

复杂应力状态下 材料的变形和强度

(上册)

T. C. 毕萨宁科 A. A. 列别捷夫著

陈德川译 露达威、王民寿校

T.

复杂应力状态下材料的变形和强度

(1976年第一版)

内 容 提 要

在高温和低温大幅度变化的复杂应力状态下,研究材料力学性能的成果,在本书中,被整理成了系统的图表。

书中简述了应力应变理论的基本问题,引证了大量的实验结果,用以同强度理论进行比较。在这个基础上,详尽地评述了力学的各个强度理论,分析了温度、加荷方式和其他一些因素的影响。本书极为重视弹性规律及极限状态准则的实验方法,特别是在高温、常温和低温的情况,还论及了相应的实验机器和实验装置。

本书可供科学工作者和工程技术人员、设计者、新技术领域的工人、材料力学和强度等有关专业高等院校中的教员、研究生和大学生使用。

前 言

近来,特别显得迫切的研究课题是,如何既降低机器的重量,同时又增加它的可靠性。解决这个问题可能的办法是:适当地使用新的高强和超高强材料,以及根据运行条件下,材料的特殊性能来改进计算方法,和产品元件的优化设计等。

零件的基本尺寸常常由强度计算决定。从对材料强度强度的研究知道,“强度”这个概念包含有多种意义。

在形成固体物理学这一分支科学的同时,便可能从物理的角度出发去研究强度问题。由于物理学发展到现代水平,广泛地使用了计算机,以及复杂的实验结果,使可能对材料形变和破坏的原子力学直接进行研

究。从而在这个基础之上，进一步对材料的力学特性提出定性的评价。

在工程应用中，大量的科学技术问题都与强度问题有关，并且它最终成为研究限制结构承载能力的因素。这些可能的因素是：由于塑性形变使零件产生很大的形变；由于荷载超过允许值使材料破坏；由于磨损或介质的有害作用，以及材料的徐变和疲劳，失去稳定性使零件逐渐破坏等等。考虑所有这些因素后，确定结构构件承载能力的工作，通常称之为强度计算。计算时，常根据材料的极限状态来确定实际零件的强度。我们进一步限制《计算强度》这个概念的意义，-在使用这个专有名词的情况下，我们将只考虑材料刚开始塑性变形或破坏时的应力（或形变）状态。

众所周知，绝大多数实际的机器零件常受到热力和机械力共同的复杂作用，这些作用使材料产生复杂（平面的和空间的）应力状态。这样，就有必要制定一些比较力学指标的准则，这些力学指标是在最简单的荷载条件下（拉伸、压缩、剪切和扭转）得到的。同时，这些力学指标又是在任何复杂应力系统下，计算材料抵抗塑性形变和破坏能力的基础资料。

塑性形变和破坏用微观力学取得的研究成果，暂时还不能用于工程计算。因此，按照常规，采用材料力学特性的平均指标，来研究固体形变和破坏的规律。

在形变固体力学中，课题的解答与材料简化规律的研究、简化模型相应的等价条件研究，联系在一起。研究分别从连续体力学角度、史托哈斯基非匀质体力学的角度、线性和非线性断裂力学角度出发进行。许多实际问题是通过专门实验得出解答的。这些实验采用专门试件，在最大限度地接近使用条件下进行。

现在，提出了许多等强度相对准则的假定。这些准则多数是在连续

介质力学基本关系的基础上获得的。因此，在本书的第一篇中，系统地论述了复杂应力状态下，材料强度准则的分析和进一步的发展，简述用特性指标表示的应力和应变理论的某些问题，而这些特性指标被继续用来描述材料的极限状态。

建立等效应力（强度准则）的问题有它的发展过程。伽利略和列依布尼兹首先提出了这方面的建议。圣维南、玛里奥特、拉密、克列布什、巴乌舍肯尔、别里拉特蒙、米者什、耿克和其他一些杰出力学工作者，对强度理论的进一步发展作出了贡献。这些学者的工作归纳为强度理论，后来，这些理论即称为古典强度理论。

随着球面张量影响的不同，采用不同方式来修正米者什—耿克假定，在这个基础上，使理论得到了发展（П. П. 巴兰金、И. М. 别亚也夫、И. В. 米罗留波夫、М. М. 费勒宁科—波洛契奇、Ю. И. 雅肯、布热斯基、米楚拉、史达舍、费勒依金达勒、什列依赫尔和其他）。

С. А. 瓦尔科夫把库伦—莫尔理论的统计综合，作为微观非均匀介质新方法的基础。薄弱环节假定来自费舍尔和哈洛曼统计理论的前提和结果。在В. В. 波罗金的著作中，发展了描述史托哈斯基非匀质体强度的有效方法。В. В. 班拉秀克尝试了从线性断裂力学的角度出发来建立复杂应力状态下脆性强度准则。

在所有提出的准则之中，很难说出谁最有依据。他们之中的任何一种理论，其可靠性都既受到材料范围，也受到主应力比值的限制。在科学和工程技术文献中，对低温和高温下，如何选取材料极限状态准则的问题，没有作任何介绍。关于材料各向异性、加载方式、应力梯度、比例系数影响的资料也很少。

在本书中研究了某些新的基本的方法，即一方面，使用了已有实验资料和关于材料形变和破坏动力学的现代概念；另一方面，在应力空间

中，用极限面来说明强度准则，并且，对极限面的一般特性和几何形状进行了逻辑分析。使用这种方法，能够求出应力状态参数，而这些参数值就决定了材料变形时，在材料中发生流动过程的强度。甚至，这种方法还可以确定表示材料一般特性的极限面形状，并且通过这个面的解析描述，从而确定准则的构成。

鉴于非均匀体在本质上存在各种不同类型的缺陷，因此，在准则中采用了影响函数来反应实际非均匀体强度的各种统计状况。影响函数的表达式可以根据描述非均匀构造体和史托哈斯基模型获得。

在书的第二篇中，对常温、低温和高温的复杂应力状态条件下，研究材料形变和破坏规律的实验工作进行了评述和分析。

理想强度问题的纯理论解法的迅速发展，大大地超过了材料力学特性相应的研究工作。由于这个脱节，使得已建立的原理，缺乏必须的材料的物理力学数据，从而使得提出的一系列实际课题不能得出有科学根据的解答。

任何准则的精度，要通过计算成果同实验资料的比较来判定。在复杂应力状态下，材料破坏和形变规律已有的实验资料是非常有限的。这是因为实验时困难很大，特别是在高温和低温下进行实验时，这些困难就更为突出。在文献中，仅仅公布了复杂应力状态下材料低温和高温强度方面的定性成果，而相应的实验设备的结构原理资料，则事实上根本没有任何介绍。这个问题在第二篇中给予了特别重视。在这里，特别详细叙述了乌克兰苏维埃社会主义共和国科学院强度研究所中，在作者领导和亲自参加下，创造和制定的实验方法和装置。同时在各种机械力和热力荷载下，对代表各类构造材料最典型的极限状态准则和硬化规律进行了研究，而且将得出的基本实验成果进行了分析。

这里首次发表的一些实际资料，可供在低温和高温下工作的构件作

优化设计和计算之用。我们可以根据这些资料，把固体形变和破坏的数学模型进行温度影响的校正；也可以据此更精确地决定与温度有关的加工压力和机械热处理硬化等各个工艺过程的最优方案。

复杂应力状态下材料的变形和强度

目 录

第一篇 形变固体力学和复杂应力状态下材料的强度

第一章 应力和应变理论的基本原理

第一节 形变固体力学的假定和原理

第二节 点的应力状态。应力张量

第三节 点邻域内的应力状态。应变张量

第四节 八面体的应力和应变

第五节 应力和应变状态的几何解释

第二章 复杂应力状态下应力和应变之间的关系

第一节 线性弹性体

第二节 非线性弹性体和非弹性体的应力和应变

第三节 形变时间和速度的影响

第四节 弹性能和塑性应变功

第三章 极限状态力学理论

第一节 塑性形变和破坏

第二节 强度条件。极限面

第三节 多面体强度理论

第四节 旋转面强度理论

第五节 综合强度理论

第六节 强度理论的分析比较

第四章 塑性和脆性破坏的综合条件

第一节 确定极限面一般特征的应力状态参数

第二节 离差平面中极限面的形状

第三节 在 $\mu_{\sigma} = \text{const}$ 平面上极限曲线的形状

第四节 综合强度准则

第五节 综合准则的可靠性

第五章 非均匀构造材料的强度准则

第一节 断裂力学的合理模型

第二节 非均匀构造材料强度的双重特性

第三节 评价非均匀构造材料强度的统计学方法。极限状态准则

第四节 准则的分析及其几何意义

第五节 理论和实验值的比较

第六章 材料极限状态的影响因素

第一节 材料的各向异性。各向异性材料的强度准则

第二节 温度—时间因素
在复杂应力状态下徐变和长期强度准则

第三节 加荷方式。复杂应力状态下疲劳强度准则

第四节 应力梯度和比例系数

第二篇 在复杂应力状态下材料强度的实验研究

第七章 复杂应力状态下材料力学试验方法

第一节 高压环和高压箱中的材料实验

第二节 平面边界试件实验

第三节 管状试件材料实验

第四节 平面试件和容器元件的双向拉伸实验

第五节 复杂应力状态下材料静力试验的其他方法

第六节 材料疲劳试验方法

第八章 高温和低温条件中复杂应力状态下材料力学试验

- 第一节 高温条件下实验方法的特点
- 第二节 低温条件下实验方法的特点
- 第三节 用于温度大幅度变化的 OHT 型材料力学试验装置
- 第九章 复杂应力状态下材料强度实验研究的方向和基本成果
 - 第一节 初步意见
 - 第二节 塑性理论假定的验证
 - 第三节 应力和应变间理论关系的验证。加荷过程的影响
 - 第四节 材料极限状态条件的研究
- 第十章 复杂应力状态下材料的高温、低温变形规律
 - 第一节 研究的材料
 - 第二节 实验形变曲线的分析
 - 第三节 材料横向应变系数
 - 第四节 低温下应力离差和应变离差的关系
 - 第五节 形变综合曲线
 - 第六节 复杂荷载下金属材料的低温变形规律
- 第十一章 材料低温和高温极限状态的研究成果
 - 第一节 碳素钢的低温塑性准则和低温极限强度准则
 - 第二节 复杂应力状态下低温对灰铸铁强度的影响
 - 第三节 复杂应力状态条件下铬镍钢和铝合金的低温屈服和低温破坏
 - 第四节 常温和低温条件下管形试件和破坏特征
 - 第五节 高温情况下材料试验的成果
 - 第六节 复杂应力状态下材料的长期强度
 - 第七节 应力状态种类对结构材料低温塑性寿命的影响
 - 第八节 低温条件下材料力学特性的各向异性

第一篇 形变固体力学和复杂应力状态下材料的强度

第一章 应力和应变理论的基本原理

§1. 形变固体力学的假定和原理

在形变固体力学中，介质被视为不间断分布的连续体，并假定物体内部任意小的微粒都具有相同的性质。因此，应力、应变和位移都是质点坐标的可微分连续函数。严格的讲，这种物体结构及特性的假定，与实际情况是有出入的。因为从微观意义说来，自然界中一切实际物体都是非均匀的。对于结构的缺陷（《非均匀性》）来讲，常见到的有：材料的多晶体构造，固定化学成分局部变化，异物杂质含量，以及其他使局部应力集中的缺陷。然而，从统计规律看来，实际物体的相对位移，同均匀模型相应点的位移，事实上是一致的。在连续介质力学方法中，通常用一些平均指标来代表材料的力学特征。如果缺陷的相对尺寸愈小，则使用连续介质力学方法来研究物体也就愈合理。

用弹性理论方法解决力学问题时，将理想物体代替实际物体，这会给解答带来误差。关于求解这个误差的可能值问题，早在1897年Φ. C. 雅辛斯基就提出来了，并且取得了解答[514]。Φ. C. 雅辛斯基证明了：可能误差的大小取决于物体的大小和各微小单元材料特性的不均匀程度。他认为，如果满足不等式 $L/\tau \geq \alpha^2$ ，那么实际物体就可以简化为理想物体（就弹性理论方程的实用性来说）。不等式中， L ——经比较选出的，和所研究物体的大小同一数量级的某个有限长度； τ ——和单元体大小同一数量级的某一长度，其中单元体大小的选取，要能保持物体原有的物理特性； α ——选取的一个足够大的数，在选取它时，对于一般精度，要能使 $\frac{1}{\alpha}$ 值与单元大小比较起来，可以忽略不计。

τ 的数量级可根据以后的实验结果判定。已经证明过的例子是：对于有明显晶体构造的特殊钢丝，为了使长度方向具有相同的力学特性，只需横切面尺寸大于 30 倍晶格就足够了。我们估算结果误差还有其它的目的，即为了论证连续性和均匀性假定的实际误差 [464]。

根据各向同性假定，被研究物体在任何方向上都具有同样的特性。实际上，只有非晶体才是各向同性的。许多结晶材料，虽然从宏观上看是各向同性的，但是，他们都有明显的晶体构造。例如，钢板、金属锻件的力学特性在各个方向上，常常是不一样的。对于这样的材料，要制定特殊的研究模型。作用力独立性原则是形变体力学各篇的前提条件之一。根据这个原则，弹性体的内力和变形将不决定于外力作用的顺序。而变形的总效果仅决定于独立选取的全部力系的等效力。这里要首先假设物体中没有初始（残余）应力。

假设静力学规律无论对整个物体，或者是对它的每一个质点都适用，那么，当外荷产生的形变同物体尺寸比较起来显得很小时，则位移的高阶项可以忽略。不能忘记，在形变物体内部，外力的静力等效系统仍要产生各种影响。例如，如果力沿着它的作用线移动或者分解为几个分力，那么，物体的应力和形变状态可能改变。

外力的存在不是物体内力增长的唯一必备条件。例如，在温度变化时，对于复杂几何形状物体（零件）的单元，由于其膨胀和压缩受到限制，或者说由于单元状态中具有固定不变的物理常数，因而在物理变化等情况下，实际物体中就有可能产生各单元体本身平衡的应力系统。

我们将继续引用另一些理论概念，固体力学各篇使用的假设和假定将在相应的各章中论述。

§2. 点的应力状态，应力张量

据被研究物体材料均匀的假设，物体形变时，材料中产生的内应力可以用单位面积上所产生的力的大小来表示。某点的内应力强度通常称之为应力 σ 。它可以用面积 ΔF 凝聚于一点时，比值 $\Delta P / \Delta F$ 的极限来确定（图 1）。

在谈点的应力时，必须同时指出它的方向。应力方向与通过已知点的平面外法线方向通常是不一致的。合力 ΔP 的方向被采用为应力方向。

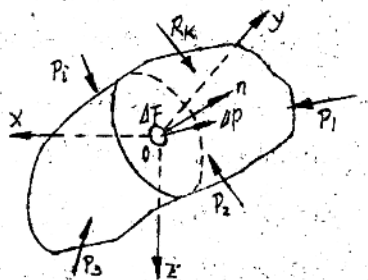


图 1. 变形体力学截面法

如果，点 O 的邻域限制在六个互相垂直的平面内，便得到一个平行六面单元体。同时，使单元体表面方向与坐标轴方向一致。那么，平行六面体每一个表面上都作用有相应的应力。在平面 xy ， xz 和 yz 上的全应力，沿坐标轴方向分解，得到九个应力分量（图 2）。这九个应力分量完全确定了一种应力状态，并且组成了如下形式的应力张量：

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (I.1)$$

正应力的下脚标表示应力方向所平行的坐标轴。剪应力的第一个下脚标是指该剪应力作用面的法向，而第二个下脚标是指该剪应力的方向。

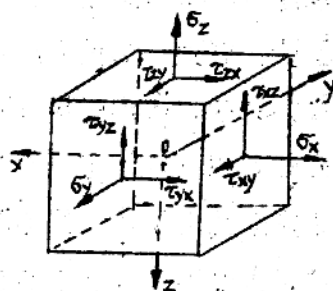


图 2. 平行六面体
单元表面的应力

因此，在 (I. 1) 中，每一横行即为相应的每一个应力矢量在各个坐标轴上的投影。每一竖列则表示三个应力矢量在同一坐标轴上的投影。

如果，正应力作用在平面外法线方向，则它为正。剪应力的符号由

所选取的坐标轴而定。如果，某个平面的正应力正向，同平行的坐标轴正向一致，那么，该平面上的剪应力正向就与相应的坐标轴正向一致。在图 2 中，虽然剪应力指向与坐标轴相反，然而，它们是正的，因为正应力的方向和坐标轴的方向相反。

能够证明，当剪应力的脚标由相同的字母组成时，则彼此相等：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

由此得到下述第一次由柯西阐述并证明的剪应力互等（或双生）定律：在形变体的各点中，两个互相垂直的平面上，作用有两个垂直于交线的剪应力。这两个剪应力在数值上彼此相等。也就是说，对称分布于张量主对角线（通过 σ_x , σ_y , σ_z 的对角线）两旁的两个应力张量元素，彼此相等。

因此，为了完全确定研究点的应力状态不必要知道九个量，而只须下列六个元素就足够了：

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

当平行六面体的表面相对于坐标轴转动一个角度时，无论是正应力或是剪应力值都将发生改变。在物体的每一点，都存在着剪应力等于零的三个互相垂直的平面。这些平面被称之为主平面。作用于这些主平面上的正应力称之为主应力。它们的方向称之为主向（或者主轴）。主应力标记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ，脚标号码的选取通常应使不等式 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 恒能成立。

我们要指出，在谈到主应力的方向时，只有在各个主应力彼此不等的情况下才有意义。在流体静拉伸或流体静压缩的条件下，即当 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 时，任何正交轴系统都可以采用为主轴。如果两个主应力相等，那么课题就成为轴对称。

可以证明，有三对平面剪应力达到极值。这些应力称之为主剪应力并且可以写成下式：

$$\tau' = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau'' = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau''' = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

在上述剪应力为极值的平面上，正应力将合乎下式：

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \quad \sigma'' = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; \quad \sigma''' = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (1.2a)$$

对绕坐标轴任意转动的指定平面上，应力变化的特性引起了大家的注意。我们来看表面法向与主轴方向一致的四面体，研究它斜面 dF 上的应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (图 3)。假定斜面法线 on 和坐标轴之间的夹角分别为 α, β 和 γ 。

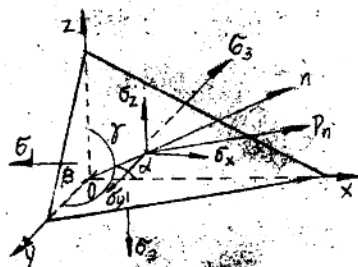


图 3 任意指定平面上的应力

四面体的平衡条件：

$$\sum x = -\sigma_1 dF \cos \alpha + \sigma_x dF = 0;$$

$$\sum y = -\sigma_2 dF \cos \beta + \sigma_y dF = 0;$$

$$\sum z = -\sigma_3 dF \cos \gamma + \sigma_z dF = 0,$$

由此：

$$\cos \alpha = \frac{\sigma_x}{\sigma_1}; \quad \cos \beta = \frac{\sigma_y}{\sigma_2}; \quad \cos \gamma = \frac{\sigma_z}{\sigma_3}.$$

将上面式子平方并且相加而得：

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_3^2} = 1$$

所得到的方程即为应力椭球方程 (拉密椭球)。在通过点 O 的一切可能平面上的全应力矢量 P_n ，其端点都在这个椭球表面上。椭球的半轴为主应力 σ_1, σ_2 和 σ_3 (图 4)。

如果应力之一，比如 σ_y ，等于零，那么应力椭球就变成了椭圆，

其方程为:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_3^2} = 1$$

对于线性应力状态, 即两个正应力等于零, 就有 $\sigma_x = \pm \sigma_1$ 。

因此, 应力张量分量之间, 以及主应力之间存在有确定的关系。下面研究这些关系。

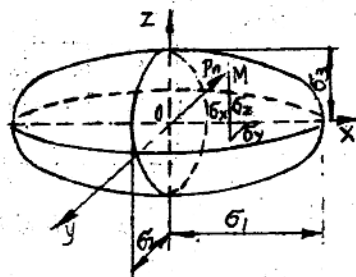


图4 应力椭球

线性(单向)应力状态。

在这种状态下, 主应力中只有一个不等于零。线性应力状态可以在杆件拉伸 ($\sigma_1 \neq 0$), 压缩 ($\sigma_3 \neq 0$) 或者弯曲 (一部分拉伸, 一部分压缩) 的情况下获得。法线与主应力 σ 的方向成 α 角的任何平面上作用的正应力和剪应力由下述公式确定:

$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\alpha);$$

$$\tau_\alpha = P_\alpha \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha.$$

这时,

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+\pi/2} = \sigma, \quad \tau_\alpha = -\tau_{\alpha+\pi/2}.$$

即在任何两个互相垂直的平面上, 其正应力之和是常量。而在这两个平面上的剪应力数值相等, 方向要么就指向这两个平面的交线, 要么就背离它们的交线。

在线性应力状态的单元中, 主剪应力值 (当 $\alpha = \pm 45^\circ$ 时) 为:

$$\tau_{max} = +\frac{\sigma}{2}, \quad \tau_{min} = -\frac{\sigma}{2}.$$

平行于 σ 的平面上, 正应力和剪应力等于零 (图5)。

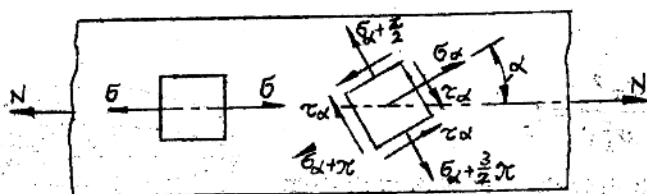


图5 单向拉伸时平面单元边上的应力

平面（双向）应力状态。

在平面应力状态下，三组面上只有一组平面没有应力。在通常的情况下，其余两组平面上都作用有正应力和剪应力。

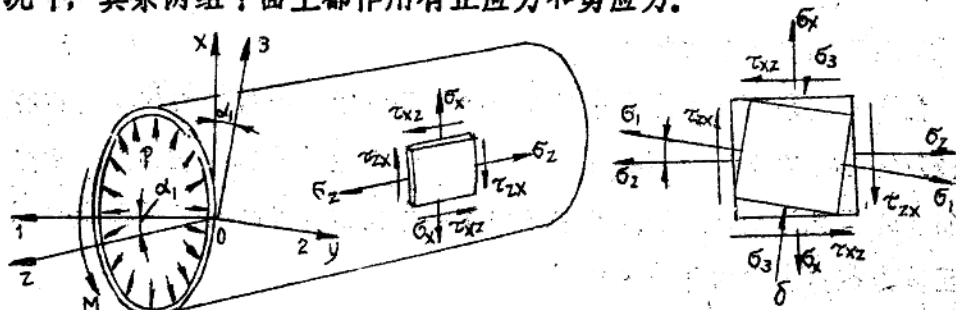


图6 平面应力状态下单元表面的应力

在图6 a 中，绘出了受内水压力和扭矩的薄壁圆筒。在筒壁单元体的表面上，作用有正应力和剪应力。当 p 和 M 值已知时，其单元面上的剪应力和正应力值由下列公式计算：

$$\sigma_x = \frac{pd}{2\delta}; \quad \sigma_z = \frac{pd}{4\delta}; \quad \tau_{xz} = \frac{2M}{\pi d^2 \delta}$$

式中， d —筒的直径； δ —壁厚。

当比值 δ/d 足够小时，则筒壁内的应力状态可视为平面的（ $\sigma_x = 0$ ）并且是均一的（在筒的全部范围内应力相同）。

有三个平面。其中二个平面的法线方向分别为 x 和 z 向，并且它们上面的应力分别为 σ_x 、 τ_{xz} 和 σ_z 、 τ_{zx} ，另一个平面则为法线与 z 轴

夹角成 α 的任意平面，其上的应力为 σ_α 和 τ_α 。这三个面上的应力之间的关系可以表达为下列公式：

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha; \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (\text{I. 3})$$

在图 6.8 中，表示了平行六面单元体的应力状态，并由此得出 xz 平面上的主轴 1 及 3，而主轴 2 则与 y 轴重合。

主轴的方向可由主平面上剪应力 τ_α 及 $\tau_{\alpha+\pi/2}$ 等于零的条件求出。因此

$$\tan 2\alpha = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}.\quad (\text{I. 4})$$

用公式 (I. 4) 求出的两角间相差 $\pi/2$ 。其中，一个角值对应于最大主应力平面，而另一个则对应最小主应力平面。用 α 角的值，代入 σ_α 的公式，经三角运算而得出：

$$\begin{aligned}\sigma_{max} = \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}; \\ \sigma_{min} = \sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}.\end{aligned}\quad (\text{I. 5})$$

由式 (I. 3) 的 τ_α 表达式得出；最大剪应力与主应力成 45° 角。此时，

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.\quad (\text{I. 6})$$

从式 (I. 3) 和 (I. 5) 得出，

$$\sigma_x + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_3^* = \sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+\pi/2}.$$

* 译者注：此处原文为 σ_2 ，似应为 σ_3 ，故更译。