962

中等师范学校教材

初等数学复习与研究

（初等几何部份）

上海市中等师范学校教材编写组

说　明

师范教材《数学》包括“算术理论”、“教材教法”和“初等数学”等三部份。

鉴于目前中等师范学校招生对象尚不稳定，有些学校的新生是从应届或历届高中毕业生中录取的，借用普通中学的初等数学教材就显得不太适宜。为此，我们编写了这套《初等数学复习与研究》教材，供二年制（招收高中毕业生）中等师范学校第一学年试用。

《初等数学复习与研究》包括两个分册，本册是“初等几何”部份，由上海师范学院数学系杨荣祥同志担任主编。参加本书编写工作的还有王明欢、陈丽萌、陆惠英、王叔如、严扶平等同志。

本书在出版过程中曾得到浙江省义乌师范学校与浙江省浦江印刷厂的大力支持和帮助，对此我们表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限，编写时间又十分匆促，书中一定会有很多缺点和错误，希望同志们提出宝贵的意见和批评。

上海市中等师范学校
教材编写组
1980年3月

目　　录

第一章　直线形和圆

第一节　直线形与圆的位置关系

1.1　点与点的位置关系

平面上两个点的位置关系只有两种：两点重合或两点不重合

确定一条直线的条件：

公理　过（不重合）两点能引一条直线，而且只能引一条直线。（即两点可以确定一条直线）。（如图1—1）

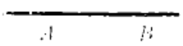


图　1—1

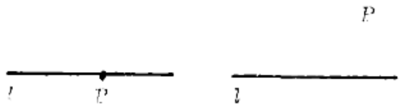


图　1—2

1.2　点与直线的位置关系

平面上一个点与一条直线的位置关系也只有两种：点在直线上（或称直线通过点）或点不在直线上。（如图1—2）

---

*除判定位置关系的情况以外，今后两点、两线等，一般都指不重合而言。

如果点O在直线l上，则直线l上 O点一旁的 部分称为射线，（如图1—3）O称为射线的端点。记作射线OA。

如果A、B是直线l上任意两点，则直线l上A、B两点间的部分称为线段。（如图1—4）A、B分别称为 线段AB的端

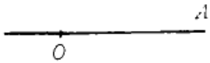


图 1—3

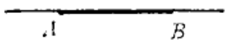


图 1—4

点。记作线段AB。

在连结两点的线中，以线段为最短。该线段的长称为两点之间的距离。

线段的比较：如果把线段 AB 放到线段 CD 上，使A点与C点重合，并且使线段AB沿着线段CD的方向落下，则线段AB 的另一端点B的位置必 将出现下 列三种 情况之一：B点在线段CD上；B 点与D 点重合；或 B点在 CD 的延长线上。这时我们分别称为线 段 $AB<CD$， $AB=CD$ 或 $AB>CD$。（如图1—5）.

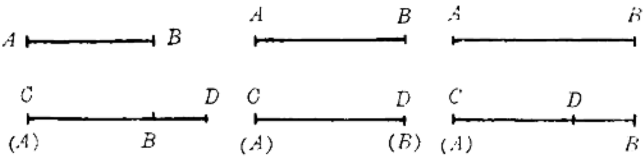


图 1—5

线段的和或差：如果在线段AB上有一点C，则 线段AB称为线段AC与CB的和，其中每一条线段AC或CB称为线段AB与另一条线段的差，（如图1—6）．记作

$AB=AC+CB$，$AC=AB-CB$　（或$CB=AB-AC$）。

为了求得两线段AB和CD的和，可以延长线段AB（或CD），并在延长线上从B点（或D点）起截取线段BE（或DE）使等于线段CD（或AB），则线段AE（或CE）即为两线段AB与CD的和（如图1—7）。类似地可以从一条较长线段AB中减去一条较短的线段CD（如图1—8）。则线段AE即为线段AB与CD的差。

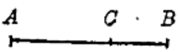


图　1—6

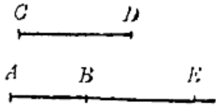


图　1—7

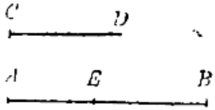


图　1—8

1.3　直线的与直线的位置关系

1．平面上两条直线的相互位置关系

平面上两条直线的位置关系有三种：重合、相交或平行(如图1—9)。

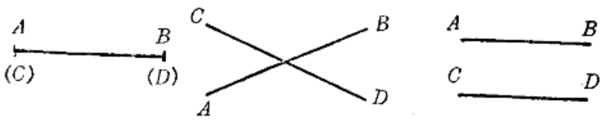


图　1—9

(1)两线重合：两线有两个公共点。

(2)两线相交：两线有而且只有一个公共点。

为了进一步描述两相交直线的情况，就要引用角的概念。如果从O点引出两条射线OA及OB，则由O点及射线

OA、OB所组成的图形称为角*（如图1—10）。记作$\angle AOB$。O点称为角的顶点，OA、OB称为角的边。

角的比较：如果把$\angle AOB$移置到$\angle A'O'B'$**上，使它们的顶点O与O'重合，$\angle AOB$的一边OA与$\angle A'O'B'$的一边$O'A'$重合，并且使OB、$O'B'$在重合的一边$O'A'$（OA）的同侧，则$\angle AOB$的另一边OB的位置也将出现下列三种情况之一：OB在$\angle A'O'B'$的内部，OB与$O'B'$重合，或OB在$\angle A'O'B'$的外部．这时我们分别称为：$\angle AOB<$

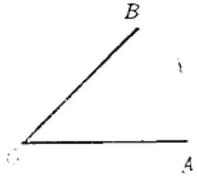


图 1—10

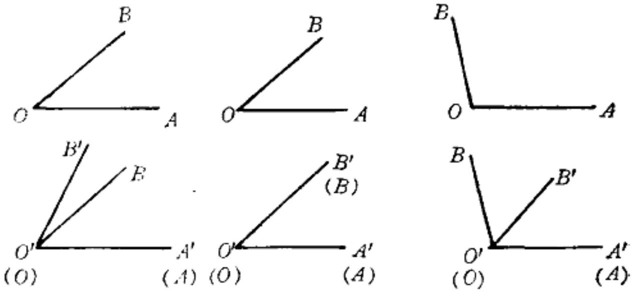


图 1—11

---

* 关于$\angle AOB$我们也可以把它看作是由射线OA（起始位置）绕着它的端点O向反时针方向旋转至OB（终至位置）而形成的图形．OA称为$\angle AOB$的始边、OB称为$\angle AOB$的终边．

** 1、这里$\angle AOB$及$\angle A'O'B'$都是指小于平角（180°）的角（称为劣角）．

2、把$\angle AOB$移置到$\angle A'O'B'$上，是指：使$\angle AOB$所在的平面与$\angle A'O'B'$所在的平面重合．并且认为在移置$\angle AOB$的过程中，角的两边的相对位置始终是没任何变化的．

$\angle A'O'B'$、$\angle AOB=\angle A'O'B'$或$\angle AOB>\angle A'O'B'$.

两角的和或差：如果在$\angle AOB$内部，以它的顶点O为端点引一射线OC（如图1—12），则称$\angle AOB$为$\angle AOC$与$\angle COB$的和，其中每一个角$\angle AOC$或$\angle COB$称为$\angle AOB$与另一个角的差。记作：$\angle AOB=\angle AOC+\angle COB$　$\angle AOC=\angle AOB-\angle COB$（或$\angle COB=\angle AOB-\angle AOC$）.

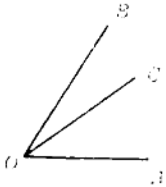


图　1—12

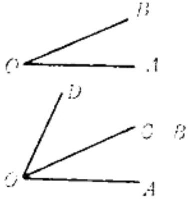


图　1—13

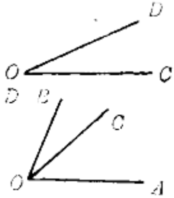
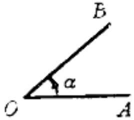
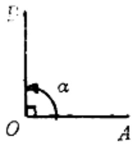
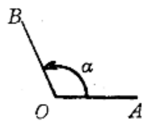
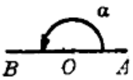
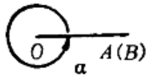


图　1—14

为了求得两角$\angle AOB$与$\angle COD$的和，可以把$\angle AOB$（或$\angle COD$）移置到另一个角上，使它们有公共的顶点和一边，并且使它们的其他两边分别在公共边的两侧（如图1—13），则$\angle AOD$即为$\angle AOB$与$\angle COD$的和。类似地可以从一个较大的角$\angle AOB$中减去一个较小的角$\angle COD$（如图1—14）．则$\angle AOC$即为$\angle AOB$与$\angle COD$的差.

角的分类：

项目	锐　角	直　角	钝　角
定义	$0°<\alpha<90°$	$\alpha=90°$	$90°<\alpha<180°$
图形			

项目	平角	周角
定义	$\alpha=180°$	$\alpha=360°$
图形		

数量相关的两角：

如果角$\alpha+\beta=90°$，则称角α、β为互余的角（如图1—15）．

定理 同角（或等角）的余角相等．

如果角$\alpha+\beta=180°$，则称角α、β为互补的角（如图1—16）．

定理 同角（或等角）的补角相等。

位置相关的两角：

如果两个角有一个公共顶点和一条公共边而其他两边分别在公共边的两侧，则这两个角称为互为邻角(如图1—17)．

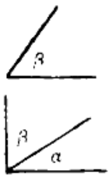


图 1—15

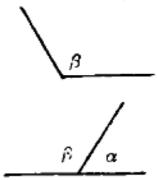


图 1—16

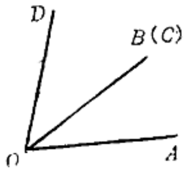


图 1—17

如果一个角的两边分别是另一个角的两条边的反向延长线，则称这两个角为对顶角（如图1—18）．

定理 对顶角必相等．

如果两条直线被第三条直线所截（两条直线分别与第三

条直线相交）则这三条直线相交组成8个角（如图1—19），分别称$\angle 1$和$\angle 5$，$\angle 2$和$\angle 6$，$\angle 3$和$\angle 7$，$\angle 4$和$\angle 8$为同位角。$\angle 3$和$\angle 5$，$\angle 4$和$\angle 6$为内错角，$\angle 4$和$\angle 5$，$\angle 3$和$\angle 6$为同旁内角。

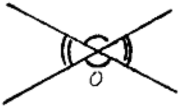


图 1—18

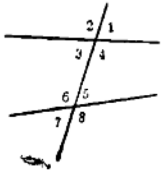


图 1—19

相交成直角的两条直线称为互相垂直的直线，其中每一条直线都称为另一条直线的垂线。它们的交点称为垂足（如图1—20）。

如果相交的两条直线并不互相垂直，则其中每一条直线都称为另一条直线的斜线，它们的交点称为斜线足（如图1—21）。

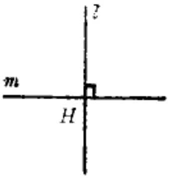


图 1—20

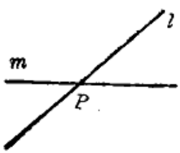


图 1—21

定理 过直线外一点（或直线上一点）能引而且只能引这直线的一条垂线。

如果过直线l外任意一点P，引l的垂线。设P'是它的垂

足，则称P'点为P点在直线l上的射影（如图1—22）。

如果P点在直线l上，则P点在l上的射影即为P点本身（如图1—23）。

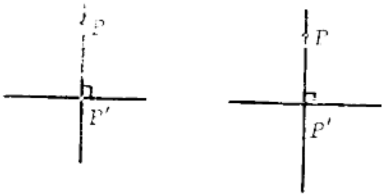


图 1—22

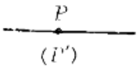


图 1—23

如果线段AB的两端点A、B在直线l的射影分别为A'、B'，则称线段$A'B'$为线段AB在直线l上的射影（如图1—24）。当线段AB垂直于直线l时，AB在直线l上的射影即为A'点（或B'）（如图1—25）。

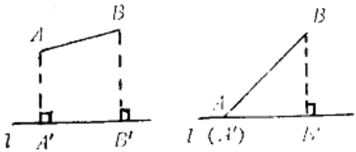


图 1—24

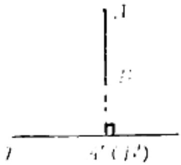


图 1—25

定理 直线外一点与直线上的点所连的线段中，以垂直于直线的线段（垂线的长）为最短。（即一点到直线的垂线的长总小于该点到这直线的任一斜线的长）

一点到直线的垂线的长称为点与直线之间的距离。

(3)两线平行：两线没有公共点。

平行公理* **过已知直线外一已知点，只能引一条直线与已知直线平行。**

(i)平行线判定法：

(a)**定理** 两条直线被第三条直线所截，

如果 $\left\{\begin{array}{c}\text{同位角相等}\\\text{内错角相等}\\\text{同旁内角互补}\end{array}\right\}$，则两直线平行。

(b)**定理** 如果两条直线都与第三条直线 $\left\{\begin{array}{c}\text{平行}\\\text{垂直}\end{array}\right\}$，则两直线平行。

(ii)平行线性质：

(a)**定理** 如果两直线平行，则同位角相等、内错角相等、同旁内角互补。

(b)**定理** $\left.\begin{array}{c}\text{平　行}\\\text{相交(垂直)}\end{array}\right\}$于两平行直线之一的直线必 $\left\{\begin{array}{c}\text{平　行}\\\text{相交(垂直)}\end{array}\right\}$于另一条直线。

---

*与平行公理等价的命题“同平面两直线与第三条直线相交，若其中一侧的两个同旁内角的和小于180°，则该两直线必在这一侧相交”是欧几里得在《几何原本》中作为公设提出来的。历史上曾经有许多几何学家认为这个命题很不简单，似乎应该作为一个定理，于是企图象证明其他几何定理一样，来加以证明这个断言，这种企图延续了两千年以上，但是都没有获得成功。直到十九世纪初，三位几何学家：俄国的罗巴切夫斯基、匈牙利的波尔雅和德国的高斯前后不约而同地指出这个断言不可能加以证明，应当把它作为一个公理。并创立了一种新的几何学称为罗氏几何学或非欧几何学。至此才明确平行公理实是欧几里得几何体系的重要基石之一。

例 1．已知：（如图1—26）$\angle BAC$ 和 $\angle ACD$ 互为补角，EG、FH 分别是 $\angle AEF$、$\angle EFD$的平分线。

求证：$EG \parallel FH$、

证明：$\because \angle BAC$和 $\angle ACD$ 是AC截AB、CD 两线的一组同旁内角，今$\angle BAC$和$\angle ACD$ 互补，则$AB \parallel CD$。

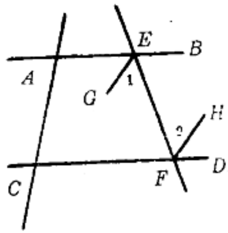


图　1—26

而$\angle AEF$和$\angle EFD$是EF截AB、CD的一组内错角，

$\therefore \angle AEF = \angle EFD$.已知$EG$、$FH$分别是$\angle AEF$、$\angle EFD$的平分线，则$\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle AEF = \frac{1}{2}\angle EFD$。

而$\angle 1$和$\angle 2$是EF截EG、FH的一组内错角，

$\therefore EG \parallel FH$。

说明：(1)要分清平行线的判定定理与性质定理，解题时切莫搞错。

(2)要分清三线八角，如例1，我们能证得$\angle AEG = \angle HFD$，但这两角并不是EG和FH被第三线所截而成的一组同位角或内错角，因此不能由$\angle AEG = \angle HFD$运用平行线判定定理得出$EG \parallel FH$的结论.

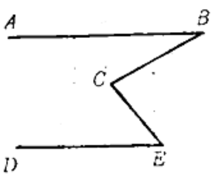


图　1—27

例 2．已知：（如图1—27）$\angle BCE = \angle B + \angle E$。

求证：$AB \parallel DE$。

〔分析〕过C点作AB的平行线CF，如果再能证得$CF \parallel DE$，则利用平行线判定定理即可证得$AB \parallel DE$。

本题还可以先连BE，后证$\angle ABE + \angle BED = 180°$或延长$BC$交$DE$于$G$，然后证$\angle B = \angle CGE$。

证明：略。

例3．对应边互相平行，并且从顶点出发的方向都相同的两个角必相等。

已知：（如图1—28）$\angle AOB$与$\angle A'O'B'$的对应边$OA \parallel O'A'$、$OB \parallel O'B'$，并且OA、$O'A'$以及OB、$O'B'$都同向。

求证：$\angle AOB = \angle A'O'B'$。

证明：$\because OA \parallel O'A'$，既然$OB$与$OA$相交于$O$点，则$OB$必与$O'A'$也相交，设其点为$C$，则$\angle AOB = \angle 1$。

又 $OB \parallel O'B'$，则$\angle 1 = \angle A'O'B'$。

$\therefore \angle AOB = \angle A'O'B'$。

对于例3．我们很易加以推广：

分别作$O'A'$以及$O'B'$的反向延长线（如图1—29）得$\angle D'O'E'$。

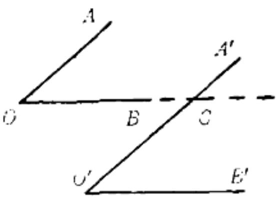


图 1—28

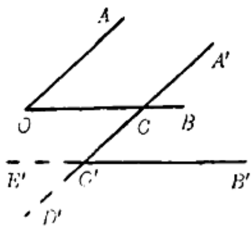


图 1—29