中国人民解放军测绘学院
一九七九年度学术讨论会

从波动方程到司托克斯公式

党 诵 诗

一九七九年 四月

從波動方程到司托克斯公式

党诵诗

考虑到实里埃光学和重力测量学的需要，本文通过波动方程的解来阐明波的传播和引力位的关係，着重讨论了绕射理论的亥姆赫茨——基尔霍夫积分定理，以及重力测量的司托克斯定理和司托克斯公式。

一、基本公式：

设Ω是以曲面Σ为界的区域，点$M\in\Omega$（图1）

对于Ω内具有二阶连续偏微商的函数$u(M)$与$v(M)$，从曲面积分理论知道，有格林公式

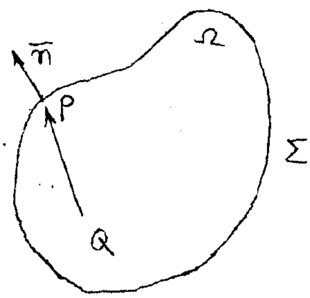


图 一

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,d\tau = \iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dq \quad (1)$$

式中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$，$\frac{\partial}{\partial n}$ 是点P的外法向微商。

今考虑波动方程

$$\nabla^2 V = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - F(M;t) \qquad (2)$$

的解当$t=t_0$時在点Q的值$V(Q;t_0)$

像推导质体位满足位势方程那样，可以得到

$$V(Q;t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]-[V]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}+\frac{1}{ar}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\right)dg$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{[F]}{r}d\tau \qquad (3)$$

公式(3)叫做基尔霍夫公式。 $r=r_{QP}=|\overrightarrow{QP}|$ $r_{QM}=|\overrightarrow{QM}|$ a是波的传播速度 $[g]$ 表示 $g(P;t)|_{t-r/a}$，r/a就是从点Q到Σ上的点P的传播时间

指出一点，(3)式积分号下的微商$\frac{\partial V}{\partial n}=\frac{\partial V(M)}{\partial n}\Big|_{M\to P}$，

$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}=\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r_{QM}}\Big|_{M\to P}$，以下同此。

二、波的传播

1、 球面波 柱面波 平面波

令$F\equiv 0$，求解波动方程的始值问题

$$\begin{cases}(2)\\ V(P;t)|_{t=0}=\varphi(P); \\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(P)\end{cases} \qquad (4)$$

在公式(3)中，取Σ为以Q为中心，at_0为半径的球面$\Sigma^{a}_{at_0}$: $r=at_0$；因而 $t=t_0-\frac{r}{a}=0$，$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial r}$ $=\cos^2(\overrightarrow{QP},\vec{n})\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}$，于是得到刻划球面波的解

$$V(Q;t_0)=\frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\iint_{r=at_0}\frac{\varphi}{r}\,dq\iint_{r=at_0}\frac{\psi}{r}\,dq\right) \quad (5)$$

如果问题(4)中的V、φ、ψ与z无关，则(5)式的曲面积分就化为二重积分，积分区域为$\sum\limits_{at_0}^{Q}$投影到XOY平面上的元域：$r_0\leq at_0$ 于是得到刻划柱面波的解

$$V(Q;t_0)=\frac{1}{2\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\iint_{r_0\leq at_0}\frac{\varphi}{r_0}\,d\sigma+\iint_{r_0\leq at_0}\frac{\psi}{r_0}\,d\sigma\right) \quad (6)$$

$r_0=|\overrightarrow{Q_0P_0}|$，$Q_0$与$P_0$分别为点Q与P在XOY平面上的垂直投影。

同样，如果问题(4)中的V、φ、ψ与y和z均无关，则(5)中的积分又可化为x轴上的定积分，它刻划了平面波的情况。

(5)、(6)两公式的物理意义如下：球面波情况。因球面波的传播是各相同性，故仅就$\overrightarrow{PP_1}$方向讨论，设扰动范围T是以$|\overrightarrow{PP_1}|$为直径的球，①以点P的扰动来说，此扰动只是传播到与Q的距离$r=at_0$的点P_1时才对Q有影响，而当此扰动传播到与Q的距离$<at_0$的任何点P'时，对Q就不再有影响(见公式(5)) 故球面波的影响一旦经过Q之后，就不留痕迹；②以整个扰动T来说，最前面受影响的点为Q，最后面受影响的点为Q_1。Q与Q_1所在之曲面分别叫做波的前锋面和后锋面，它们分别是由T的界面的外包络与内包络形成的。由①的叙述可知，球面波有清晰的锋面。以

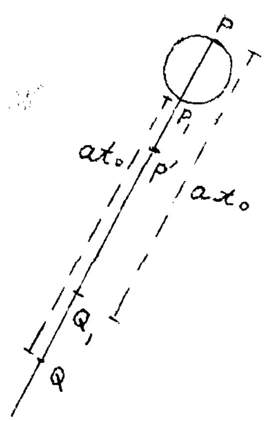


图 二

上现象称为无后效现象

柱面波没有上面的现象，因为在点 P_0 的扰动即使传播到与 Q_0 的距离 $r_0 < at_0$ 的点时，对 Q_0 仍有影响（见公式(6)），留下痕迹。这种现象称为弥散现象。

2、绕射理论的积分定理

令 $F=F_0(M)e^{2i\pi\omega t_0}$，求(2)的形如 $V=e^{2i\pi\omega t_0}u(M)$ 的解，关键在求波的振幅 $u(M)$，根据(3)并消去 $e^{2i\pi\omega t_0}$，得：

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dg+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{e^{-ikr}F_0}{r}d\tau \qquad -------(7)$$

$k=\dfrac{2\pi\omega}{a}$ 叫做波数，ω 为频率，$V(M;t_0)$ 为单色(波)光扰动。

由(2)可知，$u(M)$ 满足亥姆赫兹方程

$$\nabla^2 u+k^2 u=-F_0(M) \qquad (8)$$

公式(7)就是绕射理论的亥姆赫兹——基尔霍夫积分定律。

3、菲涅尔—基尔霍夫绕射公式

在(7)式中，令 $F\equiv0$，取 $\Sigma=S_I+S_{II}+S$（见图3）通过计算

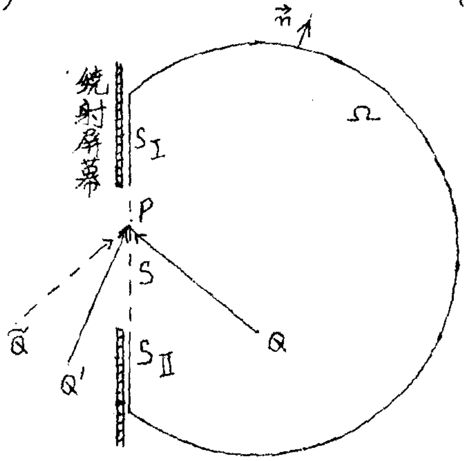


图 三

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r}=-\left(ik+\frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\cos(\overrightarrow{QP},n)$$

—————— (9)

于是，有

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r}\right|_{P\in S_R}=-\left(ik+\frac{1}{R}\right)\frac{e^{-ikR}}{R}\cdot 1$$

$$\approx -ik\cdot\frac{e^{-ikR}}{R}\quad \left(k\gg\frac{1}{R}\right)$$

对(7)式增加辐射条件：$\frac{\partial u}{\partial n}+iku=o\left(\frac{1}{R}\right)$（因而 $u=O\left(\frac{1}{R}\right)$），得

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_I+S_{II}+S}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dq$$

—————— (10)

在(10)式中，增加基尔霍夫条件：(i)在 S_I、S_{II} 上，$u=0=\frac{\partial u}{\partial n}$；(ii)在孔径S上，$u$、$\frac{\partial u}{\partial n}$ 如同没有屏幕时一样，于是，有

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ikr}}{r}\right)df \qquad (11)$$

上式中的S如果是由点Q上的光源所产生的单个球面波照明的，则 $u(P)|_{P\in S}=\frac{Ae^{-ikr'}}{r'}$ $(r'=|\overrightarrow{Q'P}|)$，利用公式(9)，

并注意当$P\in\Sigma$时，$k\gg\frac{1}{r}$，$k\gg\frac{1}{r'}$，这样(11)式就成为

$$u(Q)=\frac{ikA}{4\pi}\iint_S\frac{e^{-ik(r+r')}}{rr'}\left(\cos(\overrightarrow{QP},\vec{n})-\cos(\overrightarrow{Q'P},\vec{n})\right)dq$$

$$=U(Q,Q') \qquad (12)$$

(12)式是单个点光源照明时的菲涅尔——基尔霍夫绕射公式，因为$U(Q,Q')=U(Q',Q)$，故对于点Q的一个点光源，在点Q′观察的效果，和对于Q′的一个点光源，在Q观察的效果是一样的。(互易定理)

4、惠更斯——菲涅尔原理

在图3中、设点$\tilde{Q}$与Q为关S的对称点，即$\tilde{r}=|\overrightarrow{\tilde{Q}P}|=|\overrightarrow{QP}|=r$，$\cos(\overrightarrow{\tilde{Q}P},\vec{n})=-\cos(\overrightarrow{QP},\vec{n})$，在公式(1)中，取调和函数$v=\frac{e^{-ikr_{\tilde{Q}M}}}{r_{\tilde{Q}M}}$，以及$u(M)$，$M\in\Omega$ 仿照(11)的推导，有

$$0=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{e^{-ik\tilde{r}}}{\tilde{r}}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ik\tilde{r}}}{\tilde{r}}\right)dq \qquad (13)$$

(11)与(13)边边相减，得

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)dq \qquad (14)$$

函数$G(M,Q)=\frac{e^{-ikr_{QM}}}{r_{QM}}-\frac{e^{-ikr_{\tilde{Q}M}}}{r_{\tilde{Q}M}}$ 叫做Ω内的格林函数，当$M\to P\in S$时，$G(M,Q)\to 0$。另外由公式(9)计算，

可得 $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{M\to P} \approx -2ik\cdot\frac{e^{-ikr}}{r}\cos(\overrightarrow{QP},\vec{n})$，于是，(14)式成为

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint_S u\frac{\partial G}{\partial n}dq=\frac{ik}{2\pi}\iint_S u(P)\frac{e^{-ikr}}{r}\cos(\overrightarrow{QP},\vec{n})dq \qquad (14')$$

公式(14′)称为惠更斯—菲涅尔原理

如果也有像(12)式的那个假设：$\left.u(P)\right|_{P\in S}=\frac{Ae^{-ik\tilde{r}}}{\tilde{r}}$，则代入(14′)式之後，可以得到

$$u(Q)=\frac{ikA}{2\pi}\iint\frac{e^{-ik(r+\tilde{r})}}{r\tilde{r}}\cos(\overrightarrow{QP},\vec{n})dq \qquad (15)$$

三、引力位问题

在亥姆赫兹方程中，令 $k\to 0$，就得到泊松方程

$$\nabla^2 u=-F(M) \qquad (16)$$

由(7)式，写出它的解（$Q\in\Sigma$ 之内）

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dq+\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega\frac{F_0}{r}d\tau \qquad (17)$$

若 Σ 是光滑曲面，且 $Q\in\Sigma$ 之上，则(17)中的系数应代之以 $\frac{1}{2\pi}$，即

$$u(Q)=\frac{1}{2\pi}\iint_\Sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dq+\frac{1}{2\pi}\iiint_\Omega\frac{F_0}{r}d\tau \qquad (18)$$

若 $Q\in\Sigma$ 之外，则 $\nabla^2\frac{1}{r}=0$ 直接由公式(1)即得

$$0=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dq+\iiint\limits_{\Omega}\frac{F_0}{r}d\tau \tag{19}$$

综上所述，有

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{F_0}{r}d\tau+\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dq=\begin{cases}4\pi u(Q); & Q\in\Sigma\text{ 内}\\ 2\pi u(Q); & Q\in\Sigma\text{ 上}\\ 0 & Q\in\Sigma\text{ 外}\end{cases} \tag{20}$$

1、单层位、双层位

取 $F_0=4\pi C\mu(M)$，方程(16)成为位势方程

$$\nabla^2 u=-4\pi C\mu(M) \tag{21}$$

C是引力常数，$\mu(M)$ 是质体 Ω 的密度函数

习知，(21)的解就是质体位

$$u(Q)=C\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mu(P)}{r}d\tau=V(Q)$$

代入(20)，经过整理即有

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(V\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right)=\begin{cases}0; & \text{内}\\ 2\pi V(Q); & \text{上}\\ 4\pi V(Q); & \text{外}\end{cases} \tag{22}$$

左端的两个积分分别是双层位（以V为矩密度）与单层位（以 $\frac{\partial V}{\partial n}$ 为密度）。

2、位的水准节值层

取（22）中的Σ为引力位水准面：$V(P)=V_0$，则双层位

$$\iint_{\Sigma} V\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dq=V_0\iint_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dq=\begin{cases}V_0\cdot(-4\pi) & 内\\ V_0\cdot(-2\pi) & 上\\ 0 & 外\end{cases}\qquad (23)$$

$\iint_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dq$ 叫做从点Q视光滑闭曲面Σ的立体角。

将(23)代入(22)式，得

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{r}\left(\frac{-1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}\right)dq=\begin{cases}V_0;\ \text{grad}\iint_{\Sigma}\frac{1}{r}\left(\frac{-1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}\right)dq=0，作用为0，即不吸引内部点。\\ V_0；在\Sigma上每点的位相等，等值面。\\ V(Q)，对于外部点，质体位可用层位表示\end{cases}$$

3、司托克斯定理

在（17）式中，取 $u=V(P)+H(P)=W(P)$，$V(P)$是引力位，$H(P)=\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$ 是离心力位，即$W(P)$是重力位，于是，$-F_0(P)=\nabla^2 u=\nabla^2 V+2\omega^2=-4\pi C\mu(P)+2\omega^2$，再取Σ为重力位水准面（图4）：

$$W(P)=W_0$$

于是，在Σ上，有

$$-\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial W}{\partial n}=g(P)$$

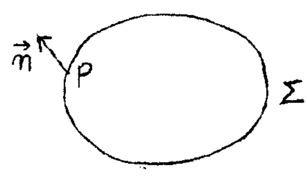


图 四

$g(P)$是Σ上点P处的重力值，以上一一代入（20），并注意立体角的计算，得

$$\iiint_{\Omega}\frac{4\pi C\mu}{r}d\tau-2\omega^2\iiint_{\Omega}\frac{d\tau}{r}-\iint_{\Sigma}\frac{g}{r}dq-W_0\begin{Bmatrix}-4\pi\\ -2\pi\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{cases}4\pi W(Q)\\ 2\pi W(Q)\\ 0\end{cases}$$

或

$$\frac{\omega^2}{2\pi}\iiint_{\Omega}\frac{d\tau}{r}+\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{g}{r}dq=\begin{cases}W_0-H(Q) & Q\in\Sigma\text{内}\\ V(Q) & Q\in\Sigma\text{上}\\ V(Q) & Q\in\Sigma\text{外}\end{cases}\quad(24)$$

上式右端的第三个式子表明：由重力位水准面Σ所围质体对其外部一点的引力位，只与Σ的形状、Σ上的重力值以及旋转角速度ω有关，与质量如何分布无关（司托克斯定理）.

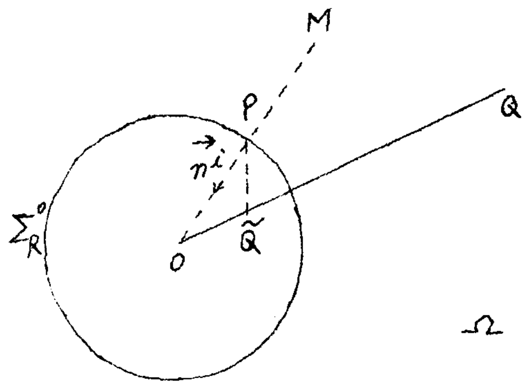
4、司托克斯公式

设T为重力测量中的扰动位，在(17)式中，令$F_0\equiv 0$，取Σ为球面Σ_R^0，Ω为Σ_R^0的外P区域（图五），並且取

$$u=\frac{1}{R\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2T)=E$$

如所习知，求T的问题先求下面问题的解：

$$\begin{cases}\nabla^2E(M)=0 & M\in\Omega\\ E(P)=-\Delta g & P\in\Sigma_R^0\\ \lim\limits_{\rho\to\infty}\rho^2T=0\end{cases}$$



$oQ=\rho$，$o\tilde{Q}=\tilde{\rho}$

图 五

Δg为重力异常

由公式(17)得

$$E(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma_R^0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial n^i}-E\frac{\partial}{\partial n^i}\frac{1}{r}\right)dq\qquad(25)$$

在图甚中设$\tilde{Q}$与Q为关于$\overset{\circ}{\Sigma}_R$的对称点，即$\tilde{\rho}\rho=R^2$，于是，$\triangle PO\tilde{Q}\backsim\triangle QOP$，故$\frac{R}{\rho}=\frac{\tilde{\rho}}{R}=\frac{r_{\tilde{Q}P}}{r}$，今在公式(1)中、取调和函数$v(M)$ $\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_{\tilde{Q}M}}$ 及$E(M)$，得

$$0=\frac{1}{4\pi}\iint_{\overset{\circ}{\Sigma}_R}\left(\frac{R}{\rho r_{\tilde{Q}P}}\frac{\partial E}{\partial n_i}-E\frac{\partial}{\partial n_i}\frac{R}{\rho r_{\tilde{Q}P}}\right)dq \quad ------ \quad (26)$$

(25)与(26)边边相减、得

$$E(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\overset{\circ}{\Sigma}_R}\left(G\frac{\partial E}{\partial n_i}-E\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)dq \qquad (27)$$

函数$G(M,Q)=\frac{1}{r_{QM}}-\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_{\tilde{Q}M}}$ 叫做Ω 内的格林函数（参阅公式(14)），当$M\longrightarrow P\in\overset{\circ}{\Sigma}_R$时，$G(M,Q)\to 0$，另外，直接计标，可得

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n_i}\right|_{M\to P}=-\left.\frac{\partial G}{\partial n_e}\right|_{M\to P}=\frac{R^2-\rho^2}{r^3},$$

于是(27)式成为（注意到$E(P)=-\Delta g$）

$$E(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\overset{\circ}{\Sigma}_R}\Delta g\cdot\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dq \qquad (28)$$

将E换为T，两端关于ρ从ρ_0到ρ积分，得

$$\rho^2 T = \rho_0^2 T_0^2 + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma_R^0} \Delta g\left(\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho(R^2-\rho^2)}{r^3} d\rho\right) dq$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma_R^0} \Delta g\left[\frac{2\rho^2}{r} - 3r - 3\mu \ln(\rho-\mu+r)\right] dq$$

$\mu = R\cos(\overrightarrow{OP}、\overrightarrow{OQ})$

特别要指出的是，有两点重要工作：在$\rho^2 T \to 0$的条件之下，确定出与ρ无关的常数，$k \equiv 0$；证明$\nabla^2 T = 0$，完成了以上工作之后，可以得到简化的司托克斯公式：

$$T(Q) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma_R^0} \Delta g\left[\frac{2}{r} - \frac{3r}{\rho^2} - \frac{3\mu}{\rho^2}\ln(\rho-\mu+r)\right] dq$$

A．H．吉洪诺夫等，《数学物理方程》（汉译本，1961）

饭塚啟吾，《光工学》，共立出版株式会社（1977）

J．W．顾德门，《傅里叶光学导论》，（汉译本，1976）

党诵诗，关于重力测量中的斯托克斯公式，《军事测绘》(1978.2)