列也只有一个0元素，所以也划上□号。则如表1—7所示。

第3步：因为还没有满足最优性试验，所以进入第4步。

第4步：

1）由于没有分配的行是第4行，因而划上√号进行检验。

2）因为在这个第4行划×号的0元素所在列是第2列，所以对这一列划√号进行检验。

3）在这个第2列还有没有被检查的划□的所在行是第2

i \ j	1	2	3	4	5
1	6	7	4	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
2	1	$\boxed{0}$	3	4	4
3	$\boxed{0}$	2	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	3
4	3	$\cancel{0}$	4	4	3
5	4	$\cancel{0}$	1	$\boxed{0}$	3

表1—7

行，因此对这一行划✓号进行检查。

4）在这个第2行中，没有划×号的0元素。则得表1—8。

i \ j	1	2	3	4	5	
1	6	7	4	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	
2	1	$\boxed{0}$	3	4	4	✓
3	$\boxed{0}$	2	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	3	
4	3	$\cancel{0}$	4	4	3.	✓
5	4	$\cancel{0}$	1	$\boxed{0}$	3	
		✓				

表　1—8

第5步：

1）对于没有被检查的第1、3、5行和已被检查了的第2列，分别划线，则如表1—9所示。

2）在没有这4条线通过的所有元素中，找出最小值为1。从第2、4行的各元素中减掉1，再在第2列的各元素（第2、4行除外）上加1，则得出如表1—10所示的修正了的变形成本矩阵。

i \ j	1	2	3	4	5	
1	6	7	4	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	
2	1	$\boxed{0}$	3	4	4	✓
3	$\boxed{0}$	2	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	3	
4	3	$\cancel{0}$	4	4	3	✓
5	4	$\cancel{0}$	1	$\boxed{0}$	3	
		✓				

表　1—9