数字信号处理

黄振兴 编

电子科技大学电子工程学院

目 录

绪　　论

1．数字信号处理的研究对象

数字信号处理是一个新的技术领域，它主要是研究用数字或符号的序列来表示信号波形，并用数字的方式去处理这些序列，把它们改变成在某种意义上更为希望的形式，以便估计信号的特征参量，或削弱信号中的多余分量和增强信号中的有用分量。具体来说，凡用数字方式对信号进行滤波、变换、调制、解调、均衡、增强、压缩、估值、识别、产生等加工处理，都可纳入数字信号处理领域。

数字信号处理发展成为一门学科主要是在六十年代中期开始的，那时高速数字计算机已经能广泛地提供给研究发展使用。计算机技术的进展对数字信号处理领域产生了深刻的影响，成为一股强大的推动力量。数字信号处理技术之所以能如此迅速地发展，主要有赖于下列三个因素：第一，由于大规模集成电路技术的迅速提高，促进了计算机、微处理机及高速数字电路的大力发展，它们的成本已大幅度降低；第二，提出了若干高效信号处理算法，其中最主要的是出现了一批高效的数字滤波算法和数字频谱分析算法，尤其重要的是六十年代中期提出了快速傅里叶变换算法，它对数字信号处理技术的发展产生了极为深刻的影响；第三，对于用离散序列表示波形的理论，以及在时域和频域内修正波形的理论，有了更为深刻的理解，在此基础上，逐步确立并完善关于数字信号处理的一整套自成体系的理论。

数字信号处理技术的强大生命力，还体现在它的应用范围的日益扩大方面，正不断地显示出它的重要性，已逐渐成为促进各有关科技领域发展的有力手段。在通讯、雷达、声纳、遥感、图象处理、图象识别、语音处理、语音识别、地球物理、资源考察、人工智能、核技术、生物医学工程等方面都获得了卓有成效的应用。

由此可见，数字信号处理是一门理论与实践，原理与应用紧密相结合的学科。理论和原理开拓了实践和应用的新领域，而实践和应用又推动了理论和原理的新发展，构成了该领域内一片朝气蓬勃的活跃景象。尽管数字信号处理技术的内容是如此地丰富多采，但就该技术本身而言，主要由两个基本部分组成：数字滤波和数字频谱分析。这两个部分并不是截然分开的，它们在概念上和实现上是相互有联系的，它们共同建立在离散线性系统理论和离散傅里叶变换理论的基础之上，它们的实现都涉及到离散系统的量化效应理论，以及数字系统软件实现和硬件实现的各种原理。因此，离散线性系统理论，离散傅里叶变换理论，数字滤波原理，数字频谱分析原理，量化效应理论，以及数字系统的各种实现原理构成了数字信号处理的基本内容，它们也是本书的主要讨论对象。

2．数字信号处理系统的基本组成

数字信号处理系统的组成是十分多样化的，但对于大多数实际系统来说，其基本组成和工作过程可用图 1 所示的简化框图来说明。输入是模拟信号，采样及模数转换器把输入信号转换成时间上离散而幅度上量化的序列。为保证系统不会由于杂散信号频率过高而产

生混叠现象，以便获得正确的处理效果，应令输入信号先通过一个低通模拟滤波器，使真正进入处理系统的信号频谱被限制在系统采样频率所允许的最高频率之内，这就是预处理滤波器的作用。

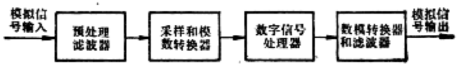

图 1　数字信号处理系统基本组成

数字信号处理器是整个系统的基本环节，它完成由该系统的任务所规定的运算过程，所用的计算设备可以是通用计算机、微计算机或专用计算机。此外，它还应具备足够的存贮能力。处理后的输出仍是离散量化序列，它们经过数模转换和滤波器，可恢复成平滑的模拟信号。

上述系统是假定输入和输出都是模拟信号，但有的系统要求输出保持数字形式，或者输入就已经是数字形式，因而允许免去数模转换或模数转换，甚至两者都被免去。

在很多情况下，采用这样复杂的系统只处理单一信号是不经济的。如果利用时分复用概念，就可通过一套计算设备同时完成对多路信号的处理。具有处理多路信号的能力是数字系统的突出优点之一。图 2 是多路信号数字处理系统的示意图。因采样信号的相邻采样之间存在相当长的空隙，在这空隙之内，其它信号的采样可同样送入到同一处理设备。每路信号的采样按一定时间顺序轮换读取并进行模数转换，然后送入信号处理器经过适当处理，在输出端按相应的时间顺序输出，最后通过分路器把输出的组合序列分离送出。

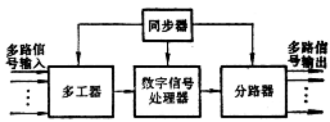

图 2　多路信号数字处理系统

3. 数字信号处理的基本特点

数字信号处理有很多重要特点，其中最重要的有下列几点：

首先，数字信号处理具有高度的灵活性，这是它的最大特色。用数字或符号表示信号波形，可以被看成是一个任意时基的序列，甚至可以是倒置时间的序列，因而能够实现时间的扩张或压缩，便于对信号数据进行重排和缓存，使系统具有多工处理和时分复用的能力，更好地发挥设备效能，降低成本和缩小体积。数字信号处理的灵活性还表现在可以灵活地改变系统参量和工作方式，以满足系统多功能化和自适应化的需要，这一点对于要求对付复杂任务和复杂环境的现代雷达和通讯系统是极为重要的。这种灵活性还可利用来对模拟信号处理系统进行仿真试验。在实现模拟硬件系统时，系统的特性常常以错综复杂的方式影响输出效果。因此，在建立新的系统之前，往往希望先通过计算机仿真来调整该系统的特性，预先估价系统的质量指标，使系统达到最佳性能和最大经济效果。这种仿真试

验对于实现复杂的和高性能的系统尤为重要，可以大大地节省研制成本和缩短研制周期。

其次，数字信号处理系统具有极好的重现性和稳定性。由于数字信号处理系统是由少数类型的标准组件所构成，宜于采用性能可靠一致的大规模集成电路，而且系统的工作完全由高稳定性时钟控制。因而，系统有完善的重现性，以及极高的稳定性和可靠性。在这样的系统中，只要有足够的字长位数，就能实现高精度和大动态范围的信号处理，它所能达到的准确度和分辨力有时在模拟处理系统中甚至是不可想象的。例如，在数字处理中可顺利地把频谱分析和同态滤波应用于语音频带压缩、解卷积以及去混响等过程，其中傅里叶变换所要求达到的准确度和分辨力，对于模拟处理来说是不切实际的。此外，采用大规模集成电路，还有助于降低数字信号处理系统的成本。

第三，数字信号处理算法具有直接的可实现性。有些概念用于说明连续信号是很困难的，但如用来说明离散信号就变得十分简单。例如，一个信号可被看成是由最小相位分量和最大相位分量所组成，对于连续信号来说，这仅具有理论上的意义，只能列出表示该两分量关系的一些表达式。但在数字信号处理中，这两个分量可直接计算出来，并可用作为模式识别信号，或用作进一步处理。诸如可实现性等理论问题，在数字处理系统中也变得简单了。这说明，一些用来分析连续信号和系统的理论工具，在数字系统中已成为实现信号处理的实际手段。可以看到，在数字信号处理的理论算法与系统实现之间往往存在十分明显的直观对应。这表明了一种观念的转变，已不能再认为数字信号处理仅仅是对模拟信号处理的逼近而已。

第四，数字信号处理系统可用不同于模拟系统的模式实现系统最佳化。完全的数字系统由于存在量化过程，本质上是一个非线性系统，这是数字系统本身的固有特点。利用这一特点，可以按数字系统所特有的方式实现信号处理的最佳化，有时甚至能达到一般模拟系统最佳化理论所达不到的目的。在实现非白色和非平稳干扰环境的自适应数字匹配滤波的研究中，这一点已逐渐被人们所发现。这将进一步加深观念上的转变，并使我们认识到，虽然模拟处理与数字处理有许多相似处，它们之间存在一定的直观对应，但是应力求避免把模拟信号处理所引出的结论强行纳入数字信号处理体系，切不可让某些先入的直观概念妨碍我们对数字信号处理的全面深刻理解。这一点对于研究数字信号处理，具有十分重要的指导意义。

以上所列举的一些特点是很不全面的，还有待于进一步深化认识。

4．数字信号处理技术的发展概况

作为一门现代学科，数字信号处理技术只经历了十多年的历史。但是，它的发展速度是极其惊人的。

四十年代末，发源于拉普拉斯时代的 z 变换理论，作为一种重要的现代数学工具已逐步引入电子工程领域，同时，已有少数科学家在探索实现数字滤波器的可能性。随着数字计算机的出现，由于它具有高度的灵活性，激发着人们用数字计算机去处理复杂的信号。在五十年代初期，用计算机处理地球物理数据，是数字信号处理的成功先例之一，但一般不能实时完成，处理几秒钟所收集的数据往往需要几分钟甚至几小时。当时的技术水平还只能实现低频控制系统和低频地震信号的数字处理，而且，从成本、体积和实时性来看，数字信号处理都还不能与模拟信号处理相匹敌，要直接实现诸如通讯和雷达信号的数字处

理是不可能的。尽管如此，在数字信号处理的这些早期实践中，已充分地体现出数字计算的灵活性的优点。

数字信号处理技术的真正发展是从六十年代开始的。其中重要进展之一是，1965年发表了计算傅里叶变换的高效算法，这类算法称为快速傅里叶变换（FFT）。快速傅里叶变换使数字信号处理从概念上和实现上发生了重大的转折，其意义是深远的，给这个新兴领域以极大的推动力。快速傅里叶变换是建立在离散时间的概念上的，它不单纯是对连续时间傅里叶变换的近似，而是从离散傅里叶变换（DFT）出发，有一整套自成体系的离散时域中的严格的基本定理和数学关系。离散傅里叶变换能把一个有限长度序列映射成另一个有限长度序列，因而很适合于数字计算机计算。利用离散傅里叶变换的一些代数结构，可以实现高效算法，在大多数实际问题中，能使离散傅里叶变换的计算时间成数量级地缩短。在六十年代初，已非常了解用计算机作频谱分析的原理，但所需计算时间太长，以致数字信号处理中的频谱分析部分仍不得不用模拟滤波器组来完成。自从出现了快速傅里叶变换，才使全数字式信号处理成为可能。傅里叶变换已不仅仅是一种理论概念，而且已成为一种技术手段。快速傅里叶变换的重要性还在于，它证实了数字频谱分析本质上比模拟频谱分析更为经济。由于这一发展，数字信号处理技术从不明显的地位一跃而成为一个重要领域。事实上，早在五十年代中期已有人发现离散傅里叶变换具有高效算法的代数结构，但直到1965年发表快速傅里叶变换原理时才被引起重视，其原因在于这时已有较多的人掌握用计算机作信号处理的方法，这又一次说明计算机技术对数字信号处理技术的重要影响。近几年来又出现了一批新的快速算法，其中较重要的有数论变换、维诺格拉德-傅里叶变换、多项式变换、最大熵谱估值法以及最大似然谱估值法等，它们在计算频谱或卷积方面具有更高的效率。

数字滤波器设计方法在六十年代中期得到了迅速发展，这是数字信号处理技术的另一个重大进展。当时提出了数字滤波器的各种逼近和实现方法，对递归和非递归滤波器作了全面比较，统一了数字滤波器的基本概念，逐步形成了关于数字滤波器的一整套全面的正规理论。数字滤波器领域的一个重要发展是对于有限冲激响应（FIR）和无限冲激响应(IIR）关系的认识的转化。在初期，一般认为IIR滤波器比FIR滤波器有更高的运算效率，因而明显地倾向于前者。但是，自从提出快速傅里叶变换后，有人提出用它来实现卷积运算，研究结果表明，用快速傅里叶变换实现高阶FIR滤波器同样可得到极高的运算效率。这一成果大大地激发了对高效FIR滤波器设计方法和数字滤波器频域实现的研究工作。采用计算机辅助设计是数字滤波器设计方法上的一项重要改革，它使数字滤波器的设计仅仅是对相应模拟滤波器的逼近。一般说来，通过对模拟滤波器函数的变换来设计数字滤波器，很难达到逼近任意频率响应或冲激响应，采用计算机辅助设计有可能实现频域或时域的最佳逼近，或频域时域联合最佳逼近。这意味着，由移植其它领域的成就而发展起来的数字信号处理技术，已日益立足于本领域的成就来取得进步。

大规模集成电路技术是推动数字信号处理领域发展的重大因素。数字信号处理已不再限于在通用计算机上实现，而且可用数字部件组成的专用硬件实现，这就使许多过去看来不切实际的信号处理算法，已开始能用专用数字硬件来实时处理了。现在，数字部件的单片集成密度已达到数十万个电路，数字信号处理用的很多通用组件（如乘法器、乘法累加

器、相关器、模数转换器、移位寄存器等）已单片化，而且，某些具有独立处理功能的预系统（如语音合成、调制解调器、数字滤波器等）也已单片化，一些数字信号处理系统可用极少数单片部件组成。微处理机的问世，进一步使处理功能固件化或硬件通用化，它已迅速成为数字信号处理及其应用领域一个十分活跃的积极因素。所有这些情况，对于降低成本、减小体积及缩短系统研制设计周期都有重要意义。由于数字部件工作速度提高，某些宽带信号的实时数字处理已成为可能。目前，工作速度达数十兆的模数转换器、乘法器和移位寄存器已有商品供应，已实现了采样率达十兆数量级的专用数字滤波器和快速傅里叶变换专用处理机，已经能应付从地球物理的低频信号到雷达系统的宽带信号的数字处理。可以认为，模拟信号处理已越来越失去在成本、体积和工作速度等方面的传统优势。

现在，数字信号处理技术正以惊人的速度向纵深和高级的方向发展，它的应用范围仍在不断扩展，据估计这种趋势还要持续一个较长时期，未来的发展可能会比过去的进程更为激动人心，必将引起某些应用领域的飞跃性转折。

第一章　时域离散线性系统分析基础

§1.1　引　　言

正如绪论中指出的，本书的研究对象是数字信号的分析和处理。所谓信号是指传送某个实际系统的状态或行为的信息的一种物理现象或过程。它的基本表现形式是变化着的电压或电流，即使原始信号是非电的物理量，也往往把它转换为电信号以便于处理。

在数学上，信号可以表示成一个或多个独立变量的函数。譬如，语音信号要用时间函数来表示；一张平面图象要表示成为两维空间变量的亮度函数；又如某个目标的雷达信号可以用一串随时间变化的射频脉冲来表示，这一串脉冲信号的诸参量包含了目标的距离、方位以及距变率、反射特性等等信息，因此，可以用多个自变量的函数来描述一个雷达目标的回波信号。为了方便起见，后面统一用"时间"这个术语表示信号函数的独立自变量，它可以是多维的，虽然在事实上它不一定是时间。

用数字表示的信号函数的独立变量既可是连续的也可是离散的。与时域连续信号不同，时域离散信号仅在离散时刻有定义，因此独立自变量只取离散值，时域离散信号表示为数的序列。将会看到，象语音、图象、雷达回波这类信号既可是连续的又可是离散的，并且在一定条件下，两者完全等效。

同样，作为信号函数的信号幅度（或强度），可以是连续的也可以是离散的。时间及幅度都连续的信号通常称为模拟信号；反之，时间及幅度均离散的信号称为数字信号。

在许多场合下，信号必须通过适当处理以便于提取信息，这样一来，发展信号处理技术和信号处理系统就显得极为重要。系统的作用是把信号变成一种在某种意义上说比原来的更为需要的形式。譬如，假设需要分离开以某种方式组合起来的两个或多个信号；或者需要提高信号的某个分量或参量；或者需要估计信号的某些参量，都可通过选择和设计适当的系统，把原始信号变换为所需要的形式。信号处理系统的分类与信号的分类相对应：输入和输出都是时间连续信号的系统叫做时域连续（简称连续）系统；输入和输出都是时间离散信号的系统叫做时域离散（简称离散）系统。同样，输入和输出都是模拟信号的系统叫做模拟系统，而输入和输出都是数字信号的系统叫做数字系统。故此，数字信号处理仅涉及到在幅度和时间上都是离散的数字信号的变换问题。但是本章以及本课程绝大部分所论述的仅是时域离散的而不是数字的信号和系统，幅度离散化即量化的效应将在第四章中详述。

数字信号处理系统有几个诱人的特点，首先，它可以利用通用数字计算机极其灵活地加以实现，它也能够用数字硬件加以实现。其次，如果需要的话，它还可以被用来仿真模拟系统，最后，或者更为重要的是，被用来实现用模拟硬件设备无法实现的信号变换。因此，当需要信号处理时，往往要把信号给予数字化表示。

本章介绍时域离散信号和信号处理系统的基本概念，为全书提供必要的和基本的数学分析方法。大部分内容针对一维信号而言，在此基础上适当地推广到二维信号，重点放在

线性非移变的时域离散系统上。自然，可以预料到，在本章和其它章节中得出的许多特性和结果有着和线性非时变（也叫定常）连续（即模拟）系统十分相类似之处。事实上，已曾有人在分析讨论时域离散系统时把离散序列看成是冲激脉冲串的模拟信号，只要使用慎妥，这种方法能够导致正确的结果来。然而，在目前许多数字信号处理的应用中，许多要处理的信号序列未必是从某个连续信号采样得到的，而且，许多时域离散系统并非简单地是相应的模拟系统的近似。因此，本章将立足在一个封闭的构思体系之内，用一套适合于时域离散系统的定义和符号，推导出一系列有用的结果，而不必试图把从模拟系统导出的类似结果强行纳入离散体系之内。只是在需要时，才对离散信号和模拟信号作适当的联系。

§1.2 时域离散信号——序列

在时域离散系统的理论中，涉及到处理的信号都用序列表示，本节介绍序列的时域和频域表示法以及采样定理。

1.2.1 序列的时域表示法

一个序列在某一离散时刻 n 的数值用 $x(n)$ 表示，它是整数 n 的函数，在其定义域内，$x(n)$ 的集合作有序组合形成一个序列 x，写成

$$x=\{x(n)\} \qquad n \text{ 为整数} \tag{1.1}$$

在无线电工程中，许多处于离散状态的电气过程的某些参数构成一个序列。譬如在图1.1中由Γ形链型网络构成的衰减器，从电源端向负载端沿各个节点的电压 $v_n=v(n)$ 的数值是节点序号 n 的函数，$N+1$ 个节点电压的集合：

$$v=\{v(n)\}=\{1,\ 1/2,\ 1/4,\ \cdots,\ 1/2^N\}$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

便构成了一个在"时"域上为有限的序列。

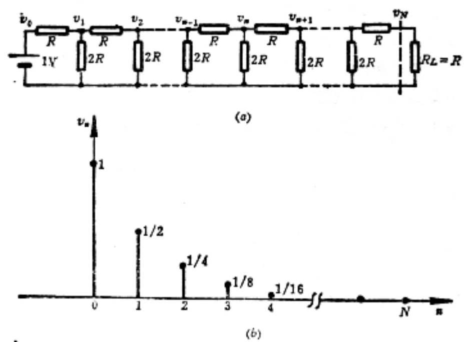

图1.1 链型网络的节点电压的分布构成一个序列

(a) 链型网络；(b) 序列。

另一方面，在数字信号处理领域内，所需处理的原始信号往往是连续的模拟信号，这时，首先必须对模拟信号 $f(t)$ 作等时间隔 T 的采样（见图1.2(a)），以获得离散序列 $x=\{x(n)\}$（见图1.2(b)），它和原始信号的关系是

$$x(n)=f(t)_{t=nT}=f(nT) \quad n\ 为整数$$

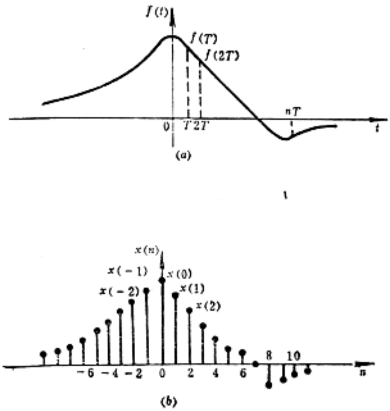

图1.2　由采样模拟信号形成序列

（a）对模拟信号 $f(t)$ 作等时间隔 T 的采样；（b）离散序列。

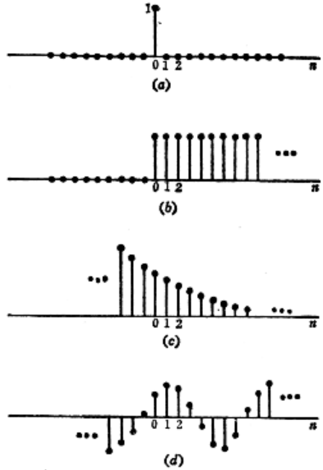

图1.3a　几种典型的序列

（a）单位采样 $\delta(n)$；（b）单位阶跃 $u(n)$；（c）实指数 a^n；（d）正弦序列 $A\cos(\omega_0 n+\phi)$。

虽然序列未必是由采样模拟信号而得，但为了方便计，统称 $x(n)$ 为序列 x 的第 n 次采样的样元，并直接用 $x(n)$ 代表 $\{x(n)\}$，称之为"序列 $x(n)$"。应当指出，虽然把上两图的横坐标都画成了一条连续的线，但 $x(n)$ 只在 n 为整数时才有定义，而当 n 不为整数时无定义，不应简单地误认这时的 $x(n)$ 数值为零。

下面介绍几个典型常用的离散序列，前四种如图1.3a 所示。

单位采样序列用 $\delta(n)$ 表示，定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}0 & n\neq 0\\ 1 & n=0\end{cases}$$

单位采样序列和模拟系统中的单位冲激函数的作用相同，也可称为离散冲激，或简称为冲激。但应注意，比起单位冲激函数来，离散冲激的数学定义简单而又精确。

单位阶跃序列 $u(n)$ 定义为

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

单位阶跃可用单位采样表示成

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k) \tag{1.2}$$

应当注意，右边连加号的上限是变量 n。反之，若用单位阶跃表示单位采样，则有如下关系

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{1.3}$$

式中，$u(n-1)$ 是把 $u(n)$ 延时一个采样间隔的单位阶跃序列。

具有 a^n 形式的序列称为实指数序列，其中 a 为实数。

正弦序列具有 $A\cos(\omega_0 n+\phi)$ 的形式，其中 ω_0 与 ϕ 是实常数。

复数指数序列的函数形式及其展开式是

$$e^{(\sigma+j\omega_0)n}=e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n)+je^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

若对所有的 n，关系式 $x(n)=x(n+N)$ 成立，$|N|$为满足该关系式的最小正整数，则称序列 $x(n)$ 是周期性的，其周期为$|N|$。若 $2\pi/\omega_0$ 为一整数，则 $\sigma=0$ 的复指数序列即正弦序列是周期性序列，其周期等于$|2\pi/\omega_0|$；若$2\pi/\omega_0$ 不为整数但为有理数时，则正弦序列仍是周期性的，但其周期比$|2\pi/\omega_0|$要长；最后，若 $2\pi/\omega_0$ 不是有理数时，则正弦序列与复指数序列都不是周期性的。无论周期性与否，参量 ω_0 总是称为正弦或复指数序列的"频率"。注意，由于自变量 n 被抽象为整数，无物理量纲，所以频率 ω_0 以弧度角作计量。对于正弦序列或复指数序列而言，在区间 $2\pi k\leqslant\omega_0\leqslant 2\pi(k+1)$，（$k$ 为任意整数）与在区间 $0\leqslant\omega_0\leqslant 2\pi$ 的序列值恒相等，于是发生了模糊性。然而，可以考虑把 ω_0 的区间限制在 $0\leqslant\omega_0\leqslant 2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\omega_0\leqslant\pi$，而无损其一般性。

在多个序列之间施以适当的运算，其结果是一个新序列。最为基本简单的运算要属两序列的相乘与相加，若有两序列 x 和 y，其对应在同一时刻的样元之积形成一新序列在该时刻 n 的样元，该新序列被称为 x 与 y 之积，由下式定义

$$x\cdot y=\{x(n)y(n)\}$$

同样，可定义两序列之和：

$$x+y=\{x(n)+y(n)\}$$

序列 x 的每个样元共同乘以标量 α，称 x 标乘以 α，记作 $\alpha\cdot x$，由此得到的新序列表示为

$$\alpha\cdot x=\{\alpha x(n)\}$$

若 y 与 x 具有形如

$$y(n)=x(n-n_0)$$

的关系，则称序列 y 是序列 x 经延时或位移 n_0 个采样间隔的复现，其中 n_0 必须为整数。

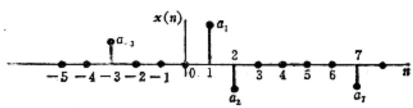

图1.3 b　序列 $x(n)$

任意一序列可以表示为多个甚至无穷个经标乘和延时的单位采样之和，在图1.3 b 中，序列 $x(n)$ 可表示为

$$x(n)=a_{-3}\delta(n+3)+a_1\delta(n-1)+a_2\delta(n-2)+a_7\delta(n-7)$$

一般说来，任一序列可写成

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k) \tag{1.4}$$

序列 $x(n)$ 是稳定的，若且仅若

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty \tag{1.5}$$

上式意味着序列是绝对可加的；序列 $x(n)$ 被称为是因果性的（或物理可实现的），如果对于 $n<0$，有 $x(n)=0$。关于稳定性和因果性的定义同样可引伸到有关信号处理系统的特性方面（见1.3.3），在那里，它有明显的物理意义。

1.2.2 序列的频域表示法——傅里叶变换

众所周知，一个模拟信号 $x_a(t)$ 往往可在频域上用它的傅里叶变换 $X_a(j\Omega)$ 表示，二者之间有一对傅氏变换关系：

$$X_a(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j\Omega t}dt \tag{1.6a}$$

$$x_a(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \tag{1.6b}$$

式中，若 t 的量纲是秒，则Ω的量纲是弧度/秒。在式（1.6a）中，认为对每个实值Ω，该积分作为柯西主值是存在的。譬如，对于能量有限即平方可积的信号，该变换式总是存在的。

对于离散序列 $x(n)$，由于 n 只能取整数，无连续性可言。这时，可类比式（1.6a）定义 $x(n)$ 的傅氏变换有如下的级数形式：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n} \tag{1.7a}$$

这里频率ω的量纲是弧度。应当指出，右边的级数不总是收敛的，譬如 $x(n)=u(n)$或 $e^{j\omega_0 n}$ 就不收敛。若 $x(n)$ 是稳定的，即式（1.5）成立，那么级数是绝对收敛的，且均匀收敛于ω的连续函数。因此，稳定序列的傅氏变换总是存在的。

既然变量 n 只取整数，从定义式（1.7a）可以看出，作为ω的函数 $X(e^{j\omega})$ 仍是以 2π 为周期的周期性函数，即

$$X(e^{j(\omega+2\pi N)})=X(e^{j\omega})$$

〔例1〕 试求等幅有限长序列：

$$x(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n<N\\ 0 & n\text{为其它}\end{cases} \tag{1.8}$$

的傅氏变换。为此，由式（1.7a）得到

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j(N-1)\omega/2} \tag{1.9}$$

根据式（1.8）、（1.9），图 1.4 绘出了 $x(n)$ 及 $X(e^{j\omega})$ 的幅频和相频特性。

既然 $X(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期，所以它可以展开成傅氏级数。不难证明（见习题 4），它的第 n 次傅里叶系数恰恰是采样 $x(n)$，写成

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{1.7b}$$

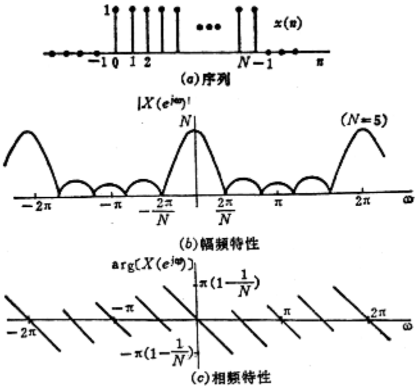

图1.4　等幅有限长序列的傅里叶变换

有时也称式（1.7b）为逆傅氏变换，它与式（1.7a）一起组成傅氏变换对。由式(1.7b)看出，序列 $x(n)$ 是由分布在 $-\pi<\omega\leqslant\pi$ 区间的复指数序列叠加而成。处在 ω 附近 $d\omega$ 区间的指数序列的复振幅等于 $\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})d\omega$，对比式（1.7b）和式（1.6b），二者外形有相似之处，但是更应当强调它们的一点重大差异，这就是在式（1.7）中，$x(n)$ 是离散的，$X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的，所以在式（1.7b）中，积分区间宽度仅取 2π。

1.2.3　二维时域离散序列

前面对一维序列的描述不难推广到二维序列乃至多维序列。本节仅对二维序列作一简要描述，可见一般。

二维序列是两个整数变量的函数，如图 1.5 所示。象一维序列一样，可以定义二维序列的单位采样、单位阶跃、指数和正弦函数。

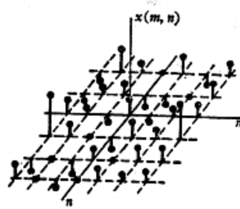

图1.5　二维序列的几何表示

二维单位采样序列 $\delta(m, n)$ 用一个除了原点为 1，余皆为零的序列来定义，即

$$\delta(m, n)=\begin{cases}0 & m\text{或}n\neq 0\\ 1 & m=n=0\end{cases}$$

二维单位阶跃序列 $u(m, n)$ 在 (m, n) 平面的第一象限等于1，其它各点等于零，即

$$u(m, n)=\begin{cases}1 & m\geqslant 0, \ n\geqslant 0\\ 0 & \text{其它点}\end{cases}$$

二维指数序列具有 $a^m b^n$ 的形式，a 和 b 都是实常数；二维正弦序列具有形式：

$$x(m, n)=A\cos(\omega_0 m+\phi)\cos(\omega_1 n+\theta)$$

若序列能够写成一维序列之积，即

$$x(m, n)=x_1(m)x_2(n)$$

则称序列 $x(m, n)$ 是可分离的。前述四种都是可分离序列，但序列 $\cos(\omega_0 mn)$ 则是不可分离的。

任一个二维序列可以表示为许多经位移（即延时）的单位采样的线性组合，即

$$x(m, n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(k, r)\delta(m-k, n-r) \tag{1.10}$$

二维序列的傅里叶变换是二维频率变量 $(\omega_1、\omega_2)$ 的函数，它定义为

$$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(m, n)e^{-j\omega_1 m}e^{-j\omega_2 n} \tag{1.11 a}$$

其逆变换关系由下式给出

$$x(m, n)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})e^{j\omega_1 m}e^{j\omega_2 n}d\omega_1 d\omega_2 \tag{1.11 b}$$

在 $x(m, n)$ 是绝对可加的，即

$$S\triangleq\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(m, n)|<\infty \tag{1.12}$$

因而，序列即是在稳定的条件下，$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 是 $\omega_1、\omega_2$ 的连续函数，并且是对每个频率变量以 2π 为周期的周期函数。

§1.3 时域离散线性系统

1.3.1 线性系统——叠加原理

时域离散系统具有一种变换器或运算器的功能，将输入序列 $x(n)$ 映射为输出序列 $y(n)$，可表示为

$$y(n)=T[x(n)]$$

或用图 1.6 表示，又称 $y(n)$ 是系统对 $x(n)$ 的响应。

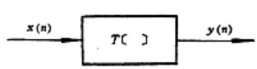

图1.6 系统起变换作用，将输入序列 $x(n)$ 映射为输出序列 $y(n)$

依据施于变换 $T[\ ]$ 以不同的限制可定义各类离散系统，这种分类法使数学模型简单，便于设计。其中，线性非移变系统（LSI）受到广泛的注意和研究，也是本课程的主要研究对象。

用叠加原理定义线性系统：如果 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 分别是同一系统对 $x_1(n)$ 和

$x_2(n)$ 的响应，对于任意常数 a 和 b，当且仅当

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n) \tag{1.13}$$

时，则该系统是线性的。式（1.4）曾表明，任一序列可以表示为一连串经标乘和位移的单位采样之和，再考虑到线性系统适用式（1.13）的叠加原理，系统的输出响应可以写成

$$y(n)=T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

令 $h(n, k)$ 为系统对移位 k 步的单位采样 $\delta(n-k)$ 的响应，简称为单位采样响应，它是以 k 为参量以 n 为自变量的响应函数，即

$$h(n, k)=T[\delta(n-k)] \tag{1.14}$$

于是，输出响应等于

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n, k) \tag{1.15}$$

1.3.2 线性非移变系统

线性系统，若其输出响应随输入的移位（延时）而移位，但不改变其形状，则被称为非移变的。若 $y(n)=T[x(n)]$，则数学上可表示为

$$y(n-k)=T[x(n-k)]$$

特别是，若系统对单位采样 $\delta(n)$ 的响应是 $h(n)$，即

$$h(n)=T[\delta(n)] \tag{1.16}$$

则式（1.14）变为

$$h(n, k)=T[\delta(n-k)]=h(n-k) \tag{1.17}$$

$h(n)$ 被称为线性非移变系统单位采样响应。将式（1.17）代入式（1.15），得到

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{1.18}$$

这样，任何线性非移变系统完全用其单位采样响应 $h(n)$ 表征，通常称式（1.18）为卷积和公式，并称 $y(n)$ 是 $x(n)$ 对 $h(n)$ 的卷积和，简写成

$$y(n)=x(n)*h(n) \tag{1.19}$$

为求出 $y(n)$，应使用卷积和公式（1.18），细察该式右侧连加项的变量是 k，而 n 是以参量形式出现，对每个既定 n 值，计算序列 $x(k)$ 与 $h(n-k)$ 的乘积，然后在 k 的全部区间内对新序列 $x(k)$ $h(n-k)$ 诸点进行连加求和，求得该给定 n 值上的输出响应 $y(n)$ 值。对所有 n 值逐个地重复上述过程，最后求得 $y(n)$ 序列值。

〔例 2〕 设有一线性非移变系统，其单位采样响应为 $h(n)=a^n u(n)$，即

$$h(n)=\begin{cases} a^n & n\geqslant 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$

试求输出响应 $y(n)$，若作用于系统的输入序列是

$$x(n)=u(n)-u(n-N)$$

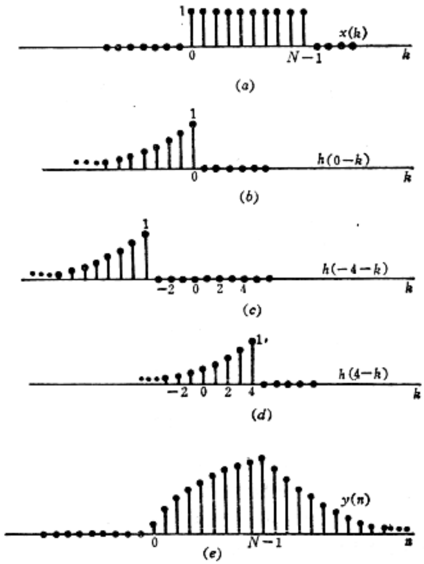

图1.7　卷积和的计算过程

（a）序列 $x(k)$；（b）、（c）、（d）几个特定 n 值的 $h(n-k)$；（e）对每个特定 n 值计算 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$，求得输出响应序列 $y(n)$。

图中，$h(n)=a^n u(n)$，取 $0<a<1$。

图 1.7 表示了本例应用式（1.18）求卷积和的过程，（a）是有限长序列 $x(k)$，以 k 为自变量；（b）、（c）、（d）是在求 $y(0)$、$y(-4)$、$y(4)$ 时分别令 $n=0$，-4，4 时的 $h(n-k)$ 序列，仍以 k 为自变量。每计算一点 $y(n)$ 值时，都需要有三个步骤：（1）给出 $h(n-k)$ 序列；（2）逐点对应相乘，求得新序列 $x(k)\cdot h(n-k)$；（3）连加求和。最后求得输出响应序列 $y(n)$ 如（e）图所示，注意，这里是以 n 而不是以 k 作自变量。

现在用解析法求 $y(n)$，仍需用式（1.18），并注意到 $x(k)=0$ 的区间是 $k<0$ 和 $k>N$，$h(k)=0$ 的区间是 $k<0$。为求 $y(n)$，将 n 分成三个区间：首先，在 $n<0$ 的区间上，当 $k<0$ 时，$x(k)=0$，而当 $k\geqslant 0$ 时，$n-k<0$，因此，$h(n-k)=0$，总之，对所有 k，$x(k)\cdot h(n-k)=0$，结果是 $y(n)=0$；其次，在 $0\leqslant n<$