

北京计算流体力学 讨论会文集

(第二辑)

PAPERS PRESENTED AT THE BEIJING WORKSHOP
ON COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

1990

中国科学院力学研究所编辑出版

1991年10月

前 言

第2届北京计算流体力学讨论会论文集出版了,这对我们每一个参加这项工作的同志都是很大的鼓励。这里我们要特别感谢中国科学院力学研究所的支持,尤其是原所长郑哲敏同志主持出版了第1届论文集,为它的持续出版打下了良好的基础。

计算流体力学的应用极其广泛,不同应用领域之间的交流,往往能促使一些共同基础问题得到较好的解决。近几年来,对双曲型方程所提出的 TVD 格式得到广泛的应用,这在我们的论文集中当然会有所反映。但是从发展的眼光看, TVD 格式不是格式发展的终结。从计算流体力学发展的历史来看,像 Mac Cormack 格式等曾经风行一时,并曾被《美国宇航(Aerospace America)》在一年的流体力学总结中评为划时代的成就。可是它也存在不少问题。整体来说,计算流体力学作为一门应用的技术科学,它的基础——数学物理的发展是很不适应的。哈密顿力学各类辛格式是一个基础,我们在实际工作中还遇到很多耗散系统,这里暂且不谈湍流问题。

在估计到我们的基础还比较薄弱的同时,我们要提倡计算流体力学工作者在计算方面大胆探索,因为往往是实践走在理论前面。另外,评价计算结果的好差还有力学的实验。总之,我们的目标是长期坚持,锲而不舍,瞄准前沿,大胆创新,一定要走出自己的路子来。

我利用这个机会写这几句话,希望和国内计算流体力学的同行共勉之,不当之处请批评。

庄逢甘

1991年2月

北京计算流体力学讨论会

论文集编委会名单

主 编 庄逢甘

副主编 傅德薰

编 委 (以姓氏笔划为序) 卞荫贵 朱自强 庄逢甘 邬华谟
李家春 李维新 沈孟育 张德良 谈庆明 凌国灿
黄兰洁 黄 敦 傅德薰 董常铨

前言

北京计算流体力学讨论会论文集编委会名单

1. 不可压离散涡方法新进展——介绍用质点处理扩散项的方法 庄逢甘(1)
 2. 流体弹塑性体运动的数值模拟 谈庆明 张德良(6)
 3. 不可压 Navier-Stokes 方程的隐式投影法 黄兰洁 伍亚丹(22)
 4. 准谱方法求解不可压 Navier-Stokes 方程 陈 芳 卞荫贵(31)
 5. MmB—A New Class of Accurate High Resolution Schemes for Conservation Laws
in Two Dimensions Wu Hua-mo Yang Shu-li(45)
 6. 微分近似方法 Ю. И. Шокин(84)
 7. 平面叶栅跨声速有旋流动正反混合问题的高效率解法
..... 刘秋生 沈孟育 任玉新(85)
 8. 气动计算中色散可控的迎风紧致格式 马延文 傅德薰(93)
 9. 代数多重网格法中的几个新插值公式 常谦顺 李正锋(103)
 10. 涡旋法及其对基本流动的模拟 凌国灿(113)
 11. 三维简化 Navier-Stokes 方程的推进迭代解法 王汝权 薛具奎(130)
 12. 守恒格式稳定性分析与耗散守恒格式 李松波(139)
 13. 高分辨率格式的构造及数值结果 金保侠(147)
 14. 辛几何及计算哈密顿力学 秦孟兆(154)
 15. 太阳大气中的磁流体动力学数值模拟 刘新萍(161)
- 北京计算流体力学讨论会简介

不可压离散涡方法新进展

——介绍用质点处理扩散项的方法

庄逢甘

空气动力学研究会

提 要

尽管在精度上和理论上的相容性方面还不严格和完善,离散涡方法仍被计算流体力学作者广泛地应用着,本文讨论了新发展的考虑粘性效应影响的朗格朗日方法。为了保证所需要的精度,还需通过理论分析和数值计算的方法做进一步和细致的研究,特别应加强数值模拟的研究。

关键词 离散涡方法;数值模拟;朗格朗日方法

离散涡方法早在 1931 年 Rosenhead 就提出来了,那时人们还没有电子计算机。离散涡方法进入比较实用的阶段只是在巨型机出现以后。这方面的工作已有较好的评述性文章,如见 Leonard (1980,1985)特别是 Sarpkaya (1989)的总结性文章。

在无粘流的情况下,方法的理论根据是 Kelvin-Helmholtz 定理,即涡线上各点随当地速度移动且涡线集(涡管)保持其环量不变。数字求解的办法是将涡量场分解成为离散的 Lagrange 涡元,涡元根据当地速度运动,在短时间 Δt 内移到新的位置,然后根据涡元的新位置重新计算速度场,这样循环计算下去。这一计算过程实际上模拟了物理上涡动力学发展的过程,这样的结果是理论上可靠的。这个方法的好处是不采用网格。实际计算表明涡元数必须足够大才能获得比较准确的结果,但涡元数大,计算工作量随之增加很多,且远大于线性增长;因此在过去一段时间内设想了多种办法来减少计算工作量。

关键的问题是考虑粘性流,即粘性的影响。为了保留这种不依赖网格的优点我们必须用 Lagrange 涡元来表达涡扩散的影响。

为说明问题,我们考虑二维不可压 NS 方程

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (2)$$

流动区域为 Ω , 在固体壁面 Γ 上,边界条件为速度给定:

$$\underline{u} = \underline{u}_w \quad (3)$$

这是原始变量的方程。若引进旋度

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} \quad (4)$$

对方程(1)取旋度得

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\omega} = \nu \nabla^2 \underline{\omega} \quad (5)$$

我们可采用时间分裂法求解。第一分步解无粘方程,第二分步解粘性扩散方程。

第一分步

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \omega &= 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \underline{u} \cdot \underline{n} &= 0, & \text{在 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

第二分步

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \nu \nabla^2 \omega, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \nu \frac{\partial \omega}{\partial n} &, & \text{在 } \Gamma \text{ 上给定} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

我们注意,在第二分步方程是线性抛物型微分方程。由于抛物型方程与随机走步的联系,Chorin 在 1973 年提出用涡元的随机走步来模拟粘性扩散效应,这种模拟的办法还提供了一个旋度从壁面进入流体的一个框架机理。但是由于随机走步概率只是在极限情况下逼近抛物型微分方程的解,所以可以预计,正如 Milinazzo 和 Saffman (1977)指出的,即使为了模拟高斯分布的涡核的扩散,也需要很大数目的涡元才能较精确地反映这一扩散过程。尽管 Chorin 持有不同的看法,但没有很强的说服力。

这样在相当长一段时间内,大部分作者致力于有效地计算非粘性流,即相当于很大雷诺数的情况。这种情况一直持续到 Raviart (1985,1987)和 Mas-Gallic 的工作。他们指出拉普拉斯算子可以用一个积分算子表示,因此涡场的离散表示将导致每一个涡元环量的发展方程,相对于随机走步而言,这一方法可称为“确定”方法。下面我们给出 Pepin (1990)的方法,他推广了 Raviart 的表达式,考虑了边界上涡的影响。他的推导依赖于涡元的正则函数 R_σ ,其定义如下:设我们将涡场离散化为 N 个涡元,

$$\omega(\underline{x}, t) = \sum_i^N \alpha_i(t) R_\sigma(\underline{x} - \underline{x}_i(t)) \quad (8)$$

σ 为涡元尺度, α_i 为涡元环量。通常我们取 R_σ 只依赖于 $|\underline{x} - \underline{x}_i(t)| = r$, $\underline{x}_i(t)$ 为涡元中心。根据定义

$$\iint_{\Omega} R_\sigma(\underline{x}) d\underline{x} = 1 \quad (9)$$

或

$$2\pi \int_0^\infty R_\sigma(r) r dr = 1 \quad (9')$$

且 $R_\sigma(\underline{x})$ 可写成如下形式:

$$R_\sigma(r) = \frac{1}{\sigma^2} R\left(\frac{r}{\sigma}\right) \quad (10)$$

Raviart 的基本概念是用涡元之间的环量随时间的变化来模拟扩散的影响。我们先引进一个卷积

$$\omega_R(\underline{x}, t) = \iint_{\Omega} \omega(\underline{y}, t) R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) d\underline{y} \quad (11)$$

此时 R_σ 可看作为一个光滑函数,它的作用是把 $\omega(\underline{y}, t)$ 中所有波长比 σ 短的变化都滤去了,大尺度的则仍保留。这从大涡模拟的角度或拟序结构的观点看是合理的。如果 σ 相当

于 Kolmogorov 尺度,而小于 Kolmogorov 尺度的可认为是各向同性的小尺度湍流随机运动。很清楚这一近似的准确程度与 R_σ 函数的矩性质有关。对于高斯核来讲误差量级为 $O(\sigma^2)$ 。我们现在来求 ω_R 应满足的方程。首先注意,用 y 空间表示

$$\frac{\partial \omega(\underline{y}, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega(\underline{y}, t) \quad (12)$$

将上式乘上 $R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|)$ 并对 y 积分。方程左端为

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial \omega(\underline{y}, t)}{\partial t} R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) d\underline{y} &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \omega(\underline{y}, t) R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) d\underline{y} \\ &= \frac{\partial \omega_R(\underline{x}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (13)$$

注意此时我们已假设 Ω 区域足够大包含了外部无旋流,在时间变化的情况下无需扩大 Ω ,另外是物面边界不变。方程右端经过分部积分

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \nu \nabla^2 \omega(\underline{y}, t) R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) d\underline{y} &= \nu \iint_{\Omega} \nabla_{\underline{y}} \cdot (R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) \nabla_{\underline{y}} \omega(\underline{y}, t)) d\underline{y} \\ &\quad - \nu \iint_{\Omega} \nabla_{\underline{y}} \omega(\underline{y}, t) \cdot \nabla_{\underline{y}} R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) d\underline{y} \\ &= \nu \int_{\Gamma} R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}_\Gamma|) \frac{\partial \omega(\underline{y}_\Gamma, t)}{\partial n} d\Gamma \\ &\quad - \nu \iint_{\Omega} \nabla_{\underline{y}} \omega(\underline{y}, t) \cdot \nabla_{\underline{y}} R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) d\underline{y} \end{aligned} \quad (14)$$

最后得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_R(\underline{x}, t)}{\partial t} &= \nu \int_{\Gamma} R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}_\Gamma|) \frac{\partial \omega(\underline{y}_\Gamma, t)}{\partial n} d\Gamma \\ &\quad - \nu \iint_{\Omega} \nabla_{\underline{y}} \omega(\underline{y}, t) \cdot \nabla_{\underline{y}} R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) d\underline{y} \end{aligned} \quad (15)$$

上式中 $\nu \partial \omega / \partial n$ 为从物面进入流体的旋度通量。这一通量可由物面速度改变和压力梯度产生。这里着重讨论右端第二项,考虑到 R_σ 的对称性

$$\nabla_{\underline{y}} R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\underline{x} - \underline{y}}{\rho} \frac{dR_\sigma(\rho)}{d\rho} \quad (16)$$

此处

$$\rho = |\underline{x} - \underline{y}| / \sigma \quad (17)$$

定义

$$\eta_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) = -\frac{1}{\rho} \frac{dR_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|)}{d\rho} \quad (18)$$

将坐标 $\underline{y}$ 的原点移到 $\underline{x}$, 并仍称该新坐标为 $\underline{y}$ 便得

$$-\nu \iint_{\Omega} \nabla_{\underline{y}} \omega(\underline{y}, t) \cdot \nabla_{\underline{y}} R_\sigma(|\underline{x} - \underline{y}|) d\underline{y} = \frac{\nu}{\sigma^2} \iint_{\Omega} \underline{y} \cdot \nabla_{\underline{y}} \omega(\underline{x} + \underline{y}, t) \eta_\sigma(|\underline{y}|) d\underline{y} \quad (19)$$

注意到 η_σ 随 $|\underline{y}|$ 的增加而急剧降低,上式中积分只须考虑 $|\underline{y}|$ 为小量时的情况,因此在积分内的函数可用二阶向后差分近似

$$\underline{y} \cdot \nabla, \omega(\underline{x} + \underline{y}, t) \approx \frac{3}{2} (\omega(\underline{x} + \underline{y}) - \omega(\underline{x})) + \frac{1}{2} (\omega(\underline{x} - \underline{y}) - \omega(\underline{x})) \quad (20)$$

上式对于高斯或相当于高斯的光滑函数是较为适用的。将式(20)代入式(19)并考虑到 η 的对称性可得

$$-\nu \int_0^\infty \nabla, \omega(\underline{y}, t) \cdot \nabla, R_e(|\underline{x} - \underline{y}|) d\underline{y} \approx \frac{2\nu}{\sigma^2} \int_0^\infty [\omega(\underline{y}, t) - \omega(\underline{x}, t)] \eta_e(|\underline{x} - \underline{y}|) d\underline{y} \quad (21)$$

上式即为 MasGallic (1985), Raviart (1985, 1987) 和 Winckelmans (1988, 1989) 用来表达在一无限区内粘性扩散的式子。当有边界存在时

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_R(\underline{x}, t)}{\partial t} &\approx \nu \int_r R_e(|\underline{x} - \underline{y}_r|) \frac{\partial \omega(\underline{y}_r, t)}{\partial n} d\Gamma \\ &+ \frac{2\nu}{\sigma^2} \int_0^\infty \eta_e(|\underline{x} - \underline{y}|) [\omega(\underline{y}) - \omega(\underline{x})] d\underline{y} \end{aligned} \quad (22)$$

假设我们现在有一个离散涡场

$$\left. \begin{aligned} \omega(\underline{x}, t) &= \sum_i^N a_i(t) \delta(\underline{x} - \underline{x}_i(t)) \\ a_i(t) &= h^2 \omega(x_i, t) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

此处为简单起见, 设每一涡元面积均相等并等于 h^2 , 显然 $a_i(t)$ 即为该涡元环量, 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_R(\underline{x}_i, t)}{\partial t} &\approx \nu \int_r R_e(|\underline{x}_i - \underline{y}_r|) \frac{\partial \omega(\underline{y}_r, t)}{\partial n} d\Gamma \\ &+ \frac{2\nu}{\sigma^2} \sum_j \eta_e(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|) [a_j(t) - a_i(t)] \end{aligned} \quad (24)$$

如用环量表示, 则

$$\begin{aligned} \frac{da_i(t)}{dt} &= h^2 \nu \int_r R_e(|\underline{x}_i - \underline{y}_r|) \frac{\partial \omega(\underline{y}_r, t)}{\partial n} d\Gamma \\ &+ \frac{2\nu h^2}{\sigma^2} \sum_j^N \eta_e(|\underline{x}_i - \underline{x}_j|) [a_j(t) - a_i(t)] \end{aligned} \quad (25)$$

这就是我们所要求的环量发展方程。

在具体计算时, 式(25)中第一项需用数值积分。前面这种推导很易推广到三维流动情况, 尽管现在计算的例子还不多。

最后我们要提到, 任何引入各种参数的数字计算中, 参数的选择会对数值解的准确性或质量有重要影响。通常当时间与空间分辨率增加时, 解的收敛性会改善。但在一些数值处理过程中, 有一些纯粹是数学工艺而与所模拟的物理问题无关。在这里我们有这样一些问题: 每一个时间步长内有多少个涡元要形成, 它们的强度各应为多少, 它们离开壁面的距离应该多大, 什么时刻可认为相邻的涡元互相合并, 涡元之间的距离 d 应如何选择, 还有正则函数 R_e 的选择, 涡元的代表尺寸 σ , 涡元必须部分重叠 $\sigma/h > 1$ 。这些问题仍有待于结合具体问题深入研究。

参 考 文 献

- [1] Degond, P., Mustieles, F.J. A deterministic approximation of diffusion using particles. *SIAM*

J. Sci. Stat. Comput. , 11(1990), 293

- [2] Mas-Gallic, S. , Raviart, P. A. Particle approximation of convection-diffusion problem. Report , Université de Paris 6, Paris, France (1985)
- [3] Raviart, P. A. An analysis of particle methods. In Numerical Methods in Fluid Dynamics, F. Brezzi. ed. , Lecture Notes in Mathematics 1127, Springer-Verlag (1985)
- [4] Pepin, F. Simulation of the flow past an impulsively started cylinder using a discrete vortex method. Ph.D. Thesis California Institute of Technology (1990)

THE DEVELOPMENT OF DISCRETE VORTEX METHOD AND ITS PROSPECT

F. G. Zhuang

Chinese Aerodynamics Research Society

Abstract

Discrete vortex method is widely used in the CFD community and sometimes it was used regardless of its accuracy and a consistent theoretical formulation. In this paper the recently developed a purely Lagrangian approach is described including the effect of viscosity. However detailed investigations are still necessary in order to assure the required accuracy not only by theoretical analysis but also mainly by numerical simulation as there are many artifacts in the numerical calculations.

Keywords *discrete vortex method; numerical simulation; Lagrangian approach*

流体弹塑性体运动的数值模拟

谈庆明 张德良

中国科学院力学研究所

提 要

在爆炸、高速碰撞等问题中,介质兼有流体和固体的特性,不能采用流体或固体作为物质模型而应视为流体弹塑性体。本文介绍了计算这类物体运动的欧拉和拉格朗日两种典型方法方面所取得的进展,提供了有关地下核爆炸、高速碰撞、爆破、爆炸加工等典型算例,并且说明了数值计算的难点以及今后发展方向。

关键词 流体弹塑性体;数值模拟;爆炸;高速碰撞

1 流体弹塑性模型及其应用背景

1965年郑哲敏和解伯民在研究地下核爆当量的预报问题时,提出了流体弹塑性体模型。美国学者几乎在同时也提出了这种模型。在地下核爆炸、高速碰撞等问题中,在早期爆源或碰撞点附近,介质中产生极高的压力以致可忽略介质的强度效应,介质可当作流体;然而在晚期或在远区,压力不高,流动不显著,介质的强度起控制作用,介质应视为固体。为使早期和晚期,近区和远区具有自然和连续的过渡变化,采取兼有流体和固体特征的流体弹塑性体模型是十分相宜的。

表1列出了几种典型情况在早期爆源或碰撞点附近介质中的强度和压力的相对数值,说明了像土岩、金属这样的常规固体,此时也只能当作流体。然而随时间和距离的增加,强度逐渐起作用直至发展成为决定因素。

表1 几种典型情况^[1]

类 型	$Y(\text{GPa})$	$p(\text{GPa})$	Y/p
地下核爆炸	0.5	10^3	5×10^{-4}
土岩爆破	0.01—0.5	5	$2 \times 10^{-3}—10^{-1}$
爆炸硬化	1	10	10^{-1}
爆炸复合	1	10—50	$10^{-1}—2 \times 10^{-2}$
陨石碰撞	0.1—0.5	$10^2—10^3$	$10^{-3}—5 \times 10^{-4}$
破 甲	1	$10—3 \times 10^4$	$10^{-1}—3 \times 10^{-5}$
穿 甲	1	5	2×10^{-1}

2 流体弹塑性体运动的数学表述

流体弹塑性体模型的核心含义是把内应力 σ_{ij} 分解为各向均匀的静水压力 $-p\delta_{ij}$ (此

处取负号是因为应力总是定义为以拉力为正)与剪应力偏量 S_{ij} 之和以及把应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 分解为各向均匀的比容变化率 $\frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \delta_{ij}$ 与反映畸变的应变率偏量 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 之和, 即有

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \delta_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij}$$

其中

$$p = -\sigma_{ii}/3, \quad \dot{V}/V = \dot{\epsilon}_{ii}$$

且压力满足介质的热力学状态方程, 即压力 p 是比容 V 和比内能 E 的确定的函数, 而应力偏量满足介质的受力和变形之间的关系, 即应力偏量 S_{ij} 是应变偏量 ϵ_{ij} , 应变率偏量 $\dot{\epsilon}_{ij}$, 比内能 E 和表征破坏的特征量 K 的确定的函数, 即

$$p = p(V, E), \quad S_{ij} = S_{ij}(\epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, E, K)$$

由于体积变化会影响压力和内能的变化, 从而改变介质的强度特性, 最终影响介质的畸变; 另一方面, 畸变消耗的塑性功使内能增加, 反过来影响体积变化。可以看出, 在具有高速、高压、高温和大畸变等特征的爆炸或高速碰撞等问题中, 用流体弹塑性体模型描述的介质运动在体积变形和剪切变形之间以及力学效应和热效应之间存在着强烈的耦合。

一般来说, 一个爆炸问题或一个高速碰撞问题, 在数学上可以用偏微分方程的初边值问题来描述。它包括基本方程和初边值定解条件两部分。而基本方程又分为守恒方程和参与运动的物质的本构关系两部分。

守恒方程

	欧拉坐标下	拉格朗日坐标下
质量守恒	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$
动量守恒	$\rho \frac{du_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$	$\rho \frac{\partial u_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$
能量守恒	$\rho \frac{dE_T}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ij} u_j}{\partial x_i} = 0$	$\rho \frac{\partial E_T}{\partial \alpha} - \frac{\partial \sigma_{ij} u_j}{\partial x_i} = 0$

其中, ρ 是密度, 等于 $1/V$, u_i 是速度, E_T 是单位质量的总能量, 等于 $E + (1/2)u_i u_i$ 。

本构关系

状态方程	$p = p(\rho, E)$
畸变本构	$S_{ij} = S_{ij}(\epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, E, K)$

应该说明, 这里对运动和变形的描写还是作了小变形的假设, 计算动能转化时忽略了弹性变形能。如果某一物体可视为流体, 则令应力偏量和应变偏量为零。一般, 用虎克定律描写弹性变形, 用理想塑性关系描写塑性变形, 即用 von Mises 屈服准则判定屈服的发生, 屈服以后则用 Prandtl-Reuss 关系。关于断裂的描述, 至今没有好办法, 常采用极简单的近似, 例如用比容准则判定拉断的发生, 但这不能确定断裂界面的形状。

定解条件 包括初始条件和边界条件。

初始条件 给定初始时刻物体的位形、速度和热力学状态。

边界条件 在自由面上作用力为零; 在两物体交界面上, 给定滑动条件或摩擦条件。

3 两类数值计算方法

3.1 计算的离散化

①和容性 即要求差分计算格式和微分方程问题的提法相容,当步长趋于零时,差分方程要逼近微分方程。

②精度 为满足一定的精度要求,尽量把方程写成守恒型以减小累计误差。一般,内点格式常用迎风格式和 Lax-Wendroff 格式的思想来构造。

③人工粘性 为适应击波的计算常加入人工粘性,根据具体情况往往取线性式,二次式或它们的组合形式。

④稳定性 时间步长 Δt 和空间步长 Δx (格元的最小边长)满足 Courant-Friedrichs-Lewy 条件,即

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v| + c}$$

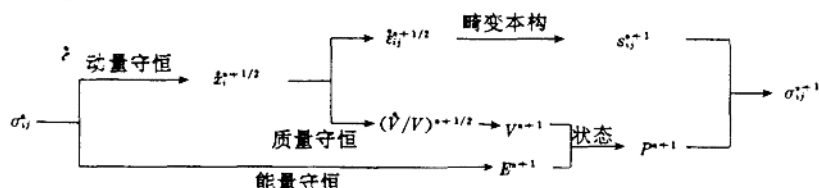
其中 $|v| + c$ 乃是所有格元中速度绝对值与声速之和的最大值。

⑤计算效率 要和精度要求相协调而取得满意的计算效率。

计算方法基本上可分为拉格朗日法和欧拉法两类,其他则是这两类的某种混合。拉格朗日法描述物体的界面自然而比较精确,但难以处理大畸变的情况;相反,欧拉法不存在大畸变困难,但却难以描述界面。下面分别叙述它们的特点。

3.2 拉格朗日法

这一方法把坐标网格固定在物体上,常常把物体的表面选为某一坐标分量的等值面。采用这类方法的最有名的编码程序乃是由 Wilkins 编制的 HEMP 编码^[2,3]。计算流程大体是这样的:从已知 $t^{n-1/2}$ 时刻的速度 $\dot{z}_i^{n-1/2}$ 及 t^n 时刻的应力 σ_{ij}^n , 比容 V^n 和比内能 E^n 出发,一方面用动量守恒计算 $t^{n+1/2}$ 时刻的速度 $\dot{z}_i^{n+1/2}$, 从而得到比容变化率 $(\dot{V}/V)^{n+1/2}$ 和应变率偏量 $\dot{\epsilon}_{ij}^{n+1/2}$, 于是容易求出 t^{n+1} 时刻的比容 V^{n+1} , 而用畸变本构关系则求出应力偏量 S_{ij}^{n+1} 。另一方面,用能量守恒计算 t^{n+1} 时刻的比内能 E^{n+1} 。最后由 V^{n+1} 和 E^{n+1} 用状态方程算出压力 p^{n+1} , 利用已求出的 S_{ij}^{n+1} 终于求出 t^{n+1} 时刻的应力 σ_{ij}^{n+1} , 比容 V^{n+1} 和比内能 E^{n+1} 以及 $t^{n-1/2}$ 时刻的速度 $\dot{z}_i^{n+1/2}$ 。下面是这一流程的示意:



HEMP 编码的一个特点是,比较成功地把两物体间的滑动界面的计算作了解耦处理:以一个物体为主体,其边界面看作主面;而另一物体为从体,其边界面看作从面。在一个时间步内,首先,设主面固定不动,界面上的结点 f^n 在从体应力差作用下沿主面滑动到 f^* ;其次,主面 $(K,)^n$ 随主体单元在主体和从体的应力作用下移动到新位置 $(K,)^{n+1}$;接着,从体内点 P^n 按内点差分格式移动到 p^{n+1} ;最后,根据 p^*f^* 是物质线的性质,在 p^{n+1} 和 f^* 之间连直线并延长与主面 $(K,)^{n+1}$ 相交,认为所得交点 f^{n+1} 乃是界面上结点的新位置,

见图 1。这种主从解耦的算法后来被推广到很多拉格朗日法的程序中。

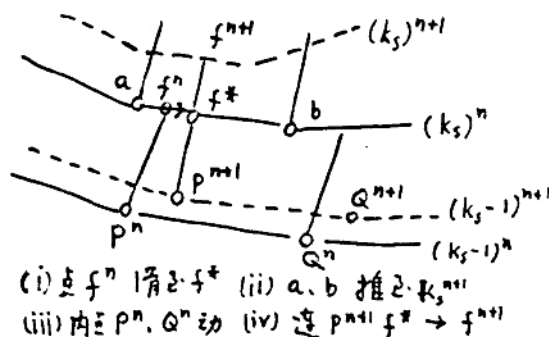


图 1 滑动边界计算步骤

最近十几年发展起来的有限元方法,其实也是一种拉格朗日法,只不过在 2 维问题中用三角形格元代替一般的矩形格元,而在 3 维问题中用具有三角形表面的四面体代替一般的六面长方体。Johnson^[4]编制的 EPIC 编码是比较有名的一种,国内李荫藩和梁珍璇^[5]、梁德寿^[6]以及王肖钧等^[7]都在这类程序上有所研究和发展。

拉格朗日法的一个根本缺点是格元不能经受大畸变,例如对 2 维问题,即使像 EPIC 这样的三角形有限元编码也不能计算大大的畸变。如果畸变太大,有可能使格元某一边长缩得很短,以致因 C-F-L 条件导致极小的时间步长;对四边形网格甚至导致格元进一步扭成麻花 8 字型交叉,而格元体积变负的现象。所以当计算不能继续下去时,就需要做重分网格^[8]的处理,利用几个物理量的守恒原理重新确定新格元的质量、速度和内能。这里发生一个困难:用质量守恒当然可以确定新格元的质量和比容,但根据什么原则确定新格元的速度和比内能呢?若用动量守恒确定速度,则动能也就被确定,于是用总能守恒便确定比内能,但这样的比内能往往比实际情况要高,因为这里引进了某种非弹性碰撞的机理。若用动能守恒确定速度,则又引进了另一种机理而得到另一种比内能。总之,重分网格会引入误差。

3.3 欧拉法

和拉格朗日法不同,欧拉法取固定在空间的坐标而不取随物体运动的物质坐标。由于坐标网格固定不动,物体相对于它而发生运动,所以在一个格元的边界上,有质量输入或输出,随之也有动量和能量的输入或输出,称之为对流。

在很多欧拉法编码程序中广泛应用分裂算子法,它最早出现在计算非定常可压缩流体运动的 PIC 编码^[9]中。在守恒方程的左端只留下变量对时间的局部微商项,而把有关对流和压力作用的项移到右端。例如要算经过一个时间步后的速度 u_i^{n+1} ,先算压力效应,即令对流项为零,因压力梯度的作用使速度从 u_i^n 变为过渡速度 u_i^* ;再算对流效应,即令压力项为零,因对流的作用使 u_i^* 变为 u_i^{n+1} 。在计算流体弹塑性体运动的程序中,守恒方程的右端还多了应力偏量效应一项,因此分裂也相应地多了一步。此类程序中,比较著名的有

Hageman 等^[10]编制的 HELP 编码, Johnson^[11]编制的 OIL 编码等。后来, Johnson^[12]编制了 SOIL 编码, 把分裂算法用得更为彻底, 不仅做了上面说过的物理效应的分裂, 而且还做了空间效应的分裂, 即把空间 2 维问题的计算分裂为两个空间 1 维问题的连续运算。大量计算实践证明, 分裂算法有较高的精度。在理论上也有人对其相容性作了一定的论证。

由于坐标网格始终不变形, 物质在网格中流动, 所以不受畸变程度的限制, 但是却没有拉格朗日法分辨界面自然而精确的优点。因为对于一个格元而言, 只定义格元的质量、速度和状态参数, 在格元内很难定义物体界面的形状(取向)和位置。这给交界面(包括自由面)的识别及其推进带来了困难。因为一个格元只有一组力学和热力学参数, 这等于说格元内不同物体具有相同的速度、应力和热力学状态; 又由于不知道界面的取向和位置, 所以不可能较精确地计算和实现各种可能的边界条件, 例如滑动或摩擦界面的条件等。同样原因引起自由面附近发生的伪扩散(也称数值扩散)现象, 因为既然自由面所在格元内存在物质且具有速度, 在一个时间步内必然向外围的空格输送质量、动量和能量, 以致使该空格在这一步结束就马上变成有物质的自由面所在格, 照此发展下去, 物体的体积不断发生非物理的扩散, 自由面形状不可能精确计算。

人们不断努力改进界面推进的计算。Hageman 等在 HELP 编码中, 利用 PIC 方法的思想在初始时刻在物体边界上设置一系列无质量不参加动力学运算的示踪点, 按照它的位置和周围格元格心速度取加权平均确定它的速度从而计算一个时间步后的新位置。相邻两示踪点用直线连接而形成表示边界的折线段, 根据折线和坐标网格线的相交位置确定对流和输运量。这种设置示踪点的做法在改进界面计算的精度方面起了一定的作用, 但程序复杂, 计算量大, 也不能实现真正的界面上的物理条件。Johnson 在 SOIL 编码中将多维空间计算分裂为多个 1 维空间的计算, 每个 1 维空间计算实质上相当于让界面沿着该维方向作平推运动。这种算法程序简单, 计算量小, 但物体形状的计算还嫌粗略。Glaun 等^[13]在 CTH 编码中也用空间分裂算法, 但在界面所在格元引入平面界面, 在 1 维计算中按平面的倾斜度和格元边界的相交情况确定输运量, 提高了精度。

谈庆明和刘小苹^[14]曾经对 HELP 编码中自由面的处理和计算做过一些改进。李德元、李维新和于志鲁^[15]编制了 MEPH 程序, 较成功地减轻了自由面附近的伪扩散, 在聚能射流的形成和侵彻问题中计算得到较满意的射流形状。罗忠文和谈庆明^[16]在 SOIL 编码的基础上对密度分布作了适当的后处理, 在高速冲击问题中得到较满意的坑形。

4 应用实例

本节介绍在地下核爆炸、聚能射流破甲、高速碰撞、工程爆破以及爆炸压实等方面的应用实例, 说明流体弹塑性体运动的数值计算在军用、民用等方面均有广泛的应用和重要意义。

4.1 地下和地面核爆炸

郑哲敏、解伯民、李荫藩、张德良和刘育魁^[17]用 1 维球对称流体弹塑性模型计算了深层核爆炸问题, 给出了地冲击波传播和衰减规律, 应用于地下核爆炸当量的预报。图 2 给出 1000 吨 TNT 当量地下核爆条件下径向应力 σ_r 在不同时刻的径向分布规律。

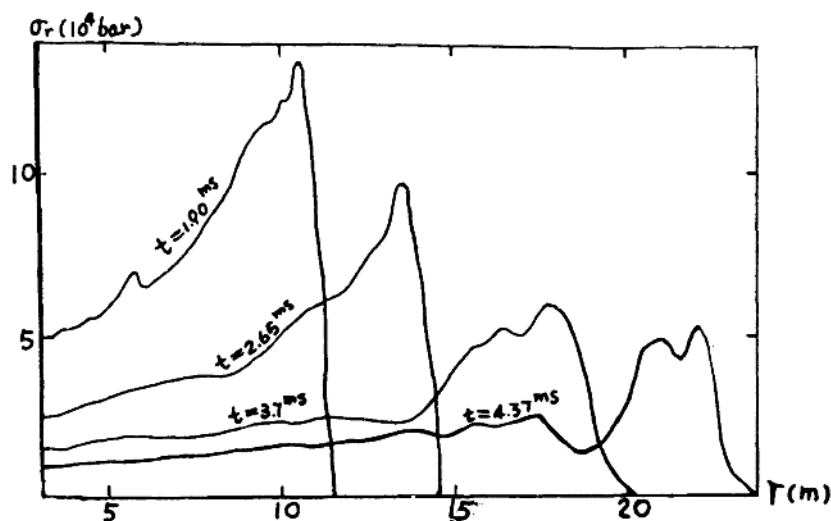


图2 地下核爆炸径向应力分布曲线

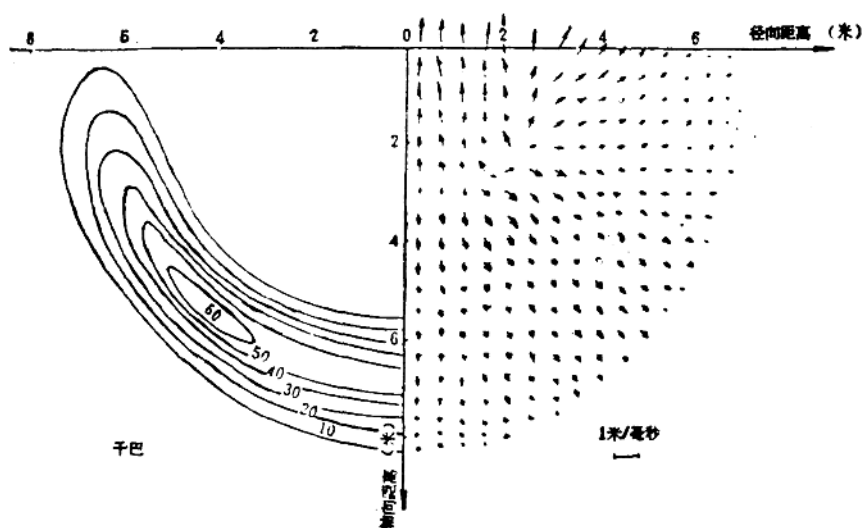


图3 触地爆炸应力场和速度场

张德良、李荫藩和曹亦敏^[16]用欧拉型的FLIC流体动力学编码,加入介质强度效应后计算了2维触地核爆炸问题,给出了地冲击波受地表面影响后传播规律,考察了材料参数对爆炸形成的影响。图3给出了1000吨TNT当量在触地爆炸条件下, $t=13.7$ 毫秒时的应力场和速度场。

4.2 聚能射流破甲

秦孟兆、谢春生、谈庆明和刘小苹^[14]在欧拉型的 HELP 编码基础上,改编了程序,计算了钢甲抵抗聚能射流的临界射流速度。图 4 给出了以射流速度为横坐标,孔底侵彻速度为纵坐标的两者在定常侵彻条件下计算得到的关系。图上通过原点的直线乃是以不可压缩流体为模型的理论线,两者的差别说明在低速射流情况下的钢甲强度效应。

李德元、李维新和于志鲁^[15]用自编欧拉程序 MEPH 编码计算了聚能射流形成和侵彻装甲全过程,应用了高精度内点格式和自由面处理技巧,成功地克服了自由面伪扩散的困难,得到了边界分明与实际比较符合的关于射流形成和侵彻过程的结果。图 5 给出了用 MEPH 编码数值模拟聚能射流形成发展的详细过程,详细描述了不同时刻聚能射流的形状和特点,和实验结果符合得十分好。

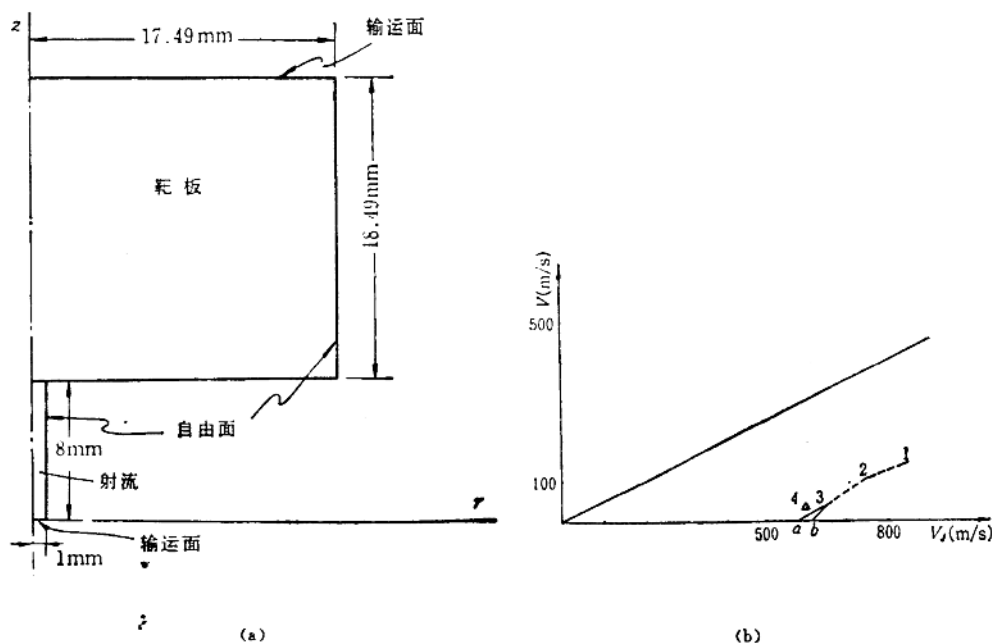


图 4 (a)聚能射流侵彻示意图;(b)定常侵彻计算和理论结果比较

4.3 高速碰撞

罗忠文和谈庆明^[16]以欧拉型的 SOIL 编码为基础,改进了自由面识别技巧,计算得到高速弹丸在厚金属靶上留下来的和实际十分接近的半球弹坑。图 6 是铝弹丸以 5.6 公里/秒的速度撞击无限厚靶时,在时间为 4, 8, 12 微秒时弹坑形状的计算结果。同时还计算了高速铝弹丸撞击铝薄靶时所形成的碎片云问题。图 7 是铝弹丸以速度 5.6 米/秒撞击铝薄靶时碎片云的密度分布,其中图 7(a)是碎片云形成的示意图。

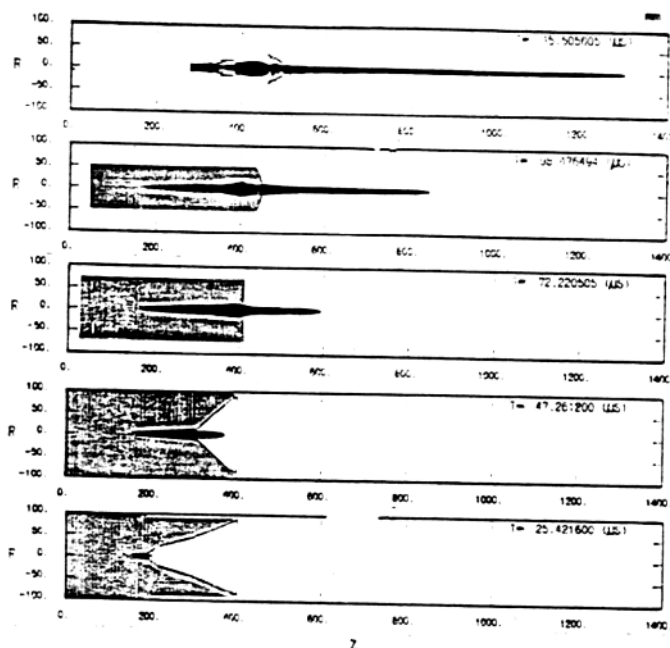


图5 聚能射流形成过程

$V=5.6$ —密度分布— $t=8$.

$V=5.6$ —密度分布— $t=12$.

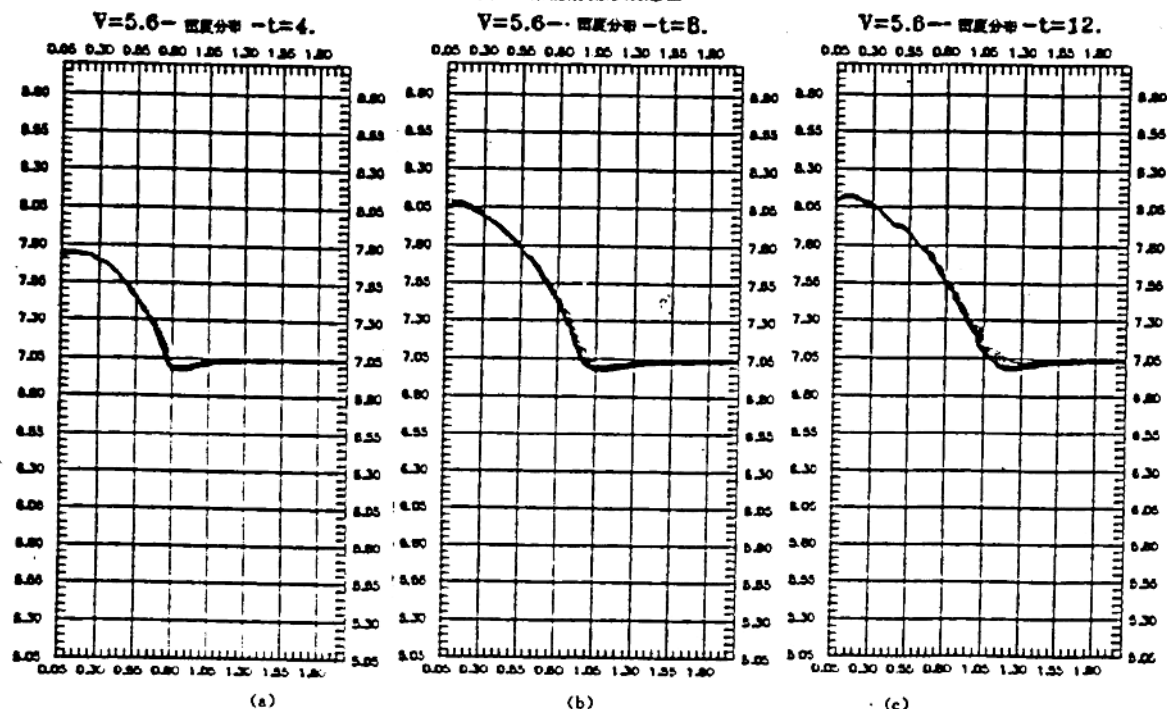


图6 铝弹丸撞击靶形成坑过程