高 等 数 学

微分方程 級数

清华大学基础课

一九七三年一月

毛主席语录

我们能够学会我们原来不懂的东西。我们不但善於破坏一个旧世界，我们还将善於建设一个新世界。

马克思主义的哲学认为十分重要的问题，不在於懂得了客观世界的规律性，因而能够解释世界，而在於拿了这种对於客观规律性的认识去能动地改造世界。

目　　录

第一章　微分方程

第二章　幂　级　数

第三章 三角级数

第一章　微分方程

伟大领袖毛主席教导我们说：**“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。**

变量间的函数关系是高等数学的主要研究对象。在自然界和工程实际中，变量间的函数关系，有些可以根据客观规律，通过代数、三角等初等数学的方法表达出来。例如等速运动的路程 s 与时间 t 的函数关系是

$$s = vt \qquad (v\text{是常数})$$

曲柄连杆机构的运动规律可近似表示为

$$s = l + r\cos\omega t$$

但有些变量间的函数关系，要用微积分的方法才能求出来。例如，研究变速运动时，如果已知路程函数 $s(t) = A\sin\omega t$，则速度为

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

反之，如果已知速度函数 $v(t) = B\cos\omega t$，则可根据

$$\frac{ds}{dt} = B\cos\omega t \qquad (\mathrm{I})$$

求路程函数 $s(t)$，这是一个积分问题。

（Ⅰ）式也可以看作一个方程，$s(t)$是未知函数，$\frac{ds}{dt}$ 是未知函数的导数，这样的方程就叫做微分方程。

对于更复杂的问题，例如，要计算落体运动的度速 $v(t)$ 时，如果考虑周围介质的阻力的影响，并假设阻力大小与速度成正比。这时，物体所受的外力为

$$F = \text{重力} - \text{阻力} = mg - kv$$

其中m为物体的质量，g为重力加速度，k 为比例常数。

根据牛顿定律

$$ma = F$$

其中 a 为加速度，与未知函数 $v(t)$ 的关系为 $a = \frac{dv}{dt}$，可得未知函数$v(t)$满足以下关系式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \qquad (\mathrm{II})$$

这也是一个微分方程。由于方程（Ⅱ）右边同时含有未知函数 v，不能直接用积分的方法求出 v，这就是微分方程中要进一步解决的问题。

微分方程是由于生产实践的需要，在微积分的基础上进一步发展起来的一种数学工具。在自然科学和工程技术中有广泛的应用。

第一节　微分方程的基本概念

一、什么是微分方程和微分方程的解

为了便于搞清一些基本概念，我们先从一个简单的大家已经熟悉的例子谈起。

例 1　设一物体作直线变速运动，开始时（$t=0$ 秒）离 O 点距离为 3 米，以速度 $v=2t$ 米/秒离开 O 点（图1—1），求物体离 O 点的距离 s 与时间 t 的函数关系 $s(t)$。

这是过去已经解决过的问题，这里主要用它来说明一些概念。函数 $s(t)$ 是未知的，叫做未知函数。下面分析，怎样通过已知条件求出这个未知函数。

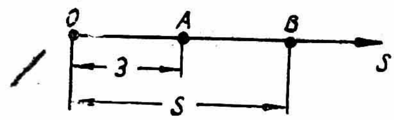

图　1—1

我们在微积分中已经知道路程 $s(t)$ 和速度 $v(t)$ 的关系为

$$\frac{ds(t)}{dt}=v(t)$$

由已知 $v(t)=2t$，可得 s 与 t 的关系为

$$\frac{ds}{dt}=2t \tag{1}$$

或写作

$$ds=2tdt \tag{2}$$

（1）、（2）两个式子虽然还未直接给出 s 与 t 的函数关系，但它表明了未知函数 $s(t)$ 与已知条件之间的联系。在（1）式中含有未知函数的导数 $\frac{ds}{dt}$，在（2）式中含有未知函数的微分 ds。在代数中，我们把含有未知数的等式叫做代数方程。现在，我们把（1）、（2）这样的含有未知函数的导数（或微分）的方程叫做微分方程。

又如，

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N \quad (N(t)\text{ 为未知函数，}\lambda\text{ 为常数}) \tag{3}$$

$$RC\frac{du}{dt}+u=E \quad (u(t)\text{为未知函数，}R、C、E、\text{为常数}) \tag{4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (y(x)\text{为未知函数，}a\text{ 为常数}) \tag{5}$$

这些方程中都含有未知函数的导数，因而都是微分方程。在（3）、（4）中含有未知函数的一阶导数，在（5）中含有未知函数的二阶导数。我们把方程中所含未知函数的导数的最高阶数，叫做微分方程的阶。方程（3）、（4）是一阶微分方程，方程（5）是二阶微分方程。

上面我们根据问题的具体意义得到了微分方程

$$\frac{ds}{dt}=2t \qquad (\text{或} ds=2tdt) \tag{1}$$

怎样由此方程求出未知函数 $s(t)$ 来呢？这就是所谓“解方程”的问题。对这个具体问题来说，由方程 $\frac{ds}{dt}=2t$ 求 $s(t)$，就是微积分中求“原函数”的问题，也就是求 $2t$ 的不定积分，故可得

$$s=\int 2t\,dt=t^2+C \qquad (C\text{为任意常数})$$

显然，如果把求得的结果 $s=t^2+C$ 代入方程 $\frac{ds}{dt}=2t$ 两边，能使方程两边恒等，也就是函数 $s=t^2+C$ 满足方程（1）。我们就叫函数 $s=t^2+C$ 是微分方程（1）的解。

注意，有 $s=t^2+C$ 中，有一个任意常数 C，当 C 取不同值时，例如

$$s=t^2,\quad s=t^2+1,\quad s=t^2+2,\ \cdots\cdots \qquad (6)$$

这些函数都满足方程（1），因而一个微分方程有无数个解。到底哪一个是我们所求的解呢？为了回答这个问题，还必须分析问题的其它条件。

从问题所给的另一个条件：物体开始时（$t=0$ 秒）离 O 点距离为 3 米，可见，并不是（6）中的所有函数都满足这个条件的。不难看出，只有函数 $s=t^2+3$（即取 $C=3$）满足这个条件。因而，我们所求的解就是

$$s=t^2+3$$

条件“$t=0$秒时，$s=3$米”表明了物体的初始状态，叫做初始条件，又可以表示为

$$\text{“}s|_{t=0}=3\text{”} \quad 或 \quad \text{“}s(0)=3\text{”}$$

在 $s=t^2+C$ 中，含有任意常数 C，代表了微分方程的所有的解，这样的解，我们叫它为微分方程的通解或一般解。而解 $s=t^2+3$ 则满足特定的初始条件 $s|_{t=0}=3$，（这时 C 取特定值 3），叫做满足初始条件的特解。当初始条件不同时，确定的特解也就不同。

从物理意义上看，通解 $s=t^2+C$ 是速度 $v=2t$ 的变速运动，在任意初始位置情况下的运动规律。而特解则是在特定的初始位置情况下的运动规律。

如果我们在 t、s 的座标平面上，对 C 取不同的数值，画出 $s=t^2+C$ 的图形，可以得到一族曲线（图1—2），每一条曲线对应了一个 C 的特定值。满足初始条件 $s|_{t=0}=3$ 的特解 $s=t^2+3$ 是其中一条确定的曲线（图中粗线所示）。

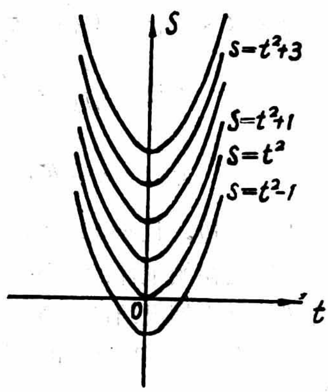

图 1—2

由上可见，通解和特解的关系，就是一般和特殊的关系，微分方程的问题通常是要求满足某个初始条件的特解。

我们把例 1 总结如下：

微分方程	$\frac{ds}{dt}=2t$
初始条件	$s\,|_{t=0}=3$
通　　解	$s=t^2+C$
满足已给初始条件的特解	$s=t^2+3$

现将上面提到的几个基本概念一般地叙述如下：

含有未知函数的导数（或微分）的方程，叫做微分方程。所含的未知函数的导数的最高阶数，叫做微分方程的阶。

如果一个函数代入微分方程，能使方程两边恒等，这样的函数就叫微分方程的解。或简单地说，凡满足微分方程的函数，就叫微分方程的解。

在一阶微分方程的解中，若含有一个任意常数，此解就叫做方程的通解或一般解。若解中不含任意常数，就叫特解。

一阶微分方程的问题通常有一个初始条件，可表示为

$$y\big|_{x=x_0}=y_0 \quad \text{或} \quad y(x_0)=y_0$$

解微分方程时，通常是先求它的通解，再根据初始条件确定 C 值，求出特解。

对于以下形式的简单微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

右端是一个已知函数（如例1），求解方法就是微积分中求原函数的方法。

例 2 在研究物体下落的运动规律时，如果考虑周围介质的阻力，在某种假设下，物体的下落速度 v 满足以下微分方程

$$\frac{dv}{dt}=g-Kv \qquad (g\text{为重力加速度，}K\text{为常数}) \tag{7}$$

验证函数

$$v(t)=\frac{g}{K}+Ce^{-Kt} \qquad (C\text{为任意常数}) \tag{8}$$

是方程（7）的通解。并求满足初始条件

$$v\big|_{t=0}=0$$

的特解。

解： 1) 验证 要验证一个函数式是否是方程的通解，只需将函数代入方程两边，判断是否恒等，再看看函数式中是否含有任意常数。

现将函数（8）代入方程（7）的两边

$$\text{左边}=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{g}{K}+Ce^{-Kt}\right)=Ce^{-Kt}\cdot(-K)=-CKe^{-Kt}$$

$$\text{右边}=g-Kv=g-K\left(\frac{g}{K}+Ce^{-Kt}\right)=-CKe^{-Kt}$$

可见 左边=右边，且 $v(t)$ 中有一个任意常数，所以函数（8）是方程（7）的通解。

2) 求满足初始条件的特解

求特解就是根据已给的初始条件确定 C 值，方法如下：

将初始条件“$t=0$，$v=0$”代入通解（8）中，即将 $t=0$ 代入（8）的右边，$v=0$ 代入（8）的左边，得

$$0=\frac{g}{K}+Ce^{-K\cdot 0}$$

$$\therefore \quad C=-\frac{g}{K}$$

故所求的特解为

$$v=\frac{g}{K}-\frac{g}{K}e^{-Kt}=\frac{g}{K}(1-e^{-Kt})$$

它既满足方程，又满足所给的初始条件。

二、运用微分方程解决实际问题的步骤

运用微分方程解决实际问题的步骤，和代数方程类似，首先要从实际问题中列出微分方程，然后求出它的解，再应用到实践中去。一般来说，可分以下几步：

1． 列方程和初始条件

由实际问题列出方程，主要根据具体问题的物理规律及数量关系，如例1，就是根据速度与路程的关系列出的，以后还将陆续举例说明。

对微分方程问题，列出方程后还需列出初始条件，否则这个问题的解是不确定的。

2． 解方程

微分方程的解有通解与特解之分，通常是先求出方程的通解，再根据初始条件求出特解。要注意微分方程的解是函数，而代数方程的解是数。

3． 分析解的性质

求出解后，还要根据具体问题的要求，对解的性质进行分析，达到解决实际问题的目的。

习 题 一

1． 下列方程中哪些是微分方程？并指出它的阶数。

① $y'=xy$　　② $x^2+y^2=1$

③ $x^2dy+y^2dx=0$　　④ $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=x$

⑤ $x^2-2x=0$　　⑥ $y(y')^2=1$

⑦ $y''-x^4=0$　　⑧ $yy''=2y'$

⑨ $m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$（m、k均为常数）　　⑩ $ax+by'=c$

2． 检验下列函数（其中C为任意常数）是否是相应的方程的解，是通解还是特解？

① $\frac{dy}{dx}-2y=0$　　$y=\sin 2x$，$y=e^x$，$y=e^{2x}$，$y=4e^{2x}$，$y=Ce^{2x}$

② $4y'=2y-x$　　$y=\frac{1}{2}x+1$，　$y=Ce^{\frac{1}{2}x}$，$y=Ce^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}+1$

③ $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$　　$y=xe^{Cx}$，　$y=x$

④ $y'=3y^{\frac{2}{3}}$　　$y=x^3+C$，　$y=(x+C)^3$，　$y=(x+2)^3$

⑤ $(y')^2+xy'-y=0$　　$y=-\frac{1}{4}x^2$

3. 检验下列函数是否是微分方程$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$的解？

① $y=\sin 2x$　　② $y=C\sin 2x$（C为任意常数）

③ $y=e^{2x}$　　④ $y=\sin x$

⑤ $y=\cos 2x$　　⑥ $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

4. 检验下列函数是否是所给微分方程并满足所给初始条件的特解。

① $\begin{cases} y'+2y=0 \\ y\big|_{x=0}=1 \end{cases}$　　$y=2e^{-2x}$，　$y=e^x$，　$y=e^{-2x}$

② $\begin{cases} y'+y=1+x \\ y\big|_{x=0}=0 \end{cases}$　　$y=\sin x$，　$y=x$，　$y=e^{-x}+x$

③ $\begin{cases} \frac{du}{dt}=4u^2 \\ u\big|_{t=1}=-\frac{1}{5} \end{cases}$　　$u=-\frac{1}{5}$，　$u=\frac{-1}{4t+1}$，　$u=\frac{-1}{4t+C}$（C为任意数）

5. 验证$y=Cx^3$是方程$3y-xy'=0$的通解，并求满足初始条件$y(1)=\frac{1}{3}$的特解，画出通解和特解的图形。

6. 求微分方程$\frac{dy}{dx}=x^2$的通解，并求满足初始条件$y\big|_{x=0}=1$的特解，画出通解和特解的图形。

7. 求 解

① $\begin{cases} y'=\sqrt{x} \\ y\big|_{x=1}=1 \end{cases}$　　② $\begin{cases} \frac{dy}{dt}=\sin\omega t \\ y\big|_{t=0}=0 \end{cases}$（$\omega$为常数）

③ $\begin{cases} 3\frac{dy}{dt}=2e^{-bt} \\ y(0)=0 \end{cases}$（$b$为常数）　　④ $\begin{cases} (2x-1)\frac{dy}{dx}-1=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$

第二节　分离变量法

下面我们分类地介绍微分方程的解法，这一节介绍的是一阶“可分离变量的方程”的解法。

例 1　放射性衰变规律

伟大领袖毛主席教导我们说：**“中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。”**为了粉碎美帝、苏修的核垄断和核讹诈，我国工人阶级和科学工作者在战无不胜的毛泽东思想的指引下，成功地进行了一系列核试验。在核爆炸中所用的材料，如铀，是一种放射性元素。这种元素的原子不断自发地放出各种射线，而变成另一种元

素的原子（见图1—3），这种现象叫放射性衰变。因此，一定量的放射性元素的原子数N是时间 t 的函数。

由实验知道，放射性衰变有以下规律：衰变速度（即单位时间内衰变的原子数）与现存的原子数成正比。设开始时（$t=0$秒）有N_0个原子，求现存的原子数N与时间 t 的函数关系$N(t)$。

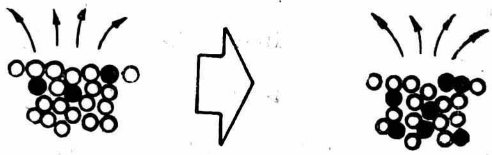

图 1—3

解：1） 列方程和初始条件

根据已知的物理规律：衰变速度与现存的原子数成正比，可表示为

$$t\text{ 时刻的衰变速度} \propto t\text{ 时刻的原子数（注）} \tag{1}$$

t 时刻的原子数为 $N(t)$，衰变速度就是N对 t 的变化率 $\frac{dN(t)}{dt}$，故（1）式可写为

$$\frac{dN}{dt} \propto N \tag{2}$$

设比例系数 $\lambda>0$. 由于$N(t)$是随 t 的增加而减少的，是减函数，故$\frac{dN}{dt}<0$，而$N>0$，因此要将（2）式写成等式应为

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{3}$$

比例系数 λ 叫衰变常数，可由实验测定。

（3）式就是函数$N(t)$应满足的微分方程，初始条件为

$$N\big|_{t=0} = N_0 \tag{4}$$

2） 解方程

如前所述，对于形如$\frac{dy}{dx}=f(x)$这样的简单方程，右端是x的一个已知函数，用不定积分就可直接求得它的通解为 $y=\int f(x)dx$。

但是对于方程

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{3}$$

右端含有未知函数N，直接用不定积分 $N=\int -\lambda N dt$ 就无法计算了。其困难在于被积分式中$N=N(t)$是未知的。为了解决这个困难，我们用类似于解一元一次代数方程的“移项”的办法，予先将未知函数与其它量分开，即将方程（3）中的未知函数N及其微分 dN 移到一边，将其它的量移到另一边，变为

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

（注） 符号“$\propto$”表示“成正比”的意思。

然后两边求积分

$$\int\frac{dN}{N}=\int-\lambda dt$$

可得

$$\ln N+C_1=-\lambda t+C_2\text{(注)}\qquad\qquad (C_1、C_2\text{为任意常数})$$

即

$$\ln N=-\lambda t+C_2-C_1$$

因为 C_2-C_1 仍为任意常数，可令 $C_3=C_2-C_1$，　C_3 为一个新的任意常数，得

$$\ln N=-\lambda t+C_3$$

写成指数式

$$N=e^{-\lambda t+C_3}=e^{C_3}\cdot e^{-\lambda t}$$

又因 e^{C_3} 仍为任意常数，可令 $C=e^{C_3}$，则

$$N=Ce^{-\lambda t}$$

就是方程（3）的通解。

将初始条件 $N|_{t=0}=N_0$ 代入通解，

$$N_0=Ce^{-\lambda\cdot 0}$$

得

$$C=N_0$$

所以满足初始条件的特解为

$$N=N_0e^{-\lambda t}$$

由上面的求解过程可以看出，关键的一步是将方程中的未知函数和其它的量分离到等号两边，然后再进行积分。因此，这种方法叫“分离变量法”，下面再举例说明。

例 2　求解

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}\\ y|_{x=0}=1\end{cases}$$

解微分方程，通常是先求出方程的通解，然后再求满足初始条件的特解。下面就分这两步做。

解：1）　求方程的通解

将方程分离变量，得

$$ydy=-xdx$$

两边积分

$$\int ydy=\int-xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1$$

$$x^2+y^2=2C_1$$

（注）　为簡单起见，这里把积分

$$\int\frac{dN}{N}=\ln|N|+C$$

中的絕对值符号省略了，因为不影响最后結果。

令$C=2C_1$，得方程的通解为

$$x^2+y^2=C$$

这是隐函数形式，也可表示为显式。

2） 求满足初始条件的特解

将初始条件 $y|_{x=0}=1$ 代入通解，得

$$0^2+1^2=C$$

$$C=1$$

所以所求的特解为

$$x^2+y^2=1$$

或 $$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

如果把通解和特解的图形画出来，通解$x^2+y^2=C$在x、y平面上就是一族圆心在原点，半径不同的圆（见图1—4）。满足初始条件$y|_{x=0}=1$的特解$x^2+y^2=1$的图形就是过点（0，1）的一个圆（图中粗线所示）。

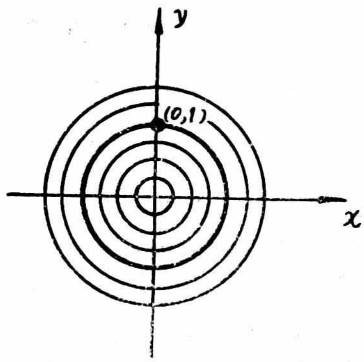

图 1—4

例 3 求方程

$$y'=\frac{2y}{1+x}$$

的通解。

解：将方程分离变量，

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{1+x}$$

两边积分

$$\ln y=2\ln(1+x)+C_1 \qquad (5)$$

可化为

$$\ln\frac{y}{(1+x)^2}=C_1$$ （为什么？）

写成指数式

$$y=e^{C_1}(1+x)^2$$

令$C=e^{C_1}$，得方程的通解为

$$y=C(1+x)^2$$

在求解过程中，通常要利用对数和指数的性质将解化简。(注)

(注) 对于(5)式: $\ln y=2\ln(1+x)+C_1$ 还通过下面的方法化簡:

因 C_1 为任意常数，可令 $C_1=\ln C$， C 仍为任意常数，于是(5)式变为

$$\ln y=2\ln(1+x)+\ln C$$

立即可以得到

$$y=C(1+x)^2$$

上面几个例子说明了“分离变量法”是解一阶微分方程的一种简便有用的方法，但并不是所有的一阶方程都可适用。例如方程$\frac{dy}{dx}=x+y$虽然很简单，但却无法将变量分离。

一般来说，若一阶微分方程能写成以下形式：

$$\frac{dy}{dx}=F(x)\Phi(y) \quad 或 \quad M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0$$

就可分离变量。这种方程就叫做“可分离变量的微分方程”。例如

$$\frac{dy}{dx}=y\,tg\,x, \qquad (1+y^2)dx+(y+x^2y)dy=0, \qquad (\sin x)y'-y\ln y=0$$

等都是可分离变量的微分方程。

用分离变量法求解微分方程的步骤是：

1） 将未知函数及其微分移到等式的一边，将其它量移到另一边。

2） 两边分别求不定积分。

3） 化简结果。为了便于计算，一般应将解写成显函数形式，但当解较复杂时，也可采用隐函数形式。

习　题　二

1． 求下列微分方程的通解

① $xdx-ydy=0$　　② $ydx+xdy=0$

③ $y'+xy=0$　　④ $xydx+(x+1)dy=0$

⑤ $xy'-y=xy$　　⑥ $\sin x\cos y\,dx-\cos x\sin y\,dy=0$

⑦ $\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$　　⑧ $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$

2． 求解

① $\begin{cases} y'+ax=0 \\ y|_{x=0}=y_0 \end{cases}$ （a、y_0是常数）　　② $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=4\sqrt{x}\,t \\ x|_{t=1}=1 \end{cases}$

③ $\begin{cases} (t+2)\frac{dx}{dt}=3x+1 \\ x|_{t=0}=0 \end{cases}$　　④ $\begin{cases} ydx=(x-1)dy \\ y|_{x=2}=1 \end{cases}$ 画出通解和特解的图形

3． 在热处理车间，经常要将炽热的工件放入液体中或空气中冷却。已知物体的冷却规律为：冷却速度（即物体温度对时间的变化率）正比于物体温度与介质温度之差（设比例系数$k>0$）。

① 列出物体温度$T(t)$应满足的微分方程。

② 今将750°C的工件放入20°C的液体内冷却，试求此工件的温度的变化规律。

4． xy平面上一曲线，其上任一点处的切线斜率等于该点的横座标的两倍，且此曲线过点（0，1），求此曲线的方程，并作图。

第三节　一阶线性微分方程

一、什么是线性微分方程

我们先粗略地说明一下数学中常用的"线性"一词的大意。大家曾经学过"线性函数"，也就是一次函数 $y=ax+b$（a、b 为常数），它的图形是一条直线。数学中"线性"这个概念一般总是与"一次"有关。对于微分方程来说，如果微分方程中含有未知函数或其导数的项都是一次项，这种微分方程就叫线性微分方程。

下面举例解释它的意义。

前面讲过的衰变方程

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N \tag{1}$$

就是一个一阶线性方程，因为含 N 及 $\frac{dN}{dt}$ 的项都是一次方的。又如

$$3y'+2y=x^2 \tag{2}$$

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x} \tag{3}$$

等也都是一阶线性微分方程。

反之，当方程中有未知函数及其导数的非一次项时，方程就叫非线性微分方程。例如

$y'-y^2=0$　　中 y^2 是非一次项

$yy'+y=x$　　中 yy' 是非一次项

$y'-\sin y=0$　　中 $\sin y$ 是非一次项

这些方程都是非线性微分方程。

这里要注意，方程是否是线性的，与自变量的方次无关。例如方程（2）中虽有 x^2 项，但含 y 及 y' 的项都是一次的，所以仍是线性微分方程。

许多物理问题的微分方程都是线性的，同时线性微分方程的解法也较简单，因此这类方程较为重要。

一阶线性微分方程可以写成以下一般形式

$$\boxed{a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=f(x)}$$

其中 $a(x)$、$b(x)$、$f(x)$ 是已知函数。

也可表示为如下形式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

其中 $P(x)$、$Q(x)$ 为已知函数。

当 $\frac{dy}{dx}$ 和 y 前面的系数 $a(x)$、$b(x)$ 为常数时，就叫常系数线性微分方程，如方程（1）

和（2）。否则就叫变系数线性微分方程，如方程（3）。

$f(x)$叫自由项。若$f(x)\equiv 0$，方程变为

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

叫一阶线性齐次方程。否则，叫非齐次方程，$f(x)$也叫做非齐次项。

二、一阶线性齐次微分方程

它的一般形式为

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0 \tag{1}$$

用分离变量法就可求得它的通解。

将方程（1）分离变量，

$$\frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}dx$$

两边积分

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{b(x)}{a(x)}dx$$

可求得通解（请大家自己作）为

$$y = Ce^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx} \tag{2}$$

C为任意常数，同时认为积分$\int\frac{b(x)}{a(x)}dx$中不再含有任意常数。

对于常系数的情形，设$a(x)=a$，　$b(x)=b$，其通解为

$$y = Ce^{-\frac{b}{a}x} \tag{3}$$

（2）、（3）可作为公式用。当然，主要应掌握它的解法。

例 1　求解

$$\begin{cases} RC\dfrac{du}{dt} + u = 0 \\ u|_{t=0} = U_0 \end{cases} \quad （R、C、U_0为常数）$$

解：这是一个一阶线性齐次微分方程，且是常系数的，故其通解为

$$u = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \qquad （A为任意常数）$$

将初始条件$u|_{t=0} = U_0$代入通解，得

$$U_0 = Ae^{-\frac{1}{RC}\cdot 0}$$

$$A = U_0$$

$$\therefore \quad u = U_0e^{-\frac{1}{RC}t}$$　就是所求之解。

因为对于一阶线性齐次方程，用分离变量法很快就可求出它的解，所以我们不再进一步讨论它了。这里指出一点应该注意的地方，就是对于常系数的情形，方程 $ay'+by=0$ 的解一定是指数函数。如将方程 $ay'+by=0$变形为 $y'=-\dfrac{b}{a}y$，也可看出，一个函数与它的导数成正比，只有指数函数才有这性质，且比例系数 $-\dfrac{b}{a}$就是指数函数的指数 $-\dfrac{b}{a}t$ 的系数。根据这一性质，我们对于常系数一阶线性齐次方程，通常观察一下方程中的系数就可立刻写出它的通解。

习　题　三

1. 判断下列方程中哪些是线性方程？是齐次还是非齐次的？（不必解出。）

① $\dfrac{dy}{dx}-y-1=0$　　② $L\dfrac{di}{dt}+Ri=0$　（L、R为常量）

③ $y'=tgy$　　④ $u'+3u=1+e^{-2t}$

⑤ $xy'+y=0$　　⑥ $y'+2y+x-1=0$

⑦ $RC\dfrac{du}{dt}+u=E_m\sin\omega t$　（R、C、E_m、ω为常数）

2. 求下列方程的通解

① $3y'+2y=0$　　② $4y'=y$

③ $L\dfrac{di}{dt}+Ri=0$　　并求满足初始条件$i\big|_{t=0}=\dfrac{E}{R}$的特解。

3. 直接观察出下列方程的通解

① $y'-y=0$　　② $y'+y=0$

③ $my'-ky=0$（m、k为常数）　　④ $Hy'-\dfrac{1}{L}y=0$　（H、L为常数）

三、一阶线性非齐次方程的解的结构

为了求解一阶线性非齐次方程，我们首先分析一下它的解的性质，从中找出规律性的东西。

例 1　求方程

$$y'+2y=1 \tag{1}$$

的通解。

解　这是一个一阶线性非齐次方程，由于它的非齐次项比较简单，我们可以用分离变量法求解（请大家自己动手做一下），其通解为

$$y=Ce^{-2x}+\frac{1}{2} \tag{2}$$

下面我们来分析一下这个解有什么性质。

首先看到，通解(2)是由两部分相加而成。一部分是 Ce^{-2x}，另一部分是$\dfrac{1}{2}$。