



水运科技译文

兴波阻力译文集

(1984)

武汉水运工程学院情报室

前 言

六十年代初期波型测量和分析技术异军突起，一下子就把兴波阻力理论研究推向高潮。二十多年来在这方面有迅猛而持续的发展。例如，1963年Wehausen率先发表了高阶理论，一般认为是严格的经典性的著作，1966年Eggers以及Maruo在简化的假定下也各自发表了其高阶理论，1976年的讨论会上Kitazawa并将各家理论作了比较，1972年Brard详细讨论了严格满足物面条件但保留线性自由面条件的所谓 Neumann—Kelvin 问题，强调了线积分项的重要性，在此后引起了不少的争论；1973年Gadd引用了Guilloton的直观猜想，上机计算获得了极大的成功，被专家们誉为兴波理论发展的里程碑，“理论在实际设计问题中起积极作用的时刻终于到来”，但是这个方法在理论上是不完备的，为此，Noblesse 和 Dagan于1975和1976年先后分别及联合著文对它作了理论分析的补充；七十年代中期以后发展了慢船理论，其特点之实质在于以佛氏数取代几何参数宽长比作为小参数展开，在这方面Baba和Maruo应该说是开拓者；七十年代末期在Ursell关于弱非均匀流上波的传播理论(1960)基础上出现了射线理论，Keller和Inui在这方面作了开创性的工作，按照这种理论计算的波型比较符合实际，但它还不能用来计算波阻，看来它还是一个发展中的但是有前途的理论。

兴波阻力理论二十多年来的发展大体上可以用两次国际讨论会（1963年在密执安和1976年在东京），三次船舶计算流体力学会议（1975、1977、1981）和从美国到日本的一次二阶段的工作会议（1979—80）为标志。1963年的讨论会推动了波型测量和分析技术和线性理论在船型改良方面的应用；1976年的讨论会总结检阅了十多年来的工作，用Tulin的话来说，是“高度强调理论”的。1977年第二次船舶计算流体力学会议是一个把数值方法用于兴波和兴波阻力的转折点，在此以前只有一篇文章（Gadd 1976），而此次会议上Baba和Dowson两篇文章十分引人注目，1979—80年的工作会议邀请了23位专家对五种船型用七种方法作了计算，所得结果比较离散，这一方面可能由于各人的几何处理上有差异，另一方面也说明各种理论和方法还有待于互相补充进一步发展。

本译文集选择的绝大部分是经常在各种文献中引用和提及的文章，意图对开始接触这个领域的同志们将上述各种理论作一番介绍，想来对查阅各种理论开始出现时的思想是不无帮助的，编排次序上大体上分为高阶理论和N—K方法；Guilloton—Gadd方法和变形坐标法；慢船理论；射线理论等四类，1976年讨论会上Newmann对线性问题的综述和Ogilvie对

非线性问题的讨论涉及面广，理应属于综述性文章，但按其侧重点不同分别归于慢船理论和Guilloton方法一类中。此外，遗憾的是在我们手头的材料中Eggers关于高阶理论的文章有若干公式和图都印刷得不清楚，只好付之阙如了。

兴波阻力理论发展还有很多方面，诸如：破波机理，数值计算方法，细长体理论发展的讨论等等都还未能包括在本译文集内，首尾非均匀性问题的讨论也不突出，这些方面的介绍只好留待以后了。

译文方面我们认为“宁信而不顺”的原则只适用于文学著作的翻译，对于技术科学论著的翻译保持原著的风格是次要的，重要的是在不失原义的基础上应力求中国人“可读”。限于水平也限于时间仓促恐怕我们远没有做到此点。

李世禧

1984年于武汉水运工程学院

录 目

前 言

一、高阶理论和Neumann—Kelvin问题

对薄船理论的一个研究	(1)
论薄船的二阶速度势	(26)
线性自由面边界条件下用奇点分布表达给定船型	(37)
在自由表面附近与船体运输等效的奇点分布	(59)
利用合模势作零阶近似时兴波阻力唯一性的研究	(78)

二、Guillot方法, 坐标变形法

计算兴波阻力的葛洛顿方法	(92)
用坐标变形法计算薄船非线性波阻的一个方法	(105)
船舶兴波的一个摄动分析并讨论Guittolon方法	(177)
藉助连续映射的非线性船舶兴波理论	(133)
论非线性兴波阻力理论	(156)
船舶的高阶兴波理论	(177)
船波的遮蔽效应	(192)

三、慢船理论

低速运动的肥大船型首部自由表面绕流的研究	(200)
用低速理论预报有限宽船舶的兴波阻力	(212)
线性兴波阻力理论	(222)
用包括精确船体表面条件的低速理论计算兴波阻力	(239)

四、射线理论

非薄型或丰体型船的波列	(251)
在非均匀定常流上的定常波列	(255)
局部非线性自由面对船波和兴波阻力之影响	(263)
船行波的幅射理论和流线型船	(284)
关于船波射线理论的注记	(308)
绕非细长船的异于Kelvin的色散波	(315)

对薄船理论的研究

J. V. Wehausen

(International Seminar on

Wave Resistance, 1963)

概 述

在定常或非定常船舶运动速度势常用的薄船近似的推导中, 在假定无粘流体的无旋流动之下, 人们是从问题的精确边界条件开始的。然后假定各种未知函数是描述船舶厚度的某些参数的解析函数。经过各种推导(在此不必重复), 人们已经用一个新的线性化问题(其解做为欲求问题的近似)取代了初始的边值问题。然而, 关于对这个很好的近似总是存在某些疑问。最近, 该疑问已经被Maruo(1962)所突破, 他假定宽度不仅同长度而且同吃水及 C^2/g 相比均必须是小量。尽管他的作法在论点上并未受到(本文)的支持, 除了被舍去项的考察未给人们留下深刻的印象而仅仅是在 x 方向的小的导数是必要的之外, 并未发现什么问题。尤其是, 某些被舍去的项包含了垂直方向的导数, 在U型船龙骨处, 其值可以是无穷大的。

本文的目的是提出一个对薄船速度势的推导, 对于应用于精确的近似来说, 一个适当的条件, 变得更为明显。

问题将尽可能地用足够一般形式来表出, 使方程式既可适用于定常运动, 也可以适用于从静止开始的运动。不过, 这两种情况以后将分别加以叙述。

问题的精确提法

引进三个右手坐标系是方便的, 其一固定在空间 $\overline{oxyz}$ 其二固定在船上 $o'x'y'z'$, 其三, 随船运动但平行于空间座标的坐标系 $oxyz$ 。取 $\overline{oy}$ 同重力方向相反, $\overline{ox}$ 与运动方向重合, $\overline{oxz}$ 与未扰动的水平面重合。进一步, $OXYZ$ 与 $\overline{O'X'Y'Z'}$ 在船舶处于静止时重合, $o'x'y'$ 是船舶的中线面, $o'y'z'$ 是船中横剖面。

令 $\overline{oo} = \overline{x}(t)$, 此处 $\overline{x}(t) = C(t)$

设船舶的重心位于点 (x_G', y_G', o) 处, 其质量是 m , 相对其重心的纵摇惯性矩为 I_z 。船体可用下列方程描述:

$$z' = \pm f(x', y') \quad (1)$$

设 $L = 2l$ 是未扰动水线面的长度, $B = 2b$ 是中剖面宽度, 而 H 是中吃水。我们所用的船舶“轮

廓线”是指船体与平面 $o'x'y'$ 的交线。假定 $f(x', y')$ 在轮廓线处为零, 虽然在此方面可以更加一般化, 但很明显, 如果船底为平的则形状上的微小改变就可使此条件得以满足。另一方面, 盘形底面情况并不能包含在(1)式之中。函数 f 假定对任何变量都可连续求导。

我们将假设船舶的运动是由平行于 $o'x'$ 之推力 T 作用于船舶引起的。其推力作用线在重心之下的距离为 d 。当船舶运动时, 纵倾及重心的位置相对于 $oxyz$ 均要发生变化, 令 α 为纵倾角, 以船首上抬方向为正; e 是原点 o' 升高的值(见图1)。则 $oxyz$ 和 $o'x'y'z'$ 之间有下列关系式:

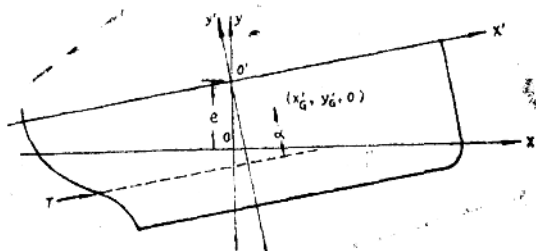


图 1

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + (y - e) \sin \alpha, & x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y' &= -x \sin \alpha + (y - e) \cos \alpha, & y &= e + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\ z' &= z, & z &= z' \end{aligned} \quad (2)$$

在坐标系 $ox'yz'$ 或 $oxyz$ 中流体的运动是最容易描述的。令 $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)$ 是在固定坐标系中的速度势, $\varphi(x, y, z, t)$ 是在运动坐标中的速度势, 则

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) = \varphi(x - x_0(t), y, z, t) \quad (3)$$

且

$$\phi_t = -c\varphi_x + \varphi_t, \quad \phi_{\bar{x}} = \varphi_x, \quad \phi_{\bar{y}} = \varphi_y, \quad \phi_{\bar{z}} = \varphi_z$$

如果对于船舶来说运动是定常的, 则 $\varphi_t = 0$ 。 ϕ 的梯度和 φ 的梯度都表示水的绝对速度。伯诺里积分可用下列二式之一表示:

$$\begin{aligned} \phi_t + gy + \frac{1}{2}(\phi_{\bar{x}}^2 + \phi_{\bar{y}}^2 + \phi_{\bar{z}}^2) + \frac{p}{\rho} &= \frac{p_a}{\rho} \\ \varphi_t - c\varphi_x + gy + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + \frac{p}{\rho} &= \frac{p_a}{\rho} \end{aligned} \quad (4)$$

式中 p_a 是大气压力, 我们显然可以取为 $p_a = 0$, 因为我们并不涉及空泡问题。

设水表面的方程是:

$$y = Y(x, z, t) = Y(\bar{x} - \bar{x}_0(t), \bar{z}, t) = \bar{Y}(\bar{x}, \bar{z}, t) \quad (5)$$

则势函数 φ 在此表面上必然满足下列边界条件,

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, Y(x, z, t), z, t) Y_x(x, z, t) - \varphi_x + \varphi_y Y_z + Y_t - CY_x &= 0 \\ \varphi_t(x, Y(x, z, t), z, t) - c\varphi_x + gY(x, z, t) + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

在船舶湿表面上应满足对应的运动学和动力学边界条件。运动学条件是：

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y, \pm f(x', y'), t) \frac{\partial}{\partial x} f(x', y') + \varphi_y \frac{\partial}{\partial y} f(x', y') \pm \varphi_z \\ = cf_x \cos \alpha - cf_y \sin \alpha - \frac{\partial}{\partial t} f(x', y') \end{aligned} \quad (7)$$

右边的最后一项是必须的，因为 x' 和 y' 均通过 α 和 e 取决于 t ，此二者可随初值问题变化。在定常运动时，此项为零。由(2)式，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x', y') &= f_{x'} \cos \alpha - f_{y'} \sin \alpha \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x', y') &= f_{x'} \sin \alpha + f_{y'} \cos \alpha \end{aligned} \quad (8)$$

为了写出动力学边界条件，我们应先求出作用于船的力和力矩，假定已知压力 $p(x, y, z, t)$ ，一旦 φ 已知，此力即可求得，记船体的湿面积为 S_w ，湿面积在中线面上的投影为 S_{wp} ，后者以轮廓线和水面与船表面交线的投影线为边界。记相对于 $oxyz$ 的力的分量为 F_x, F_y ，而相对于 $o'x'y'z'$ 的力的分量是 F'_x 和 F'_y ，相对于重心的力矩记为 M ，则：

$$\begin{aligned} F_x &= \iint_{S_w} p(x, y, z, t) n_x' ds = 2 \iint_{S_{wp}} p(x, y, f(x', y'), t) f_{x'} dx' dy' \\ F_y &= 2 \iint_{S_{wp}} p(x, y, f(x', y'), t) f_{y'} dx' dy' \\ M &= 2 \iint_{S_{wp}} p(x, y, f, t) [(x' - x_G') f_{y'} - (y' - y_G') f_{x'}] dx' dy' \end{aligned} \quad (9)$$

当然，动力学的边界条件不是别的，就是牛顿运动定律：

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_G &= m [\ddot{x}_0 - (x'_G \sin \alpha + y'_G \cos \alpha) \ddot{\alpha} - (x'_G \cos \alpha - y'_G \sin \alpha) \dot{\alpha}^2] \\ &= F_x + T \cos \alpha = F'_x \cos \alpha - F'_y \sin \alpha + T \cos \alpha \\ m \ddot{y}_G &= m [\ddot{e} + (x'_G \cos \alpha - y'_G \sin \alpha) \ddot{\alpha} - (x'_G \sin \alpha + y'_G \cos \alpha) \dot{\alpha}^2] \\ &= F_y + T \sin \alpha - mg = F'_x \sin \alpha + F'_y \cos \alpha + T \sin \alpha - mg \\ I_G \ddot{\alpha} &= M + Td \end{aligned} \quad (10)$$

对于定常运动，这些式子简化为：

$$\begin{aligned}
F_x + T \cos \alpha &= 0 \\
F_y + T \sin \alpha - mg &= 0 \\
M + Td &= 0
\end{aligned}
\tag{11}$$

在海洋水底亦应满足运动学条件，我们假定水底是一个平面 $y = -h$ 。

$$\varphi_y(x, -h, z, t) = 0 \tag{12}$$

如果是无限深，可用下式代之：

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \varphi_y = 0 \tag{12}$$

如果有平行于运动方向的壁面，则就必须补充类似于 (12) 式的条件。

最后，在无穷远处亦有边界条件。我们将定常与不定常运动分开。对于初值问题，我们假定：

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \quad ([x^2 + z^2]^{-1/2}) \text{ 当 } x^2 + z^2 \rightarrow \infty \text{ 时} \tag{13}$$

于对定常运动，我们假设：

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} 0 \quad ([x^2 + z^2]^{-1/2}) \text{ 当 } x^2 + z^2 \rightarrow \infty, x > 0 \text{ 时} \\ 0(1) \quad \text{当 } x^2 + z^2 \rightarrow \infty, x < 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{14}$$

为了与物理状况一致，此问题可以用各种方式修正。例如，如果船模以其静止平衡位置被夹固在拖车上，则 $\alpha = e = 0$ ，且 T 不再适用上述假设。必要的修正是很简单的，事实上，问题会变得更加简单。

定常运动

对于定常运动 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ 且 $Y = Y(x, z)$ ，而 α 、 e 和 c 均为常数，故在边界条件中，(6) 式和 (7) 式中的 φ 对 t 的偏导数为零。利用这种简化，我们就可以求得拉普拉斯方程满足 (6)、(7)、(11)、(12) 和 (14) 的解。

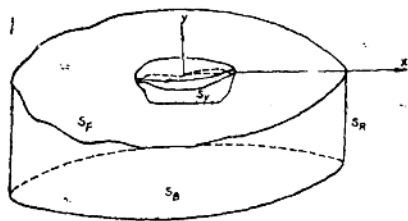


图 2

现在我们来考虑流体中以底面 S_B ，自由表面 S_F ，湿表面 S_w 及半径为 R 轴线为 oy 的垂直柱体 S_R (见图 2) 的区域。

令 (x, y, z) 是域内的任一点，而 (ξ, η, ζ) 是边界上的任一点，然后，令 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ 是格林函数，亦即，它是拉氏方程的一个解，在 (x, y, z) 处，变量 (ξ, η, ζ) 有奇点 $1/r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{-1/2}$ ，而在流体所占据的其它

点，对 (ξ, η, ζ) 是调合的。也就是：

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} + H(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \tag{15}$$

式中H是调合函数，G的其它特性在需要时将要列举出来，注意到，函数G此时是听任我们支配的，只要我们能够最终构造出来即可。有时，为简化书写，用P代替(x, y, z)，用Q代替(ξ, η, ζ)，即写为G(P, Q)，下标n是P点法向导数的记号：

$$G_n(P, Q) = G_{x, n_1} + G_{y, n_2} + G_{z, n_3}$$

下标v是Q点法向导数的记号：

$$G_v(P, Q) = G_{\xi, v_1} + G_{\eta, v_2} + G_{\zeta, v_3}$$

从而，利用格林定理，我们有下列公式。

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S [\varphi_v(Q)G(P, Q) - \varphi(Q)G_v(P, Q)] dS(S) \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R} [\varphi_R G - \varphi G_R] dS \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \varphi G_n ds \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_F} [\varphi_v G - \varphi G_v] dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_w} [\varphi_v G - \varphi G_v] dS \end{aligned} \quad (16)$$

此处，我们在 S_B 面上的积分利用了(12)式（实际上是在圆柱体的内部的 S_B 部分， S_F 亦类似），对G，我们可以附加下列限制：

$$G_n(x, y, z, \xi, -h, \zeta) = 0 \quad (17)$$

如果水深为无穷，则以下式代之：

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} G_n = 0 \quad (17)$$

则在 S_B 上的积分为零

下面我们考虑在 S_F 上的积分，此处：

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (-Y_{\xi}, 1, -Y_{\zeta}) / [1 + Y_{\xi}^2 + Y_{\zeta}^2]^{1/2} \\ ds(Q) &= [1 + Y_{\xi}^2 + Y_{\zeta}^2]^{1/2} d\xi d\zeta \end{aligned} \quad (18)$$

设船体与圆柱体所围成的 S_F 这部分在(x, z)平面上的投影为 S_{FP} ，故我们可将此积分写为下式：

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{FP}} \left\{ [-Y(\xi, \zeta) \varphi_{\xi}(\xi, Y(\xi, \zeta), \zeta) + \varphi_{\eta} - Y_{\zeta} \varphi_{\zeta}] G(x, y, z, \xi, Y, \zeta) - [Y_{\xi} G_{\xi} - Y_{\zeta} G_{\zeta}] \varphi \right\} d\xi d\zeta$$

由(6)式, 此式等于

$$\frac{1}{4\pi} \iint \left\{ -CY_{\xi}(\xi, \zeta) G(x, y, z; \xi, Y, \zeta) - G_{\eta} \varphi + [Y_{\xi} G_{\xi} + Y_{\zeta} G_{\zeta}] \varphi \right\} d\xi d\zeta$$

我们回顾二元分部积分公式是:

$$\iint_S F \operatorname{grad} G ds = \oint_C F G \vec{n} ds - \iint_S G \operatorname{grad} F dS \quad (19)$$

式中S是某个区域, C是其周界, $\vec{n}$ 是外法线, 而C的方向是反时针, 对上式的第一项应用此式, 我们得到:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \oint -CY G_{\eta} ds + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{FP}} \left\{ CY(\xi, \zeta) [G_{\xi} + G_{\eta} Y_{\xi}] \right. \\ & \left. - G_{\eta} \varphi + [Y_{\xi} G_{\xi} + Y_{\zeta} G_{\zeta}] \varphi \right\} d\xi d\zeta \end{aligned}$$

由(6)式中第二个方程, 此式等于:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \oint -CY G_{\eta} ds + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{FP}} \left\{ C^2 g^{-1} \varphi_{\xi}(\xi, Y(\xi, \zeta), \zeta) G_{\xi} \right. \\ & \left. - G_{\eta} \varphi + C G_{\eta} Y Y_{\xi} + [Y_{\xi} G_{\xi} + Y_{\zeta} G_{\zeta}] \varphi - \frac{1}{2} C^2 g^{-1} \right. \\ & \left. \cdot [\varphi_{\xi}^2 + \varphi_{\eta}^2 + \varphi_{\zeta}^2] G_{\xi} \right\} d\xi d\zeta \end{aligned}$$

在 $C^2 g^{-1} \varphi_{\xi} G_{\xi}$ 项之后插入 $C^2 g^{-1} \varphi_{\eta} Y_{\xi} G_{\xi} - C^2 g^{-1} \varphi_{\eta} Y_{\xi} G_{\xi}$, 于是前二项变为:

$$C^2 g^{-1} G \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi, Y(\xi, \zeta), \zeta)$$

此项分部积分之后, 有:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \oint [-CYG + C^2 g^{-1} \varphi G_{\xi}] n_1 ds - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{FP}} [-C^2 g^{-1} \cdot \\ & \cdot [\varphi G_{\xi} + \varphi_{\eta} G_{\xi}] Y_{\xi} + C G_{\eta} Y Y_{\xi} + [Y_{\xi} G_{\xi} + Y_{\zeta} G_{\zeta}] \varphi - \frac{1}{2} C^2 g^{-1} \end{aligned}$$

$$\cdot [\varphi_t^2 + \varphi_n^2 + \varphi_z^2] G_t \} d\xi d\zeta \quad (20)$$

我们暂时把此积分留在此处，线积分路径的取法见图 3 所示。

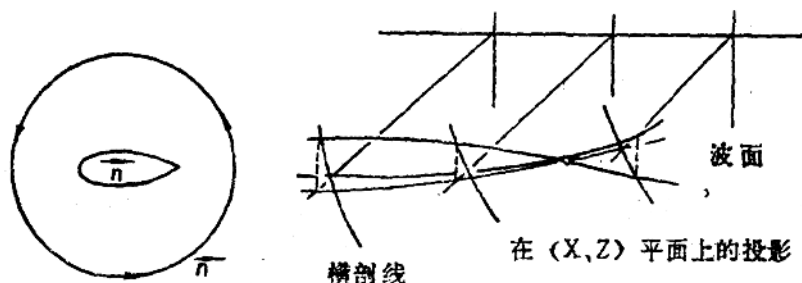


图 3

水线面与船体交线上的点满足下列方程：

$$z = f(x', -y'(x, z)) = f(x \cos \alpha + [Y(x, z) - e] \sin \alpha - x \sin \alpha + [Y - e] \cos \alpha) \quad \text{当 } z \geq 0$$

若 $z \leq 0$ ，则以 $-z$ 代替 z 代入上列方程即可。我们将其显式表达形式为 $z = \pm \hat{f}(x)$ ， $z \geq 0$ 时的法向矢量由下式给定：

$$\vec{n}^+ = (\hat{f}'(x), -1) / [1 + \hat{f}'^2]^{1/2}$$

当 $z \leq 0$ 时为：

$$\vec{n}^- = (\hat{f}'(x), 1) / [1 + \hat{f}'^2]^{1/2}$$

考虑到线积分的方向，有：

$$n_1 ds = -\frac{\hat{f}'}{1} dx = \hat{f}'(x) dx \quad \text{当 } z \geq 0$$

$$n_1 ds = \frac{\hat{f}'}{1} dx = \hat{f}'(x) dx \quad \text{当 } z \leq 0$$

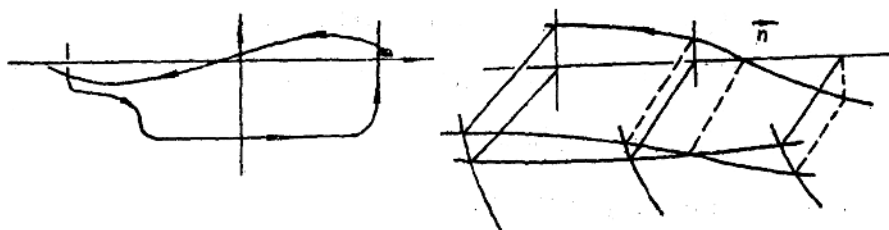


图 4

再利用 ϕ 和 Y 相对于 z 的对称性。我们可以写出对于船舶的线积分部分如下:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \left\{ -C[G(x, y, z; \xi, \hat{Y}, \hat{f}) + G(x, y, z; \xi, \hat{Y}, -\hat{f})] \hat{Y} \right. \\ & \quad + C^2 g^{-1} [G_t(x, y, z; \xi, \hat{Y}, \hat{f}) + G_t(x, y, z; \xi, \hat{Y}, -\hat{f})] \\ & \quad \left. \cdot \varphi(\xi, \hat{Y}, \hat{f}) \right\} d\xi \end{aligned} \quad (21)$$

式中 $\hat{Y}(\xi) = Y(\xi, \hat{f}(\xi))$ 。以后我们再考虑线积分的其它部分。

现在我们考虑在 S_w 上的积分。既可以用 (x', y') 也可以用 (x, y) 坐标系来计算, 每种情况积分的形式都是一样的。由边界条件(7), 我们有

$$\varphi_n(\xi, \eta, f(\xi', \eta')) = C(f_\xi / \cos \alpha - f_{\eta'} / \sin \alpha)$$

在 (x', y') 系统中 n 的座标是:

$$\vec{n} = (f_{x'}, f_{y'}, \pm 1) / [1 + f_{x'}^2 + f_{y'}^2]^{\frac{1}{2}}$$

在 (x, y) 系统中,

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (f_x / \cos \alpha - f_{y'} / \sin \alpha, f_x / \sin \alpha + f_{y'} / \cos \alpha, \pm 1) / \\ & [1 + f_{x'}^2 + f_{y'}^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

面元在船的两侧是相同的, 为:

$$dS = [1 + f_{x'}^2 + f_{y'}^2]^{\frac{1}{2}} dx dy = [1 + f_{x'}^2 + f_{y'}^2]^{\frac{1}{2}} dx' dy'$$

因此, 积分如下:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \iint_{S_w} \left\{ C[f_\xi(\xi', \eta') \cos \alpha - f_{\eta'} \sin \alpha] [G(P; \xi, \eta, f(\xi', \eta')) \right. \\ & \quad + G(P; \xi, \eta, -f)] - \varphi(\xi, \eta, f(\xi', \eta')) [f_\xi / \cos \alpha \\ & \quad - f_{\eta'} / \sin \alpha] [G_t(P; \xi, \eta, f) + G_t(P; \xi, \eta, -f)] \\ & \quad - \varphi(\xi, \eta, f) [f_x / \sin \alpha + f_{y'} / \cos \alpha] [G_n(P; \xi, \eta, f) \\ & \quad + G_n(P; \xi, \eta, -f)] + \varphi(\xi, \eta, f) [G_t(P; \xi, \eta, f) \\ & \quad \left. - G_t(P; \xi, \eta, -f)] \right\} d\xi d\eta' \end{aligned} \quad (22)$$

在写出积分时, 已经应用了 φ 的对称性, 即:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, -z)$$

前三项任何一项的分部积分均可用 f 的本身代替 f 的导数,但要重新带回此导数,因为 f 是作为 φ 和 G 的自变量出现的。我们对第一项进行这个积分,可得到下列表达式:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \oint C f(\xi', \eta') [G(P; \xi, \eta, f) + G(P; \xi, \eta, -f)] n_1 ds \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{\infty}} \left\{ -C f(\xi', \eta') [G_{\xi}(P; \xi, \eta, f) + G_{\xi}(P; \xi, \eta, -f)] \right. \\ & - C f(\xi', \eta') [f_{\xi}/\cos\alpha - f_{\eta}/\sin\alpha] [G_{\xi}(P; \xi, \eta, f) - G_{\xi}(P; \xi, \eta, -f)] \\ & - \varphi(\xi, \eta, f) [f_{\xi}/\cos\alpha - f_{\eta}/\sin\alpha] [G_{\xi}(P; \xi, \eta, f) + G_{\xi}(P; \xi, \eta, -f)] \\ & - \varphi(\xi, \eta, f) [f_{\xi}/\sin\alpha + f_{\eta}/\cos\alpha] [G_{\eta}(P; \xi, \eta, f) + G_{\eta}(P; \xi, \eta, -f)] \\ & \left. + \varphi(\xi, \eta, f) [G_{\xi}(P; \xi, \eta, f) - G_{\xi}(P; \xi, \eta, -f)] \right\} d\xi' d\eta' \end{aligned} \quad (23)$$

围线积分在 S_{∞} 边界线上进行,然而:由于 f 在船舶的轮廓线上为零,因此仅仅沿着波面线在中线面的投影的积分才是有效的(见图4)。在此公式中 $\vec{n}$ 的分量是在 (x, y) 系统中的分量。波浪轮廓线的投影点应满足下式:

$$\begin{aligned} y = y(x, f(x', y')) = Y(x, f(x\cos\alpha + (y-e)\sin\alpha \\ - x\sin\alpha + (y-e)\cos\alpha); \end{aligned}$$

如果对 y 求解,比如 $y = \hat{Y}(x)$,这就是显式表示形式。法向矢量就是:

$$\vec{n} = (-\hat{Y}'(x), 1) / [1 + \hat{Y}'^2]^{1/2} \quad (24)$$

因而:

$$n_1 ds = \hat{Y}'(x) dx, \quad n_2 ds = dz \quad (25)$$

用 f, y, φ 和 G 可将围线积分写为显式,在(23)式中的围线积分可与(21)中的围线积分合并为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int C [G(P; \xi, \hat{Y}(\xi), \hat{f}(\xi)) + G(P; \xi, \hat{Y}, -\hat{f})] \cdot \\ & \cdot [\hat{f} \hat{Y}' - f' \hat{Y}] d\xi + \frac{1}{4\pi} \int C^2 g^{-1} [G_{\xi}(P; \xi, Y, f) \\ & + G_{\xi}(P; \xi, Y, -f)] \varphi(\xi, Y, f) \cdot f' d\xi \end{aligned} \quad (26)$$

最后,我们返回到围绕垂直圆柱体 S_R 的积分:

$$\frac{1}{4\pi} \iint [\varphi_R G - \varphi G_R] ds = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-b}^y [\varphi_R G - \varphi G_R] dy \quad (27)$$

在(14)式中已经用过的 φ 的条件并不充分意味着当 $R \rightarrow \infty$ 时, 此积分收敛于零, 很明显, 我们将对 G 必须施加以各种条件, 而在此时, 必须附加以必需的条件以保证在 $R \rightarrow \infty$ 时上述积分为零, 同时, 我们将假定这一点成立, 而且使(20)式中的围线积分的部分取为沿大的圆柱进行, 因此也将为零。

现在, 我们有下列公式:

$$\varphi(x, y, z) = (23) + (20) \quad (28)$$

式中, 围绕船舶的两个线积分合并并简化为(26)式。

如果用长度因子 $l = L/2$ 及速度因子 C 将此表达式无因次化, 则得:

$$\varphi(x, y, z) = Cl \tilde{\varphi} \left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l} \right) = Cl \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

$$G = \frac{1}{l} \tilde{G} \quad (29)$$

在去掉“ $\sim$ ”符号后, 我们得到:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{FP}} [C^2(g/l)^{-1} G_{\xi\xi}(P, \xi, y, \zeta) + G_{\eta\eta}] \varphi(\xi, Y, \zeta) d\xi d\zeta \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{FP}} \left\{ -C^2(g/l)^{-1} [\varphi G_{\xi\eta} + \varphi_{\eta} G_{\xi}] Y_{\xi} + G_{\eta} Y Y_{\xi} \right. \\ & \left. + [Y_{\xi} G_{\xi} + Y_{\xi} G_{\xi}] \varphi - \frac{1}{2} C^2(g/l)^{-1} [\varphi_{\xi}^2 + \varphi_{\eta}^2 + \varphi_{\xi}^2] \cdot G_{\xi} \right\} d\xi d\zeta \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{w_0}} f(\xi', \eta') [G_{\xi}(P, \xi, \eta, f) + G_{\xi}(P, \xi, \eta, -f)] d\xi' d\eta' \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{w_0}} [\varphi(\xi, \eta, f) \{ f_{\xi}/\cos\alpha - f_{\eta}/\sin\alpha \} [G_{\xi}^+ + G_{\xi}^-] \\ & + [f_{\xi}/\sin\alpha + f_{\eta}/\cos\alpha] [G_{\eta}^+ + G_{\eta}^-] - [G_{\xi}^+ - G_{\xi}^-] \} \\ & + Cf(\xi', \eta') [f_{\xi}/\cos\alpha - f_{\eta}/\sin\alpha] [G_{\xi}^+ - G_{\xi}^-]] d\xi' d\zeta' \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{L_P} [G(P, \xi, \hat{Y}, \hat{f}) + G(P, \xi, \hat{Y}, -\hat{f})] \\ & \cdot [\hat{f} \hat{Y}' - \hat{f}' \hat{Y}] d\xi + \frac{1}{4\pi} \int_{L_P} C^2(g/l)^{-1} [G_{\xi}^+ + G_{\xi}^-] \end{aligned}$$

$$\cdot \varphi(\xi, \hat{Y}, f) \hat{f}' d\xi \quad (30)$$

现在我们打算更精确地定义格林函数 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ 的形式, (30) 式中用的变量都是无因次量, 我们假定, 除了 (15) 和 (17) 式之外, G 满足下列条件:

$$C^2(gl)^{-1} G_{\xi\xi}(x, y, z; \xi, 0, \zeta) + G_{\eta\eta}(x, y, z; \xi, 0, \zeta) = 0$$

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} o([\xi^2 + \eta^2]^{-1/2}), & \text{当 } \xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty \text{ 时,} \\ & \text{对于 } \xi < 0, \\ o(1) & \text{对于 } \xi > 0, \text{ 当 } \xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (31)$$

对于 G 的解是熟知的, 可表为下式:

$$\begin{aligned} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = & [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{-1/2} \\ & + [(x - \xi)^2 + (y + \eta + 2h)^2 + (z - \zeta)^2]^{-1/2} \\ & - \frac{4}{\pi} v_0 \int_0^{1/2\pi} d\theta \int_0^\infty \left\{ e^{-k_0 v_0 h} \operatorname{sech} k_0 v_0 h \operatorname{ch} k_0 v_0 (\eta + h) \right. \\ & \cdot [\operatorname{ch} k_0 v_0 (y + h) (k \cos^2 \theta - 1) - 1] \cdot \cos[k v_0 (x - \xi) \cos \theta] \\ & \cdot \cos[k v_0 (z - \zeta) \sin \theta] \cdot [k \cos^2 \theta - \operatorname{th} k_0 v_0 h]^{-1} \Big\} dk \\ & - 4 v_0 \int_{\theta_0}^{\pi/2} \left\{ e^{-k_0 v_0 h} \operatorname{sech} k_0 v_0 h \cdot \operatorname{ch} k_0 v_0 (h + \eta) [\operatorname{ch} k_0 v_0 (y + h) \right. \\ & \cdot (k_0 \cos^2 \theta + 1) - 1] \sin[k_0 v_0 (x - \xi) \cos \theta] \\ & \cdot \cos[k_0 v_0 (z - \zeta) \sin \theta] \Big\} d\theta \end{aligned} \quad (32)$$

式中

$$v_0 = \frac{gl}{C^2}, \quad \theta_0 = \begin{cases} \arccos \sqrt{v_0 h}, & \text{如果 } v_0 h \leq 1 \\ 0 & \text{如果 } v_0 h \geq 1 \end{cases}$$

而其中 $k_0 = k_0(Q)$ 是下列方程的正实根:

$$k_0 - \sec^2 \theta \operatorname{th} k_0 v_0 h = 0 \quad \theta_0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$$

(32) 式中对于 k 的积分必须转化为 $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 的柯西主值积分, 出现的乘积 $v_0 h$ 正好是水深佛氏数, 在有因次的变量中即是 gh/C^2 , 如果液体深度为无穷, 就可以直接得到或从 (32) 式令 $v_0 h \rightarrow \infty$, 得到下列更简单的表达式:

$$\begin{aligned} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = & [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{-1/2} \\ & - [(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{-1/2} \\ & - \frac{4}{\pi} v_0 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty \frac{e^{k v_0 (y + \eta)}}{k \cos^2 \theta - 1} \cos[k v_0 (x - \xi) \cos \theta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \cos[kv_0(z-\zeta)\sin\theta]dk - 4v_0 \int_0^{\pi/2} e^{v_0(y+\eta)\sec^2\theta} \\ & \cdot \sin[v_0(x-\xi)\sec\theta]\cos[v_0(z-\zeta)\sin\theta\sec^2\theta] \sec^2\theta d\theta \end{aligned}$$

式中 $v_0 = gl/C^2$ 如 (32) 式。

注意到在 (32) 和 (33) 中的积分项是 $v_0(x-\xi)$, $v_0(y+\eta)$, $v_0(z-\zeta)$ 的函数, 故与 x 、 y 、 z 、 ξ 、 η 、 ζ 、及 v_0 无关, 并不是象它表达出来的那么复杂。事实上, 对于 (33) 式, 就可以用指数积分表示。令 $H(x, y, z)$ 是所求的函数, 在积分项中 $v_0(x-\xi)$, $v_0(y+\eta)$, $v_0(z-\zeta)$ 用 x , y , z 代换时, 有:

$$\begin{aligned} H(x, y, z) = & -\frac{4}{\pi} v_0 \int_0^{2\pi} \exp\{[y + i(x\cos\theta + z\sin\theta)] \cdot \\ & \cdot \sec^2\theta\} E_1\{-[y + i(x\cos\theta + z\sin\theta)\sec^2\theta] \cdot \sec^2\theta d\theta \end{aligned} \quad (34)$$

(32) 和 (33) 式中 G 函数现在有一个限制场点可能位置的特点, 不仅在 (x, y, z) 处而且在 $(x, -y, z)$ 处有个奇点, (在 $(x, -y-2h, z)$ 处的奇点并不令人烦恼), 因此, 如果 $Y(x, z) > 0$, 且如果 (x, y, z) 点选择得使 $-Y < y < Y$, 则函数 $G-r^{-1}$ 在流体内部是不调合的。除非我们假定:

$$-h < y < -|Y(x, z)| \quad (35)$$

我们在用 (32) 式的同时并不能使用 (16) 式, 然而, 利用此附加条款, 函数 G 就可被定义, 且具有我们所要求的特性, 不仅对流体内的 (ξ, η, ζ) 是如此, 而且对于象 $\eta \leq |Y|$ 以及由船体所包围的体积内的点及其平面 $y=0$ 以上的映射点均是如此。

现在可以证明 (22) 式是被满足的, G , G_L 和 G_R 的渐近特性的研究表明, 对于 $\xi < 0$, 当 $\xi^2 + \zeta^2 \rightarrow \infty$ 时, 全部都是 $0 ([\xi^2 + \zeta^2]^{-1})$, 对于 $\xi > 0$, 全都是 $0 ([\xi^2 + \zeta^2]^{-1/3})$ 。由此式及 (14) 式很容易得出 (28) 式, 且出现在 (20) 式中的沿 S_R 和 S_F 交线的围线积分在 $R \rightarrow \infty$ 时均为零。

在无因次表达式 (30) 式中, 在 $(\xi', \eta') = (0, 0)$ 处的座标是 $1/l = B/L$, 记参数 B/L 为 ε , 用引入船型 $f^{(1)}(\xi', \eta')$ 其中 $f^{(1)}(0, 0) = 1$ 来表示此参数, 即用

$$f(\xi', \eta') = \varepsilon f^{(1)}(\xi', \eta') \quad (36)$$

将 $f^{(1)}$ 与 f 联系起来。

很明显, 函数 φ 、自由表面 Y 、 α 和 ε 的大小以及力和力矩, 将同样取决于参数 ε ,

$$\varphi(x, y, z, \varepsilon), Y(x, z, \varepsilon), \alpha(\varepsilon), e(\varepsilon) \text{ 等等} \quad (37)$$

如果现在要考察一下 (30) 式中包含 f 的积分, 那么除了可能含有 $G_L^+ - G_L^-$ 之外, 很清楚全部都是 $0(\varepsilon)$, 不难看出, 该项同样亦是 $0(\varepsilon)$ 。例如, 如果从 (33) 式出发, 可以很容易证明:

$$\begin{aligned}
& G_L(P; \xi, \eta, f) - G_L(P; \xi, \eta, -f) \\
&= f \cdot \left\{ \frac{1}{r_+^3 - r_-^3} \left[4z^2 \frac{r_+^2 + r_+ r_- + r_-^2}{r_+ + r_-} - (r_+^3 + r_-^3) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r_{1+}^3 + r_{1-}^3} \left[4z^2 \frac{r_{1+}^2 + r_{1+} r_{1-} + r_{1-}^2}{r_{1+} + r_{1-}} - (r_{1+}^3 + r_{1-}^3) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{8}{\pi} v_0^2 \int_0^{\pi/2} \oint_0^\infty \frac{k e^{k v_0 (\gamma + \eta)}}{k_0 \cos^2 \theta - 1} \cos[k v_0 (x - \xi) \cos \theta] \\
&\quad \cdot \cos[k v_0 z \sin \theta] \sin[k v_0 f \sin \theta] dk \\
&\quad + 8 v_0^2 \int_0^{\pi/2} e^{v_0 (\gamma + \eta) \sec^2 \theta} \sin[v_0 (x - \xi) \sec \theta] \\
&\quad \cdot \cos[v_0 y \sin \theta \sec^2 \theta] \sin[v_0 f \sin \theta \sec^2 \theta] d\theta
\end{aligned} \tag{38}$$

式中:

$$\begin{aligned}
r_+^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + f)^2, \\
r_{1+}^2 &= (x - \xi)^2 + (y + \eta)^2 + (z + f)^2 \\
r_-^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - f)^2, \\
r_{1-}^2 &= (x - \xi)^2 + (y + \eta)^2 + (z - f)^2
\end{aligned}$$

但是, φ 本身必须是 $o(\varepsilon)$, 估计与剩下的积分量级一致, 因为, 如果 φ 是 $o(\varepsilon)$, 则据 (6) 式 Y 也是 $o(\varepsilon)$, 接下去注意到, 如果 φ 与 Y 是 $o(\varepsilon)$ 则 (30) 式多数积分是 $o(\varepsilon^2)$ 。事实上, 仅仅是第一和第三项不那么明显而已。不过, 只要 (35) 式被满足, 第一项积分中的被积函数可以展开为一个 Y 的级数。由于内边界条件 (31) 式, 第一项是零, 故此积分也是 $o(\varepsilon^2)$ 剩下了第三项积分。虽说现在此项可以保持原样, 但是也可以采用将其分解一个 $o(\varepsilon)$ 和剩下的 $o(\varepsilon^2)$ 两个部分的方法简化之。如果我们现在设 α 和 e 均为 $o(\varepsilon)$, 并利用 (2) 式, 可得:

$$G_L(P; \xi, \eta, f) + G_L(P; \xi, \eta, -f) = 2 G_L(P; \xi', \eta', 0) + o(\varepsilon^2) \tag{39}$$

而且, 在 S_{w0} 和 S_0 之间的对称差*的面积也是 $o(\varepsilon^2)$, S_0 是 S_{w0} 在船舶静浮时的值, 因此, 如果用在 S_0 上代替在 S_{w0} 上的积分, 则其误差是 $o(\varepsilon^2)$, 最后可以得到古典薄船理论的结果。

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{S_0} f(\xi', \eta') G_L(x, y, z; \xi', \eta', 0) \\
&\quad \cdot d\xi' d\eta' + o(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{40}$$

由 (30) 式还可以得出另外的信息, 例如, 有时可以断言, (40) 式的近似不仅需要 f (如果再引入因次量, 就是 f/L) 是小量, 而且需要 $f_{\xi'}$, $f_{\eta'}$, 也是小量。只要 f 是有界的, 根据

注: * 在综合论的符号中, 这就是 $S_{WP} + S_0 - S_{WP} \times S_0$