第二篇
工程數學

目錄

頁

第一章 代數

第二章 幾何

第三章 三角函數及雙曲線函數

第四章 解析幾何

第五章 微 分

第六章 積 分

第七章 常微分方程式

第八章 拉普拉斯變換法與傅里哀變換法

第九章　向量分析

第十章　微分幾何

第十一章　複變數之函數

第十二章 矩 陣

第十三章 統計學

第十四章　實用計算

第二篇

工 程 數 學

翁通楹

第一章 代 數

1·1 數及其分類

a. 數的分類 數的概念始於自然數〔又名正整數〕1，2，3，……等。嗣後爲使四則運算汎通無阻，乃導入分數（正）、無理數（正）；進而發明零及負數。整數包括正整數、負整數及零。有理數即爲一切可用兩整數之商（分母不爲零）表示之數，如 $\frac{2}{3}$、$\frac{7}{5}$ 等。無理數則爲一切不能用兩整數之商表示之數，如 $\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{4}$、π、e 等。在有理數及無理數之範圍內，開方運算尚不能汎通無阻，故將數之範圍擴大至虛數。虛數爲負數之偶次方根，如 $\sqrt{-2}$，$\sqrt[4]{-3}$…等。普通以 $i=\sqrt{-1}$ 爲虛數單位，惟電工學中，常以 i 代表電流，故以 j 代表 $\sqrt{-1}$。實數則爲一切非虛數〔即有理數與無理數〕，而複數則爲實數與虛數結合而成之數，如 $2+\sqrt[3]{-1}$、$4-5i$ 等。

b. 數的絕對值 實數之絕對值，是祇計實數的數值而不考慮其符號之爲正或爲負者。例如 -5 的絕對值爲 5，寫作 $|-5|$。複數 $a+bi$ 的絕對值爲 $\sqrt{a^2+b^2}$，寫作 $|a+bi|$。例如 $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$。

1·2 基本運算

a. 運算符號 在代數式中，主要的分節爲加號「＋」及減號「－」，如

$$a+b\times c-d\div x+y$$

意指

$$a+(b\times c)-(d\div x)+y$$

換言之，乘號「×」與除號「+」號的作用範圍至下一個「＋」或「－」符號爲止。「×」與「÷」之間的關係，如 $a\div b\times c$

意指　　　$a\div(b\times c)$

即「÷」號比「×」號的分離效能爲强，但此項規則不被嚴格遵守。爲避免混淆，應用括號爲上策。

乘號常被省略，如 $2\times a\times b^2$ 即是 $2\,ab^2$，$2\frac{a}{b}$ 表示 $2\times\frac{a}{b}$，而 $2\frac{3}{7}$ 則爲 $2+\frac{3}{7}$。除號，如 $a\div b$ 常略書成 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$。

乘冪及方根的作用範圍祇至緊接的量爲止。如 $2\,ax^3$ 即爲 $2\,a(x)^3$ 之意，而$\sqrt{2}\,ax$ 則爲 $(\sqrt{2})(ax)$ 之意，或將 $\sqrt{2}\,ax$ 書作 $\sqrt{2}\cdot xa$ 或 $ax\sqrt{2}$ 更爲清楚。

括號內的任何式應視爲一量；括號前爲正號者，化出時括號內之每項的符號不變，括號前爲負號者，化出時，括號內各項之符號一一予以變號。

符號 $n!$ 或 $\underline{n|}$ (n 爲正整數) 讀作「n 的階乘」，其意爲自然數 1 至 n 的連乘積，因此 $1!=1$，$2!=1\times2$，$3!=1\times2\times3$，$4!=1\times2\times3\times4$，……等。

符號 $\neq$ 或 $\neq$ 意指「不等於」；符號 $\pm$ 意指「加或減」；符號 $>$，$<$，$\ngtr$ 分別意指「大於」，「小於」，「不大於」；又符號 $\geqq$ 或 $\geq$，意指大於或等於，與 $\nless$ 的含義相同。

符號 $\fallingdotseq$ 或 $\doteq$ 用作「幾乎等於」。

符號 a^n 表示 a 之 n 次方。指數可爲正整數，負整數，正分數，負分數。如 a 之右上方無 n，應視 n 爲 1。

符號 $\sqrt[n]{a}$ 表示 a 之 n 次方根之主根。如 $n=2$ 則略寫爲$\sqrt{a}$。$\sqrt[n]{a}$ 常書作 $a^{\frac{1}{n}}$。

b.　加與減

$$a+b=b+a,\ (a+b)+c=a+(b+c),\ a-(-b)=a+b$$
$$a-a=0,\ a+(x-y+z)=a+x-y+z,$$
$$a-(x-y+z)=a-x+y-z$$

同類項可以加減；非同類項不可以加減，應保持其原有之形式。例如

$$-3\,ax+4\,by-(cz-2\,ax+3\,by)=-ax+by-cz$$

c.　乘與除

$$ab=ba,\quad (ab)c=a(bc),\quad a(b+c)=ab+ac$$
$$a(b-c)=ab-ac$$

又 $a\times(-b)=-ab$，$(-a)(-b)=ab$，即「同號之乘積爲正，異號之乘積爲負」。

兩多項式 A 與 B 之乘積 A×B 之運算，以其中一式之各項，乘另一式之各項，最後將其同類項合併而得最簡式。若能將被乘式與乘式均依其公有未知數同按降冪或昇冪排列，較為簡便。

$$a\div b=\frac{a}{b},\quad (-a)\div b=-\frac{a}{b},\quad (-a)\div(-b)=\frac{a}{b},$$

$$(b+c)\div a=\frac{b}{a}+\frac{c}{a},\quad (b-c+d)\div a=\frac{b}{a}-\frac{c}{a}+\frac{d}{a}$$

兩多項式 A 與 B，以 B 除 A 之商 $A\div B$ 或 $\frac{A}{B}$，其結果為一整式 Q 及一分式 $\frac{R}{B}$ 之和，即

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

Q 稱為整商，R 稱為餘式。若能將被除式與除式均按其公未知數按降冪或昇冪排列，則以 B 之首項除 A 之首項得 Q 之第一項 Q_1，以之乘 B 得積 Q_1B，自 A 中減去此乘積 Q_1B 而得第一餘式 R_1，再以 B 除 R_1 之首項得商 Q_2，以之乘 B 得積 Q_2B，自 R_1 中減去 Q_2B 得第二餘式 R_2；如此繼續運算至餘式之次數低於 B 之次數或餘式為零為止。

除法中，除式不得為零。

d. 指數法則

1. 冪法則

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},\quad (a^m)^n=a^{mn}$$

$$(ab)^n=a^nb^n,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\quad \left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}=a^{-n}$$

$a^0=1$，$0^n=0$，0^0 為不定

$(+a)^n=a^n$

$(-a)^n=a^n$（n 為偶數），$(-a)^n=-a^n$（n 為奇數）

2. 方根（$a, b>0$；m，n 為 0，1 以外之正整數）

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}},\qquad \sqrt[n]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=a^{-\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a\qquad \sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n=a^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}\qquad \sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　$\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$

a 的 n 次方根的主根 $\sqrt[n]{a}$

①當 n 爲奇數時　若 a 爲正，則 $\sqrt[n]{a}$ 爲正。若 a 爲負則 $\sqrt[n]{a}$ 爲負。

② n 爲偶數時　若 a 爲正，則 $\sqrt[n]{a}$ 爲正。若 a 爲負則 $\sqrt[n]{a}$ 爲虛數

*每一正數 a 都有兩個平方根，一個爲正，另一個爲負，但符號 $\sqrt{a}$ 恆表正的那一個，即爲主根如 $\sqrt{9}=3$ 而非爲 ± 3，9 的平方根則爲 ± 3。

*若 n 爲正，且趨於無限大；則當 $a>1$ 時，a^n 趨近於無限大，當 $0<a<1$ 時，a^n 趨近於零。

e. 簡單恆等式

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　　$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$$(a\pm b)^n=a^n\pm na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots+(-1)^n b^n$$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$　　$a^3\pm b^3=(a\pm b)\,[a^2\mp ab+b^2]$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$a^{2n}-b^{2n}=(a+b)(a^{2n-1}-a^{2n-2}b+a^{2n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{2n-2}-b^{2n-1})$

$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\cdots\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n})$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc=(x+a)(x+b)(x+c)$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a^2)]$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+6abc$

$(a+b+c)(ab+bc+ca)=a^2b+ab^2+bc^2+bc^2+c^2a+ca^2+3abc$

$(a+b)(b+c)(c+a)=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2$$

f. 分式

1. 基本定律：以下各分式之分母均不得爲零

〔符號〕 $+\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}=-\frac{-a}{b}=-\frac{a}{-b}$

〔約分及通分〕：分式之分子與分母同乘以異於零的任何式其値不變；卽若 $m\neq 0$，則

$$\frac{ma+mb+mc}{mx+my}=\frac{a+b+c}{x+y}$$

上式中，自左至右之運算稱爲約分。又，兩個以上之分式，各在其分子與分母同乘異於零之式，使各分式之分母皆成爲同一整式（平常爲各分母之最低公倍式）之運算，稱爲通分。

〔加減〕：分式相加減時，先通分後行之，如

$$\frac{a}{b}\pm\frac{x}{y}=\frac{ay}{by}\pm\frac{bx}{by}=\frac{ay\pm bx}{by}$$

$$\frac{ab}{xyz}+\frac{c^2}{y^2z^2}-\frac{def}{x^2y}=\frac{abxyz^2}{x^2y^2z^2}+\frac{c^2x^2}{x^2y^2z^2}-\frac{defyz^2}{x^2y^2z^2}$$

$$=\frac{abxyz^2+c^2x^2-defyz^2}{x^2y^2z^2}$$

〔乘〕：分式相乘時，以分子與分子的積爲分子，以分母與分母的積爲分母，卽

$$\frac{a}{b}\times\frac{x}{y}=\frac{ax}{by}$$

$$\frac{a}{b}\times y=\frac{a}{b}\times\frac{y}{1}=\frac{ay}{b}$$

〔除〕：分式相除時，將除數的倒數與被除數相乘而求之，卽

$$\frac{a}{b}\div\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\times\frac{y}{x}=\frac{ay}{bx}$$

$$\frac{a}{b}\div x=\frac{a}{b}\times\frac{1}{x}=\frac{a}{bx}$$

如分式之分母爲$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$之形式（$a>0$，$b>0$）則分式之分子分母同乘以$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$，可有理化其分母，如

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$=\frac{b+a+2\sqrt{ba}}{a-b}$$

2. 分式的分解（部份分式） 如爲假分式則先化爲帶分式，即整式與眞分式之和；而眞分式可分解爲部份分式，可依下列定理行之。

①設 $\frac{A}{PQR}$ 爲眞分式，而 P、Q、R 爲互質，則

$$\frac{A}{PQR}=\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}+\frac{D}{R}$$

且 $\frac{B}{P}$，$\frac{C}{Q}$，$\frac{D}{R}$ 均爲眞分式。

〔例 1〕化 $\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 爲部份分式

設 $\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$，A、B、C 爲常數去分母得

$$x^2+x-3=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

分別令 $x=1，2，3$ 得 $A=-\frac{1}{2}$ $B=-3$ $C=\frac{9}{2}$

$$\therefore\quad \frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{(x-2)}+\frac{9}{2(x-3)}$$

〔例 2〕化 $\frac{x^2+x+3}{x^4+x^2+1}$ 爲部份分式

設 $\frac{x^2+x+3}{x^4+x^2+1}=\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{cx+d}{x^2-x+1}$ a，b，c，d 爲常數去分母得

$$x^2+x+3=(ax+b)(x^2-x+1)+(cx+d)(x^2+x+1)$$

比較兩邊係數得

$$a+c=1，-a+b+c+d=0，a-b+c+d=1，b+d=3$$

聯立解之得 $a=2$，$b=\frac{3}{2}$，$c=-1$，$d=\frac{3}{2}$

故 $$\frac{x^2+x+3}{x^4+x^2+1}=\frac{4x+3}{2(x^2+x+1)}-\frac{2x-3}{2(x^2-x+1)}$$

②設一眞分式爲 $\frac{A}{Q^3}$，則

$$\frac{A}{Q^3}=\frac{B}{Q}+\frac{C}{Q^2}+\frac{D}{Q^3}$$

其中 B、C、D 之次數均低於 Q

（因爲 $\frac{B}{Q}+\frac{C}{Q^2}+\frac{D}{Q^3}=\frac{BQ^2+CQ+D}{Q^3}$，故此種眞分式化爲部份分式

時，先以 Q 表示分子 A 亦可〕

〔例 3〕化 $\frac{x^2-3x+1}{(x-2)^3}$ 為部份分式

$$
\begin{array}{rrr|l}
1 & -3 & +1 & 2 \\
 & +2 & -2 & \\
\hline
1 & -1 & -1 & 2 \\
 & +2 & & \\
\hline
1 & +1 & &
\end{array}
$$

∴ 分子 $x^2-3x+1=(x-2)^2+(x-2)-1$

故原分式 $=\frac{(x-2)^2+(x-2)-1}{(x-2)^3}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)^3}$

③若真分式為 $\frac{A}{PQ^3}$ 則先應用（A）化為

$$\frac{A}{PQ^3}=\frac{B}{P}+\frac{C}{Q^3}$$

再將 $\frac{C}{Q^3}$ 應用（B）化為

$$\frac{C}{Q^3}=\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3}$$

則可得最後結果

$$\frac{A}{PQ^3}=\frac{B}{P}+\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3}$$

〔例 4〕化 $\frac{x+1}{x(x-1)^3}$ 為部份分式

設 $\frac{x+1}{x(x-1)^3}=\frac{a}{x}+\frac{f(x)}{(x-1)^3}$

去分母得

$$(x+1)=a(x-1)^3+x\ f(x)$$

令 $x=0$ 得 $a=-1$

將 $a=-1$ 代入上式得

$$f(x)=x^2-3x+4=(x-1)^2-(x-1)+2$$

∴故原分式 $=-\frac{1}{x}+\frac{(x-1)^2-(x-1)+2}{(x-1)^3}$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

g. 比及比例，變數法

1. 比及比例 符號 $a:b=c:d$，讀作 a 與 b 的比等於 c 與 d 之比，其意爲 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 或 $ad=bc$。a 與 d 稱爲外項，b 與 c 稱爲內項，而 d 稱爲 a，b，c 之第四比例項。兩數的比例中項爲兩數乘積的平方根，又稱爲兩數的幾何平均。

若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 則

$$ad=bc,\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},\quad \frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd},\quad \frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$$

$$\frac{ka^n+\ell b^n}{pa^n+qb^n}=\frac{kc^n+\ell d^n}{pc^n+\ell d^n}$$

若 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\cdots\cdots=k$ 則

$$\frac{pa+qb+rc+\cdots\cdots}{px+qy+rz+\cdots\cdots}=k$$

2. 變數法 $x\propto y$ 讀作「x 隨 y 而正變」或「x 與 y 成正比例」其意爲 $x=ky$（x，y 爲變數，k 爲異於零之常數）。決定 k 之値，知道一對値 x、y，即已充分。因爲 $x_1=ky_1$，故 $k=\frac{x_1}{y_1}$。

$x\propto\frac{1}{y}$，讀作「x 隨 y 而反變」或「x 與 y 成反比例」其意爲 $x=\frac{k}{y}$。

h. 不等式 不等式中所討論之數均爲實數。

1. 簡單不等式定理 下列各式中，分母皆不爲零。

①若 $a>b$ 則

$a-b>0$，$b<a$，$a+c>b+c$，$a-c>b-c$，

$ac>bc\ (c>0)$，$ac<bc\ (c<0)$

$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\ (c>0)$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\ (c<0)$

②若 $a>b$，$c>d$ 則

$a+c>b+d$，$ac>bd$ 〔若 $a>b>0$ 與 $c>d>0$〕

$a-c \gtreqless b-d$

2. 絕對不等式 下列各式中之文字數均爲正數。

$$a+b \geqq \frac{\sqrt{ab}}{2}, \quad a+b+c \geqq \frac{\sqrt[3]{abc}}{3}$$

$$a+b+c+\cdots\cdots \geqq \frac{\sqrt[n]{abc\cdots\cdots}}{n} \text{（n 爲文字數的個數）}$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

3. 條件不等式

① $x-a>0$ 則 $x>a$

② $(x-a)(x-b)>0 \quad (a>b)$

則 $x>a$ 或 $x>b$

$(x-a)(x-b)<0, \quad (a>b)$

則 $b<x<a$

③ $(x-a)(x-b)(x-c)>0, \quad (a>b>c)$ 則

$x>a$ 或 $c<x<b$

$(x-a)(x-b)(x-c)<0, \quad (a>b>c)$ 則

$b<x<a$ 或 $x<c$

④ $|x-c|<h \quad (h\geqq 0)$

則 $-h<x-c<h$ 即 $c-h<x<c+h$

i. 對數

1. 對數之定義、常用對數、自然對數

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 時，而滿足

$$a^x=N$$

的數 x，稱爲以 a 爲底 N 的對數，書作 $x=\log_a N$。

若底 $a=10$ 時，則稱之爲常用對數。即

$$x=\log_{10}N \text{ 時，} \quad 10^x=N$$

若底 $a=e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots=2.718281828$ 時，則稱之爲自然對數，即

$$x=\log_e N(\text{或 } x=\ln N) \text{ 時，} e^x=N$$

寫在下邊的底 10 或 e 常被省略，此時之底，必須由其前後關係推論出來。底 10 常用於數值計算，而底 e 則用在理論工作上。

2. 對數的性質 不論在上述二系統之任一系統

$$\log(ab)=\log a+\log b, \qquad \log a^n=n\log a$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b, \qquad \log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a$$

$$\log 0 = -\infty \qquad \log 1 = 0$$

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a \qquad \log_a a = 1$$

兩系統之間關係如下：

$$\log_{10} e = M = 0.4343 \qquad \ln 10 = \log_e 10 = \frac{1}{M} = 2.3026$$

$$\therefore \log_{10} x = 0.4343 \log_e x, \quad \ln x = \log_e x = 2.3026 \log_{10} x$$

3. 常用對數

①首數（指標）及尾數

(1)凡眞數大於 1，則其首數爲正整數或零，且較眞數的整數部份之位數少 1。例如 74.1 的對數，其首數爲 1，而其對數爲 1.8698，同樣 log 741= 2.8698，log 7.41=0.8698。

(2)凡眞數小於 1，則其首數爲負，而其絕對値較緊接於小數點下之 0 的個數多 1。例如 0.325 的對數之首數爲 -1，尾數爲 5119，而其對數寫爲 $\bar{1}.5119$，同樣 log 0.00325=$\bar{3}.5119$。

(3)若不考慮眞數之小數點，而眞數之數値相同時，則小數點的位置不影響其尾數，僅首數隨小數點之位置而異。例如6.45、645、6450、0.00645 等之尾數均爲 8096，而其首數各爲 0、1、2、3、-3、……等。

(4)若用四位對數表，其眞數的有效數字爲三位或三位以下時，其尾數可直接由對數表查得。若眞數的有效數字爲四位或四位以上時，則其尾數須以插入法計算之。例如 log 4562，查表得 log 4560=3.6590，又由 p.p 知差數爲 2，故 log 4562=3.6590+0.0002=3.6592。

②對數計算例解

〔例 1〕求 253×0.312

$$\begin{array}{rl} \log 253 &= 2.4031 \\ +)\ \log 0.312 &= \bar{1}.4942 \\ \hline \log x &= 1.8973 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log 78.9 = 1.8971 & \\ 0.04 \quad\quad 2 & \\ \hline \therefore x = 78.9 + 0.04 & \\ = 78.94 & \end{array}$$

〔例 2〕求 253÷0.312

$$\begin{array}{rl} \log 253 &= 2.4031 \\ +)\text{colog } \log 0.312 &= 0.5058 \\ \hline \log x &= 2.9089 \\ \log 810 &= 2.9085 \\ 0.8 & \quad\quad 4 \\ \hline \therefore x = 810 + 0.8 &= 810.8 \end{array}$$

$$[\because \text{colog}\,0.312 = -\log 0.312 = -\bar{1}.4942 = -(-1+0.4942) = 0.5058]$$

〔例 3〕 求 $\sqrt[7]{0.00898}$

$$\log\sqrt[7]{0.00898}=\frac{1}{7}\log 0.00898=\frac{1}{7}[\bar{3}.533]=\frac{1}{7}(-2.467)$$

$$=-0.2924=\bar{1}.7076=\log x$$

$\therefore\ x=0.510$（查表）

4. 計算尺　普通在工程上用之計算尺其主要部份係根據對數之原理所製成之對數，是用來作乘，除，乘方，開方等之迅速概算之有效工具。機械工程師所用者，另附有對數對數，三角函數及雙曲線函數等尺，可用於對數，指數，三角函數以及雙曲線函數等値之概算。

計算尺之構造包括二部份，滑尺與遊尺（如圖 1•1）。其實際運用包括兩種主要操作，卽滑尺操作及遊尺操作：

①作滑尺操作時應注意：

(1)必須以食指推動滑尺，而拇指則用以支持計算尺，且將指及中指沿着定尺之外緣滑動。

(2)同時另一拇指及食指放在定尺他端，且輕輕的支持之。

(3)當滑尺接近於預定之刻度時，應以指頭之彈力微微推動之。

(4)推動滑尺之指頭切勿離開尺。

②作遊尺操作時應注意：

(1)必須以拇指推動遊尺。

(2)欲將遊尺自右至左推動到某一刻度時，首先以右手拇指頭推動至大略之位置，當毛線接近此刻度時藉左手拇指之助調整最後位置。

(3)最後固定毛線時之操作，必須緩慢且準確，以單一動作完成操作，切勿前後移動。

工程師所用計算尺以 250 公厘者居多，可讀有效數字約三位。此外亦有 400 公厘，500公厘者，可讀有效數字約四或五位。

下面以 250 公厘機械工程師用 No. 251 Duplex 型之計算尺爲例，說明尺之名稱，用途及其實際演算。

(i) 尺之安排及其用途

正面：

DF、CF、CIF（π 倍） D、C、CI	乘、除及比例
L	常用對數
DI	倒數