

液 压 系 统 实 用 计 算

戚 昌 滋 编 著

北 京 建 筑 工 程 学 院
情 报 资 料 室
一 九 八 一 . 二 .

说

明

1. 本稿为本人在全市举办的北京市液压设计(交流、研究)学习班讲课内容的第二部分,第一部分“液压系统图的设计”及第三部分“电液伺服控制与实用数控系统”正在确定初稿;

2. 本稿的实例部分主要是非标准液压机械及技术革新产品,绝大部分均为北京市各单位已投入使用的项目,具有实际参考价值;

3. 本稿主要供工厂液压设计工程师、技革技改人员及高等院校机械与液压专业学生毕业设计的参考;

4. 本稿撰写时间仓促,单位、符号及图号等均未统一,待正式定稿后再修改;错误之处也在所难免,希读者见谅;

5. 参加北京市液压设计(交流、研究)学习班的同志为
本稿提供了大量素材,在誊写、插图、校版方面得到了张虹、
张凤琴、朱慈莲、申海翠、任建平、王至英、薛文瑞、吴勃华、
崔保和等同志们的全力帮助,特此致谢。

编 者

1981.2.

78.292/20

目 录

序言	1
第一章 液压系统设计计算基础	7
第一节 高等数学在液压设计中的应用	7
1. 作为运算工具	2. 作为分析表达式
3. 列出数学模型	4. 推导公式
5. 论证问题	6. 解决实际技术问题
第二节 基本力学在液压设计中的应用	14
1. 确定载荷谱	2. 确定动力参数
3. 确定几何参数	4. 确定液压驱动力
5. 连续方程的运用	6. 能量方程的运用
7. 动量方程与动量矩方程的运用	
第三节 相似理论与量纲法在液压设计中的应用	28
1. 简单相似求参量	2. 推导相似判据
3. 进行模拟试验计算	4. 求函数关系
5. 相似设计法求参数	
第四节 图算法在液压设计中的应用	35
第五节 逻辑代数在液压设计中的应用	40
1. 逻辑代数要点	2. 表达文字叙述与物流状态
3. 判断与改善系统中的问题	4. 设计控制回路
5. 创造新的逻辑代	

第二章 液压系统总体计算与验算 57

第一节 液压冲击的计算 57

第二节 压力损失的计算 69

第三节 温升发热的计算 76

第四节 泄漏的分析计算 86

第五节 液压系统总体计算 109

第六节 液压系统效率的计算与高效率蓄能器系统 126

第三章 典型液压机械计算与实例 137

第一节 机床液压系统设计计算 138

第二节 压力机械液压系统设计计算 165

第三节 工程机械液压系统设计计算 197

第四节 铁道机械液压系统设计计算 233

第五节 农配机械液压系统设计计算 277

第六节 冶金机械液压系统设计计算 305

第七节 铸造机械液压系统设计计算 351

第八节 数控与机械手液压系统设计计算 377

第九节 电液伺服控制液压系统设计计算 393

第十节 液压支承的液压系统设计计算 429

序 言

六十年代以来，各类机械的液压化程度逐年提高，液压技术的可靠性与先进性毋庸置疑，已使英参透到各个领域。但是，虽然液压技术的应用已发展到成熟阶段，然而尚有许多新的课题亟待研究，且现有适用技术也需要总结提高。

七十年代机械发展的特点是技术上的相互渗透（即数学、生态学、控制论、逻辑学、管理科学、电子技术与流体工程等交叉地集中在一台机械上），大量的目标函数，使产品设计进入了第三代，公式计算法、类比统计法与稳态分析法等设计方法已逐步向高级设计方法过渡，可以说，产品设计正在走向可靠性设计、自动化设计与最佳化设计的新时代。

当前发展中的设计技术有下列三种：

一、数值解法

目前多用有限差分法（把对象场偏微分数学模型加以离散化，按一定间隔选取若干分点，求其差分值，使方程变成了易于计算的差分方程。结合计算机的应用，现已发展为迭代法、松弛法等）与有限元法（用变分原理离散化，进行矩阵分析与数值计算）。

二、相似模拟法

一般相似模拟方法有物理模拟（如样机模拟、光弹法、光干涉法与电路模拟等）与计算机模拟（用模拟语言叙述连续变易系统的微分方程、方框图与传递函数，用计算机模拟求解）二种。

三、计算机辅助设计法

一般用数学中的最优化方法及 Fortran 语言，进行逼近计算，求取最佳方案或最佳参数，结合光笔自动绘图机，得出所需图样。

但是，上述的现代方法与现有白英设计法是相辅相成的，而且前者往往更前者为基础与前提，而我国当前的情况，现有白英设计法的应用技术与理论基础还没有系统化与深入化，尤其是液压系统的设计与计算，这方面目前尚有大另工作要做。编写本书的目的，就是试图把这项工作实用化与普及化。

现有设计方法是把初步设计、机械设计、施工设计分级进行的，现代设计方法要求综合考虑各种影响因素的目标函数，所以必须进行平行递次设计方法，而不是三阶段法。在液压系统设计程序上也同样如此，它包括：

1. 分析综合要求；
2. 调研同类机械；
3. 选定性能参数；
4. 拟定液压系统；
5. 选用液压元件；
6. 总体设计计算；
7. 验算压力损失、发热温升、压力冲击与泄漏分析；
8. 画装配图。

一般设计计算说明书也基本上包括这些内容。

在设计计算液压系统前，应知道对被系统的要求。各种液压系统都各有不同的要求，概括地说，对一了液压系统的要求是：

1. 执行工作部件所要求的动力（功率，力，力矩）
2. 能实现工作部件所需要的运动，工作循环，调速范围，运动平稳性和运动精度（如换向精度）
3. 传动效率要高，温升不超过允许值（特别是大功率的系统）
4. 结构简单，元件匹配合理，工作可靠，操纵、维修方便

等。

对系统的各项要求中，最主要的是要能满足工作性能方面的要求，即工作部件的力和运动方面的要求。这是一般情况下液压系统设计要解决的主要问题。在满足工作性能和工作可靠的前提下要力求简单而完善、经济而先进和维修的方便。

在设计一个系统时，要考虑到很多因素。但是基本的东西都是相似的，要综合运用液压技术各方面的知识才能恰当地解决。液压设计的基本内容和一般步骤归纳如下：

1. 根据所设计的液压设备的用途、工作条件和性能要求，确定液压系统方案；

2. 根据所确定的液压系统方案，确定液压系统，拟定液压系统简图；

3. 进行初步计算，选择和设计液压元件和辅助装置，绘制正式的液压系统图和装配图。

这几个步骤是互相联系的，往往要经过多次反复才能设计出初步的液压系统，在加工制造、装配使用、维修保养的实践过程中系统难免会出现在设计中忽视和考虑不周的一些问题，所以要根据实践中出现的问题，修改设计，才能获得较好的液压系统。

下面具体介绍一下液压系统设计的步骤：

1. 确定液压系统方案；

- ① 明确所设计的液压系统的任务和性能。

首先了解该系统的工作对象，负载情况，所要求的力和扭矩，工作部件的运动形式（转动，移动或摆动），工作部件的最大运动速度和最小运动速度（调速范围）及对运动平稳性的要求和对工作部件的其它特性要求（如各部件的同步，随动运动，停留时间，换向精度，各工作部件的运动顺序和相互配合

一个运动循环的时间等)。系统工作的安全要求,各部件动作的连锁关系;系统操纵自动化程度,液压系统与其它传动系统的分工配合等。

② 确定液压系统的总体方案

按照工作对象、负载情况,再结合液压系统担负的任务和性能要求可以确定系统的形式:开式系统或闭式系统(一般多采用开式系统)。选择调速方式:节流调速或容积调速。选择泵的类型(目前一般是中、低压用齿轮泵和叶片泵,高压用柱塞泵)。选择缸泵或缸马达类型,以及需要采用的控制方式,即压力控制,行程控制,时间控制或并用几种控制。各液压元件是根据系统要求选定的,一般有手动的,电磁的,电液的,液动的,气动的和机械传动的几种。一般系统的工作液体是矿物油,对于高温易燃条件下工作的系统往往采用乳化液。

确定一个具体的系统方案时,牵涉的问题相当广泛,往往要综合运用各方面的技术和知识。如功率小的用节流调速的开式系统,功率大的用容积调速的闭式系统;对运动平稳性要求高的而且负载变化较大的,要增设稳压装置;对换向精度要求高的应采用行程制动;起动频繁的要考虑油泵卸荷;在一个工作循环中耗油量差别很大或需能量能流的系统,可以采用蓄能器,两个以上的运动机构,要求保证不同油压的应在液压回路串联减压阀或用不同的油泵供油;自动化程度要求高的,可采用电子、电气或机械控制;几个机构先后动作的次序要求严格时,用程序控制;要求惯性小的可用蓄压回路;执行机构要跟随输入信号动作时,用液压随动系统,等等。

2. 拟定液压系统工作原理图

一个液压系统的执行机构(缸缸、缸马达)要使机构完成所要求的动作(就是对工作机构输出一定的力或力矩、及运动

方向、运动速度等几个参数），可分别由压力控制回路，方向控制回路及速度控制回路等基本回路来实现。所以拟定一个液压系统的工作流程图，就是要灵活运用各种基本回路，来组成一个完善的、合理的、简单的、能够实现工作机构的力、力矩和运动要求，以及自动循环和其它要求的装置。

拟定液压系统流程图的一般方法可按以下顺序进行：

- ① 画出驱动各个工作机构的执行机构（油缸、油马达）；
- ② 画出作为能源的油泵及能源的一些基本回路；
- ③ 画出使执行机构运动方向换向的方向控制回路；
- ④ 画出控制执行机构的力、力矩的压力控制回路；
- ⑤ 画出实现执行机构运动速度大小的速度控制回路；
- ⑥ 按照执行机构的动作顺序和自动循环的控制，画出相应的顺序和辅助回路。

⑦ 画出起安全、保险和连锁作用的阀和辅助设备（压力继电器、压力开关等）以及滤油口、冷却口、加热口、油箱等。

实现同样动作，可能有多种系统，这就要从各个方面对它们进行比较，选择一种比较合适的系统方案。在拟定液压系统简图时，还要注意以下几个问题：

① 在组合各个基本回路时，要特别注意回路中有没有相互干扰，能否按照原来设想的要求来动作；

② 应避免系统中存在的多余回路；实现执行机构的力、力矩和运动各项要求的回路，应尽可能简单可靠。回路愈复杂，出差错的机会就愈多，功率消耗也愈大，生产成本也就愈高；

③ 要注意系统的安全可靠性，尽可能减少事故停车时间。为此，在回路中要装安全阀或定压阀，以控制系统的最大载荷，防止过载。突然过载一般是因工件或活赛撞在缸盖上引起的，也可增设安全装置，如行程限制阀，连锁开关和缓冲阀等。还

要解决减小压力冲击等技术问题。

④ 原理图按灯止位置画出。

在液压系统拟定与计算的过程中要广泛应用现代的与古典的科技知识与基础理论。对迫切而未成熟的课题也要进行探讨、计算。液压系统设计的完善程度归根结底取决于液压设计工作者的专业素养、运用基础理论的能力、接受新技术的灵敏程度、逻辑分析能力、机电液压控制（分工匹配）判断能力及为使用者着想的服务思想。

第一章 液压系统设计计算基础

主要在于一些基础理论的应用

第一节 高等数学在液压设计中的应用

(1) 利用微积分作为运算的方法

液压设计中，对于机械的力学运动，通过物理学和数学上的分析，建立微分方程关系式，来解决实际问题。许多情况下，用微分 D 来运算。

例： $y = \sin x$

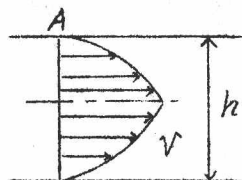
设 $\frac{dy}{dx} = Dy$ ， D 表示对自变量 x 求导；则 $D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}$ 。

可得如下的运算方法：

$$\begin{aligned} (D^2 + D - 2)\sin x &= (D - 1)(D + 2)\sin x = (D - 1)(\cos x + 2\sin x) \\ &= -\sin x + 2\cos x - \cos x - 2\sin x = \cos x - 3\sin x \end{aligned}$$

(2) 利用微积分作为分析表达式

例：液体在圆管中流动时，靠近管壁的液体流动慢，紧贴管壁的速度 $V=0$ ，愈靠近中心 V 愈大，中心处的速度最大。



由于液体与管壁之间附着边界层的复杂作用力和液体本身内聚力作用的结果，使管中各层液体的流速不同。流动快的液体层带动流动慢的液体层，流动慢的液体层阻碍流动快的液体层。这种发生在液体内部的摩擦力，称为内摩擦力。它的数学表达式

$$F_{\text{摩}} = \frac{AV}{h} \cdot \mu$$

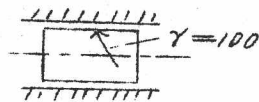
式中 A —— 截面积， V —— 速度， μ —— 绝对粘度，这个内摩擦力，实际上用剪力 $\tau = \frac{V}{h} \cdot \mu$ 加以表示，它的动态表达式为： $\tau = \mu \frac{dV}{dh}$ 。

例：如图，求柱塞面积膨胀引起发卡的速率 $\frac{dA}{dt}$ ， γ 对 t 的变化比值为 0.001，即 $\frac{d\gamma}{dt} = 0.001$ 。

面积增加的速度 $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = 0.2\pi$ 。

式中 $dA = d\pi\gamma^2$ ， $\frac{dA}{d\gamma} = \frac{d\pi\gamma^2}{d\gamma} = 2\pi\gamma$ 。

$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = 2\pi\gamma \cdot 0.001 = 2\pi \cdot 100 \times 0.001 = 0.2\pi$ 。

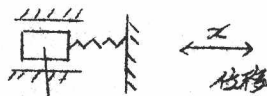


(3) 利用微分方程作为数学模型

如图所系，我芯运动实际为简谐振动，它的数学表达式为：

$$m \frac{dv}{dt} + kx = 0,$$

式中速度 $v = \frac{dx}{dt}$ ，加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ，我芯 m



x 为位移量， k 为弹簧拉伸或压缩单位长度所需要之力，即刚度。

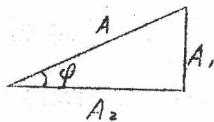
将上式改写为： $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

设 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ，则 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，

$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

解方程得： $x = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi)$

这个数学模型排除了油压力的阻尼。



(4) 利用微积分推导公式。

如图所系的叶油泵，

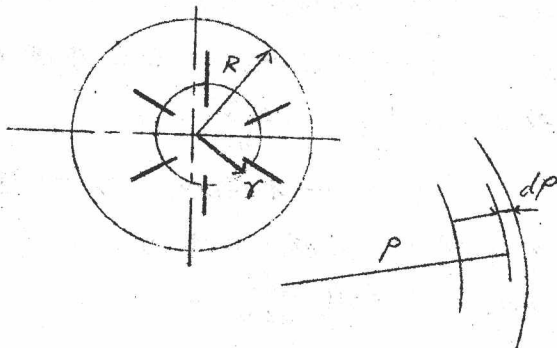
推导其流量的数学公式。

设定子半径为 R

转子半径为 r ，转子的

转速为 n ，叶片的径向

位移变化量为 dp 。



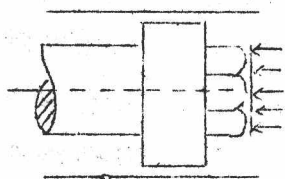
则速度 $v = 2\pi P n$ ，小块面积微面积的变化量为 $dA = b d\rho$ (b 为叶片宽度)。

$$\therefore \text{流量 } dQ = 2\pi P n b d\rho$$

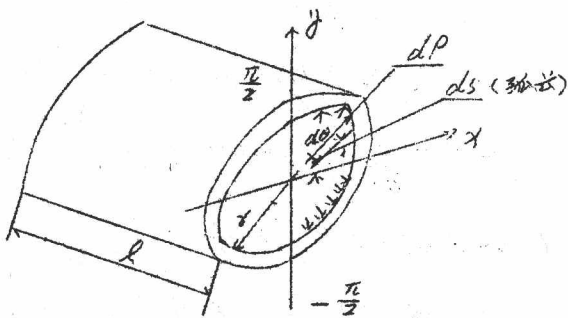
$$\text{两边积分: } Q = \int_r^R 2\pi P n b d\rho = 2\pi n b \int_r^R \rho d\rho \\ = \pi b n (R^2 - r^2)$$

(5) 利用微积分论证问题。

如图示联接活塞杆的销轴是不规则的曲面，受力情况与平面的受力是否不同？在实际工程计算中，应用得较多的是计算液体作用于圆柱形表面或球面上的力。



下面以一油缸筒为例，来论证问题。油缸内充满了压力为 P 的压力油。求出在 x 方向上压力油作用在油缸右半壁上的力。



设油缸半径为 r ，长度为 l 。在油缸壁上取一狭长条微小面积 $dA = l ds = l r d\theta$ 。在该式中 ds 为微小弧长。

压力油作用在这微面积上的力 dP 为：

$$dP = P dA = P l r d\theta$$

投影在 x 轴上的分力 dP_x 为。

$$dP_x = dP \cos \theta = P l r \cos \theta d\theta$$

$$\text{两边积分: } P_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P l r \cos \theta d\theta = P l r [\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})] \\ = 2 P r l = P d$$

从以上式可以看出，压力油在 x 方向的作用力 P_x 等于油压 P

和 $(2\gamma \cdot l)$ 的乘积。而 $(2\gamma \cdot l)$ 正好是轴缸右半壁面在 x 方向投影的面积，所以不论什么样的曲面都可以投影到直径上来计算。

根据力的平衡还可以求出轴缸的壁厚公式。

$$p \cdot l \cdot d = [\sigma] \cdot \delta \cdot l \cdot 2, \quad \therefore \delta = \frac{p \cdot d}{2[\sigma]}$$

式中 $[\sigma]$ — 材料许用应力， δ — 缸壁厚。

(6) 利用高等数学解决问题。

例 1：求 F/W 合理的值，滑轮半径 γ 。

解：图示的吊式升降机，当 x 方向

位移 dx 时， y 方向的位移为 dy 。

根据功能原理，

$$F dx = W dy$$

$$\frac{F}{W} = \frac{dy}{dx} \quad \because y = 2l \sin \theta \quad \therefore \frac{dy}{d\theta} = 2l \cos \theta$$

$$x = -\frac{\gamma}{\tan \frac{\theta}{2}} = -\gamma \cot \frac{\theta}{2} = -\gamma \cdot \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\text{对 } x \text{ 微分: } \frac{dx}{d\theta} = \frac{\gamma}{1 - \cos \theta}, \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2l \cos \theta (1 - \cos \theta)}{\gamma} = \frac{F}{W}$$

利用图解法，可求得当 $\theta = 60^\circ$ 时 $\frac{F}{W} = 4.4$ ，也可以用求导的方法计算出 $\frac{F}{W}$ 。（见下图）

例 2：试把滑流男 $Q = cbx \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$ 公式线性化。

解：此式为二变男 x

与 p ，设起始值为 x_0 与 p_0 。

取台劳级数一阶近似式为：

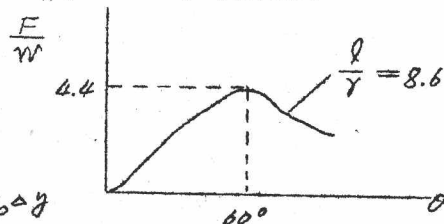
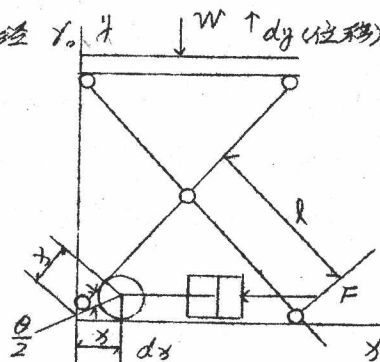
$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y$$

则由于 $Q_0 = cbx_0 \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$ ，也是常值，所以：

$$Q = cbx_0 \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} + cb \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} \Delta x + cbx_0 \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_0}} \Delta p$$

因此，可得线性的增男公式为：

$$\Delta Q = Q - Q_0 = cb \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} \Delta x + cbx_0 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho p_0}} \Delta p = K_0 \Delta x + K_1 \Delta p$$



此式便于用矩阵形式及拉代变换表示与求解。

例3：已知 $W(s) = K/(Ts+1)$ ，如输入一信号 $f(t) = f_0 \cos \omega t$ ，求输出量：

解：根据 $W(s)$ 作为拉代变换式，故查拉代变换表即可求得输入信号的拉代变换式为：

$$X(s) = K f_0 s / (Ts+1)(s^2 + \omega^2)$$

用部分分式法展开求之，得：

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{K f_0}{1 + \omega^2 T^2} \left(-\frac{T}{Ts+1} + \frac{s + T\omega^2}{s^2 + \omega^2} \right) = \\ &= \frac{K f_0}{1 + \omega^2 T^2} \left(-\frac{T}{Ts+1} + \frac{s}{s^2 + \omega^2} + T\omega \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \end{aligned}$$

查拉代变换表得时域输出量：

$$x(t) = \frac{K f_0}{1 + \omega^2 T^2} \left\{ -\exp\left(-\frac{t}{T}\right) + (\cos \omega t + T\omega \sin \omega t) \right\}$$

合并正、余弦二波形，因为：

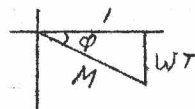
$$\cos \omega t + T\omega \sin \omega t = M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\cos \omega t + T\omega \sin \omega t = M(\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t)$$

$$\therefore M \cos \varphi = 1, \quad M \sin \varphi = -T\omega.$$

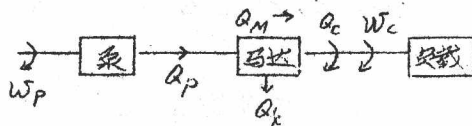
依右图解之，得：

$$M = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}, \quad \varphi = -\tan^{-1} \omega T.$$



$$\text{求得 } x(t) = \frac{-K f_0}{1 + \omega^2 T^2} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) + f_0 \left(\frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \right) \cos(\omega t - \tan^{-1} \omega T).$$

例4：求右图系统马达的传递函数。



解：泵的流量 $Q_p = K_p \theta_p$ 。

K_p — 每秒每单位角位移泵流量；

θ_p — 控制角位移。

通过马达的流量 $Q_m = V_m \omega_c$ 。

V_m — 马达每单位角位移流量；

ω_c — 马达角速度。

马达漏油 $Q_L = L P_L$,

L — 系统泄漏系数;

P_L — 马达的压降,

若考虑到负载引起压缩的流量为:

$$Q_c = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{K_B} \cdot \frac{dP_L}{dt}$$

V — 液体压缩下总体积;

K_B — 液体弹性模量。

所以 $Q_p = Q_M + Q_L + Q_c$,

$$\text{即 } K_p Q_p = V_M \omega_c + L P_L + \frac{V}{K_B} \cdot \frac{dP_L}{dt},$$

拖动马达的转矩为 $V_M P_L = J \frac{d^2 \theta_c}{dt^2}$, 所以

$$P_L = \frac{J}{V_M} \cdot \frac{d^2 \theta_c}{dt^2} \quad (\text{式中 } J \text{ 为惯量矩})$$

$$\text{得 } K_p Q_p = V_M \frac{d\theta_c}{dt} + \frac{L}{V_M} \cdot J \cdot \frac{d^2 \theta_c}{dt^2} + \frac{V}{K_B} \cdot \frac{J}{V_M} \cdot \frac{d^3 \theta_c}{dt^3},$$

拉氏变换后, 为:

$$K_p Q_p(s) = V_M s \theta_c(s) + \frac{LJ}{V_M} s^2 \theta_c(s) + \frac{VJ}{K_B V_M} s^3 \theta_c(s),$$

故求出传递函数如下:

$$G(s) = \frac{\theta_c(s)}{Q_p(s)} = \frac{K_p / V_M}{s \left\{ \frac{VJ}{K_B V_M^2} s^2 + \frac{LJ}{V_M} s + 1 \right\}},$$

将 $\theta_p(s)$ 移至右端, 右端分母移至左端, 可得时域微分方程为:

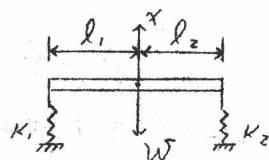
$$\frac{VJ}{K_B V_M^2} \cdot \frac{d^3 \theta_c(t)}{dt^3} + \frac{LJ}{V_M^2} \cdot \frac{d^2 \theta_c(t)}{dt^2} + \frac{d\theta_c(t)}{dt} = \frac{K_p}{V_M} \theta_p(t)$$

分析上式, 可知气体进入使 K_B 下降, 影响系统效率。 V_M (即马达与泵间管道体积) 要尽可能小, 否则, 效率低, 振动大。

传递函数分子多项式等于零的根, 称零点, 分母多项式等于零的根, 称极点, 由此可用根轨迹法研究其分布 (在复平面

4) 与动态特性。

例5：求右图液压振动支架的振型。



解：此支架距离重心O某处存在简谐振动 ($K_1 l_1 = K_2 l_2$)，矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & je \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_O \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & 0 \\ 0 & K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_O \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

但简化计算往往按无阻尼系统的振动形式，特别是适当选择 l_1 与 l_2 时，得：

$$m\ddot{x} + K_1(x - l_1\theta) + K_2(x + l_2\theta) = 0,$$

$$j_c\ddot{\theta} - K_1(x - l_1\theta)l_1 + K_2(x + l_2\theta)l_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} (K_1 + K_2 - W^2 m) & -(K_1 l_1 - K_2 l_2) \\ -(K_1 l_1 - K_2 l_2) & (K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2 - W^2 j_c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

设： $W = 3220$ 磅， $l_1 = 4.5$ 呎， $K_1 = 2400$ 磅/呎，

$$j_c = \frac{W}{g} \cdot r^2 = \frac{W}{g} (4)^2, \quad l_2 = 5.5 \text{ 呎}, \quad K_2 = 2600 \text{ 磅/呎},$$

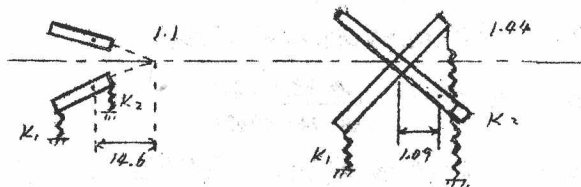
$$\text{则可求得 } W_1 = 6.9 \text{ rad/sec} = 1.1 \text{ 周/秒}$$

$$W_2 = 9.06 \text{ rad/sec} = 1.44 \text{ 周/秒}$$

$$\text{振幅比 } \left(\frac{x}{\theta}\right)_{W_1} = -14.6 \text{ 呎/rad} = -3.06 \text{ 吋/度}$$

$$\left(\frac{x}{\theta}\right)_{W_2} = 1.09 \text{ 呎/rad} = 0.288 \text{ 吋/度}$$

∴ 振型为右图。



上述应用方面只是高等数学领域的基本方面，工程数学的发展，使液压机械设计工作者必须进一步去掌握数学专业一些课题能加以运用。当然我们也不必去大费论证数学公式，而关键在于“用”。