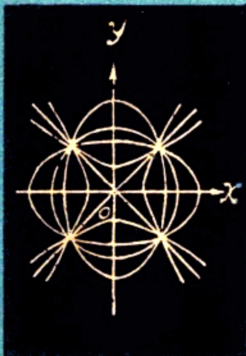


中学数学综合题选编

下册

N.K.S.

广州市教育局教研室编

ONGXUE·SHUXUE ZONGHETI XUANBIAN

中学数学综合题选编

下　　册

广州市教育局教研室编

目　　录（下册）

第二部分　平几与立几　（續）

二、计　算　题

（1）平几计算题

例1.　在△ABC中，∠A＝45°，AD为BC边上的高，BD＝2Cm，DC＝3Cm，求这个三角形的面积。

解法一：

作CE⊥AB，则∠ACE＝∠A＝45°。

∴　AE＝EC。

又　∠BAD＝90°－∠ABC＝∠ECB，

∴　∠Rt△AEP≌Rt△CEB，

∴　AP＝BC＝5。

作　△ABC的外接园，延长AD交外接园于F，连FC。

∵　∠ABC＝∠AFC，　∴　∠BCE＝∠BCF，

∴　PD＝DF，

根据园幂定理，有　AD·DF＝BD·DC

即　（5＋PD）·PD＝2·3

解之，得　PD＝1。　（负值舍去）

∴　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=15\,(Cm^2)$。

解法二：

设　AB＝x，AC＝y．　又∵　BC＝5，

根据余弦定理和勾股定理，可建立方程组

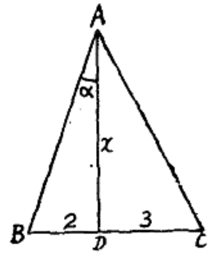
$$\begin{cases} 5^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos45^\circ \\ x^2 - 2^2 = y^2 - 3^2 \end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases} x = 2\sqrt{10} \\ y = 3\sqrt{5} \end{cases}$ （负值舍去）

$\therefore\quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin45^\circ = 15$（$Cm^2$）。

解法三：

设 $AD = x$，$\angle BAD = \alpha$，则 $\angle CAD = 45^\circ - \alpha$。



根据三角函数关系，有

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} = \mathrm{tg}\alpha \\ \dfrac{3}{x} = \mathrm{tg}(45^\circ - \alpha) \end{cases}$$

$\because\quad \mathrm{tg}(45^\circ - \alpha) = \dfrac{1 - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\alpha}$，

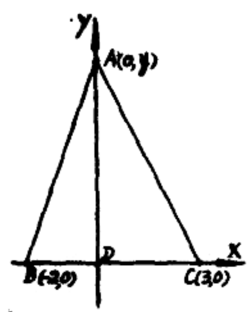
解上述方程组，消去$\mathrm{tg}\alpha$， 求得$x = 6$。（负值舍去）

$\therefore\quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = 15$（$Cm^2$）。

解法四：

以D为原点，BC为x轴，AD为 y 轴，建立直角坐标系。

则各点的坐标为A（$0, y$）、B（$-2, 0$）、C（$3, 0$）。



$\therefore\quad K_{AC} = -\dfrac{y}{3}$，$K_{AB} = \dfrac{y}{2}$。

根据两直线交角公式，有

$$\mathrm{tg}45^\circ = \frac{\dfrac{y}{2} - \left(-\dfrac{y}{3}\right)}{1 + \dfrac{y}{2} \cdot \left(-\dfrac{y}{3}\right)},$$

解之，得　$y=6$。　　（负值舍去）

$\therefore\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=15\,(Cm^2)$。

本题选取的四种不同解法，反映了几何题的几种主要的解题方法。解法一是用综合几何的方法。它的主要特点是在研究图形的性质，例如，证明线段或角的相等或不等关系时，常用比较法（有时也有适当的计算）。用比较法往往要通过设置辅助线，使图形的条件（已知及未知）较为集中并易于发生联系以便进行比较。因此设置辅助线是很重要的，但往往也较为困难。解法二、三，主要是通过建立代数方程组或三角方程组求解。类似这种用代数方法或三角方法去论证或计算几何命题，往往是借助已建立的几何（或三角）公式或定理，并利用代数（或三角）的恒等变换替代某些几何的推证过程，从而使证明或计算过程简化，（如本例，可省去作辅助线），这种代数法或三角法解题，特别在几何命题中涉及线段、角度、面积、体积、极值等问题时，应用较多。解法四，是用解析几何的方法（亦称解析法或坐标法）。这种方法，通过恰当的建立坐标系，把图形性质的有关问题，转化为点的坐标的数量关系的问题，再借助代数的或三角的方法进行推证或计算。上述各种方法的灵活运用及较简法的选择，请读者通过后面的例题和练习，进一步作研究和比较。

例2.　等腰$\triangle ABC$中，底角B的角平分线与AC相交于D，且$BC=AD+BD$，求顶角A。

解法一：

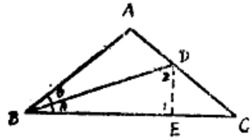
在BC上截$BE=BD$，连DE。

由$BE+EC=BD+AD$，

$\therefore\quad AD=EC$。

又$\because$ BD是$\angle B$的平分线，

$\therefore\quad \dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AB}{BC}$，



即 $\dfrac{EC}{AB}=\dfrac{DC}{BC}$，

$\angle ECD=\angle ABC$，

$\therefore\quad \triangle DCE\backsim\triangle CBA$，

$\angle C=\angle EDC=\angle B$，　设$\angle B=2\theta$，

则 $\angle 1=\angle 2=\angle C+\angle EDC=2\angle B=4\theta$，

$\because\quad \angle 1+\angle 2+\angle\theta=180°$，　$\therefore\quad \theta=20°$

$\therefore\quad \angle A=\angle DEC=180°-\angle 1=100°$。

解法二：根据正弦定理，

由$\triangle ABC$，可得$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，　（1）

由$\triangle ABD$，可得$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AD}{\sin\dfrac{B}{2}}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，

$\because\quad AB=AC$，$BD+AD=BC$，$\angle ADB=\dfrac{B}{2}+C=\dfrac{3}{2}B$，

$\therefore\quad \dfrac{BC}{\sin A+\sin\dfrac{B}{2}}=\dfrac{AC}{\sin\dfrac{3}{2}B}$，　（2）

由(1)，(2)得 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sin A+\sin\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{3B}{2}}$。

又$\because\quad A=\pi-2B$，

$\therefore\quad \sin A=\sin(\pi-2B)=\sin 2B$，

故得 $\sin 2B\cdot\sin\frac{3B}{2}=\sin B\left(\sin 2B+\sin\frac{B}{2}\right)$，

$\because$ $\sin B\neq 0$，两边同时除以sinB，得

$2\cos B\cdot\sin\frac{3B}{2}=\sin 2B+\sin\frac{B}{2}$，

$\sin\frac{5B}{2}-\sin 2B=0$，　　$2\cos\frac{9B}{4}\sin\frac{B}{4}=0$。

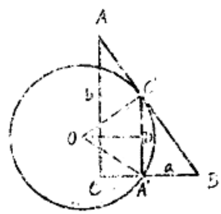
由 $\cos\frac{9B}{4}=0$ 得 $B=\frac{2\pi}{9}$ （B取锐角），

由 $\sin\frac{B}{4}=0$ 得 $B=0°$ （不合），

$\therefore$ $A=\pi-2B=\frac{5}{9}\pi$。

例3. 给定直角$\triangle ABC$，其中C为直角，过BC的中点作一个园切AB边于AB的中点，若已知$AC=b$，$BC=a$，求该园的面积。

解法一，如图，O为过BC的中点A'而切AB于中点C'的园的园心，连OA'，OC'，$A'C'$，设D为$A'C'$的中点，



则$A'C'\underline{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}AC$，$\angle BC'A'=\angle A$。

又$\angle BC'A'=\frac{1}{2}\angle C'OA'$，

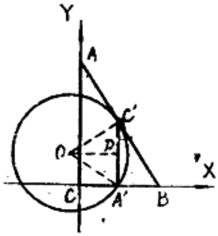
$\therefore$ $Rt\triangle ABC\sim Rt\triangle OC'D$，

$\therefore$ $\frac{OC'}{AB}=\frac{C'D}{CB}$，而$AB=\sqrt{a^2+b^2}$，$C'D=\frac{1}{4}b$，

$\therefore$ $OC'=\frac{b}{4a}\sqrt{a^2+b^2}$，

$\therefore$ $S_{\odot O}=\pi\cdot OC'^2=\frac{\pi b^2}{16a^2}(a^2+b^2)$。

解法二，如图，取C为坐标原点，CB，CA为x、y轴，则各点的坐标为$B(a,o)$、$A(o,b)$、



$A'(\frac{a}{2},\ o)$、$C'(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2})$、

$D(\frac{a}{2},\ \frac{b}{4})$。

$\because$ $OD \parallel CB$，设O点坐标为

$(x_o,\ \frac{b}{4})$

又$\because$ $OC' \perp AB$，　$\therefore$ $K_{OC'} \cdot K_{AB} = -1$，

即 $\dfrac{-\frac{b}{4}}{x_o - \frac{a}{2}} \cdot \dfrac{b}{-a} = -1$

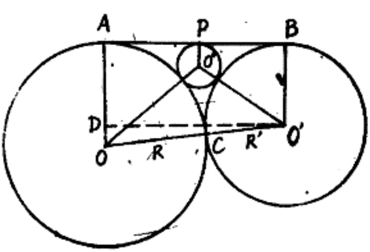
由此求得　$x_o = \dfrac{2a^2 - b^2}{4a}$

$\therefore$ $V^2 = (x_o - \frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{4})^2 = \dfrac{b^2}{16a^2}(a^2 + b^2)$，

$\therefore$ $S_{\odot o} = \pi r^2 = \dfrac{\pi b^2}{16a^2}(a^2 + b^2)$。

例4. $\odot o$和$\odot o'$外切于C，半径分别为R和R'，其外公切线分别切两园于A、B，试求与$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{BC}$及线段AB都相切的第三个园的面积。

解： 设第三个园的园心为O''，半径为r。



$\because$ $\odot o$、o'、o''互相外切，

$\therefore$ $oo' = R + R'$，

$oo'' = R + r$，

$o'o'' = R' + r$。

过O'作$O'D\perp OA$，垂足为D，

则 $AB=O'D=\sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2}=2\sqrt{RR'}$，

同理求得$AP=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$，

$BP=2\sqrt{R'r}$，

$\because$ $AB=AP+PB$

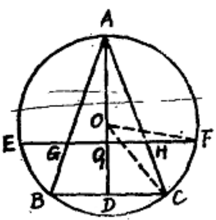
$\therefore$ $2\sqrt{RR'}=2\sqrt{Rr}+2\sqrt{R'r}$，

解之，得 $r=\dfrac{RR'}{R+R'+2\sqrt{RR'}}=\dfrac{RR'(\sqrt{R}-\sqrt{R'})^2}{(R-R')^2}$，

$\therefore$ $S_{\odot o''}=\pi r^2=\dfrac{\pi R^2R'^2(\sqrt{R}-\sqrt{R'})^4}{(R-R')}$。

若⊙o和⊙o′相离，且$oo'=a$，则本题结论为何？

例5. 在半径长为r的园内有一个底边上的高等于h的内接等腰三角形，这个园的一条弦和这等腰三角形的底边平行，而被它的两腰三等分，求这条弦的长，又当底边多大时，这条弦长最大？最大值是多少？



解： $\because$ 等腰△ABC底边上的高 AD 必过其外接园园心O，连OF、OC。

设 $O_1H=x$，$DC=y$，

则 $O_1F=3x$，$EF=6x$，

而 $y=\sqrt{OC^2-OD^2}=\sqrt{r^2-(h-r)^2}=\sqrt{2hr-h^2}$，

又$\because$ $EF\parallel BC$

$\therefore$ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{AO_1}{AD}$，即 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{r+oo_1}{h}$（也可考虑$\dfrac{x}{y}=\dfrac{r-oo_1}{h}$）

$\therefore$ $OO_1=\dfrac{hx-yr}{y}$。

在$Rt\triangle OO_1F$中，$\because$ $OF^2 = OO_1{}^2 + O_1F^2$，

$$\therefore\ r^2 = \left(\frac{hx - yr}{y}\right)^2 + (3x)^2$$

整理，得 $(9y^2 + h^2)x^2 - 2rhyx = 0$

$$\because\ x \neq 0 \qquad \therefore\ x = \frac{2rhy}{9y^2 + h^2} = \frac{r\sqrt{2hr - h^2}}{9r - 4h},$$

$$\therefore\ EF = 6x = \frac{6r\sqrt{2hr - h^2}}{9r - 4h}。$$

显然，当$OO_1 = 0$时，EF取得最大值$2r$，

即要 $hx - ry = 0$，这时 $x = \frac{2r}{6} = \frac{r}{3}$，$y = \frac{hx}{r} = \frac{h}{3}$，

$\therefore$ 当底边 $BC = 2y = \frac{2}{3}h$时，弦长EF取得最大值$2r$。

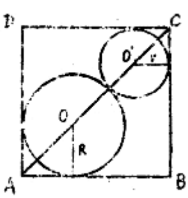
另法：本题可用解析法求解，读者可研究，如何建立坐标系较简。

例6. $ABCD$是边长为a的正方形，在正方形内，有互相外切的二圆，$\odot O$与$\odot O'$，且$\odot O$与AB、AD两边相切，$\odot O'$与CB、CD两边相切，

（1）当两圆半径各是多少时，两圆面积之和取得最小值？取得最大值？

（2）若正方形改为矩形，其较短一边仍为a，得什么结果？为什么？

解(1)设$\odot O$半径为R，$\odot O'$半径为r。



$\because$ $OA = \sqrt{2}R$，$O'C = \sqrt{2}r$，

$AC = \sqrt{2}a$。

$\therefore$ $\sqrt{2}R + \sqrt{2}r + R + r = \sqrt{2}a$，

$\therefore$ $R + r = (2 - \sqrt{2})a$。

设两圆面积之和为S，

$\because\quad S=\pi R^2+\pi r^2=\pi(R^2+r^2)$

$$=\frac{1}{2}\pi[(2-\sqrt{2})^2a^2+(R-r)^2],$$

$\therefore$ 当$R=r$时，S取得最小值，

此时，$S_{最小值}=\frac{1}{2}\pi(6-4\sqrt{2})a^2=(3-2\sqrt{2})\pi a^2$。

而 $R=r=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})a=a-\frac{\sqrt{2}}{2}a$。

又$\because$ 要S取得最大值必须r最小，

但 $R_{最大值}=\frac{1}{2}a$，（⊙o成为正方形内切园）

这时，$r_{最小值}=(2-\sqrt{2})a-R=(\frac{3}{2}-\sqrt{2})a$，

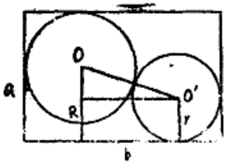
$\therefore\ S_{最大值}=\pi[(\frac{1}{2}a)^2+(\frac{3}{2}-\sqrt{2})^2a^2]$

$$=\frac{9-6\sqrt{2}}{2}\pi\cdot a^2。$$

如果R取得最小值，r取得最大值，仍得同样结论。

(2)设矩形较长的一边为b，⊙o和⊙o′的半径为R和r。

1°，当$a<b<2a$时，



如图，根据勾股定理，有

$(R+r)^2=[a-(R+r)]^2+[b-(R+r)]^2$ 整理，得

$(R+r)^2-(2a+2b)(R+r)+a^2+b^2=0$

解之，得 $R+r=a+b-\sqrt{2ab}$，（$a+b+\sqrt{2ab}$ 不合）

$\therefore$ 两圆面积之和$S=\pi R^2+\pi r^2$

$$=\frac{1}{2}\pi[(R+r)^2+(R-r)^2]$$

$$=\frac{1}{2}\pi[(a+b-\sqrt{2ab})^2+(R-r)^2]$$

当 $R=r$ 时，$S_{最小值}=\frac{1}{2}\pi(a+b-\sqrt{2ab})^2$，

当 r 取得最小值，S 有最大值，

但∵ $R_{最大值}=\frac{1}{2}a$，　∴ $r_{最小值}=\frac{1}{2}a+b-\sqrt{2ab}$.

$$\therefore S_{最大值}=\frac{1}{2}\pi[(a+b-\sqrt{2ab})^2+(\sqrt{2ab}-b)^2]$$

$$=\frac{1}{2}\pi(a^2+2b^2+6ab-2a\sqrt{2ab}-4b\sqrt{2ab})。$$

2°，当 $b=2a$ 时，

$$R=r=\frac{1}{2}a，$$

两园面积之和为定值。（$S=\frac{1}{2}\pi a^2$）

3°，当 $b<2a$ 时，

两园相离，本题无解。

练　习

1、三角形三边长为10，6，8，其较大锐角的角平分线把原三角形分成两个三角形，求这两个三角形中较大的那一个三角形的面积。

答：较大的一个三角形面积为15。

2、三角形ABC的面积为$10\sqrt{3}$，周长为20，∠A为60°，求三角形三边的长，外接园和内切园的半径。

略解：据题意，有

$$\begin{cases} \frac{1}{2}bc\sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \\ a+b+c=20 \\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ \end{cases}$$

求得三边长为7、5、8或7、8、5。

用正弦定理$\frac{a}{\mathrm{Sin}A}=2R$，求得外接园半径为$\frac{7\sqrt{3}}{3}$，

再用半角公式 $\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}$

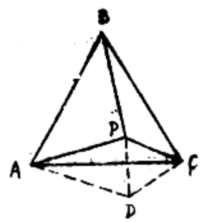
或 $r=\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{S}$

求得内切园半径为$\sqrt{3}$。

3、等腰梯形ABCD的两底AB、CD的距离为12，AB = 10，CD = 8，R在等腰梯形的对称轴上，且使∠CRB = 90°，求R到AB的可能距离？

答：R到AB的距离是10或2。

4、若P是等边△ABC内的一点，且PA = 4，PB = 5，PC = 3，求等边△ABC的面积。



略解：如图，作等边△PCD，连AD，

则 ∠PCD − ∠PCA = ∠BCA − ∠PCA，

∴ △BPC≌△ADC

由 AD = 5，AP = 4，PD = 3，

∴ ∠APD = 90°，∠APC = 150°，

∴ $AC^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos150^\circ=25+12\sqrt{3}$，

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC^2\mathrm{Sin}60^\circ=9+\frac{25}{4}\sqrt{3}$。

另解：设AC为x，$\angle BCP$为α，

据余弦定理，有

$$\begin{cases} 25 = 9 + x^2 - 6x\cos\alpha \\ 16 = 9 + x^2 - 6x\cos(60^\circ - \alpha) \end{cases}$$

解之，得　$x^2 = 25 \pm 12\sqrt{3}$　（$25 - 12\sqrt{3}$应舍去）。

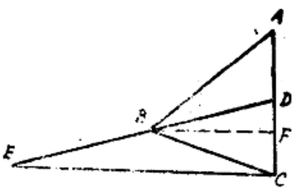
5、在$\triangle ABC$中，$BC = 13$，$AC = 14$，$AB = 15$，$\angle B$的平分线BD延长后与过C而垂直于AC的直线交于E，求线段CE的长。

略解：过B作$BF \perp AC$，交AC于F，利用三斜求高公式，

可求得，　$BF = \frac{2}{14}\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-10)} = 12$

$\because$　BD是$\angle B$的平分线，

$\therefore$　$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$，



利用合比定理，

求得$DC = 6\frac{1}{2}$，

解直角三角形BFC，求得$FC = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$，

又$\because$　$BF \parallel EC$，　$\therefore$　$\frac{EC}{BF} = \frac{CD}{DF}$，

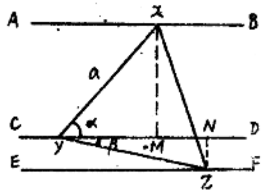
从而求得　$EC = 52$。

6、$\angle O$是直角，在$\angle O$的一边上取A，C两点，另一边上取B、D两点，AB、CD相交于E，若$OA = OD = 6Cm$，$OC = 9Cm$，$OB = 8Cm$，求OE?

答：$OE = 5Cm$。

7、在同一平面内，$AB \parallel CD \parallel EF$，CD在AB、EF之间，且CD和AB、EF的距离分别为4Cm和1Cm，有一等边三

角形xyz的顶点x、y、z分别在AB、CD、EF上，求$\triangle xyz$的面积。



略解：如图，设$xy=a$，

$\angle xyD=\alpha$，$\angle Dyz=\beta$，

由于 $\sin\alpha=\sin(60^\circ-\beta)=\sin60^\circ\cdot\cos\beta-\cos60^\circ\cdot\sin\beta$，

而 $\sin\alpha=\dfrac{xM}{xy}=\dfrac{4}{a}$，$\sin\beta=\dfrac{Nz}{yz}=\dfrac{1}{a}$，

$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-1}$，

$\therefore\quad \dfrac{4}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a}$，

解之，得 $a^2=28$。

$\therefore\quad S_{\triangle xyz}=\dfrac{1}{2}a^2\cdot\sin60^\circ=7\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$。

8. K是△ABC内一点，连AK交BC于E，连BK交AC于F，连CK交AB于D。

(1)试证 $\dfrac{KE}{AE}+\dfrac{KF}{BF}+\dfrac{KD}{CD}=1$，

(2)如果 AK：KE＝3：2，BK：KF＝4：1，

求CK：KC。

提示：(1)过A、K分别作BC边上的高，

可证$\dfrac{KE}{AE}=\dfrac{S_{\triangle KBC}}{S_{\triangle ABC}}$。

(2)利用(1)的结论。

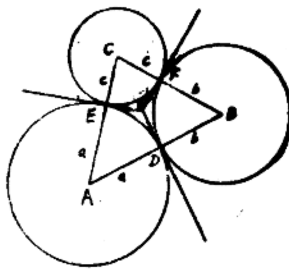
答：CK：KD＝3：2。

9. 设⊙A，⊙B和⊙C两两外切，它们的半径分别为a、b、c，三条内公切线，相交于一点P，求P点到各切点的距离。

略解：如图，连PA，

求得 $PE=PD=PF=a\,\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}$

而 $\cos A=\dfrac{(a+c)^2+(a+b)^2-(b+c)^2}{2(a+c)(a+b)}$



$$=\frac{a(a+b+c)-bc}{a(a+b+c)+bc},$$

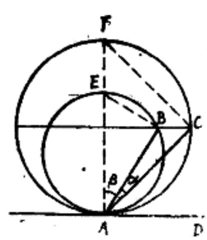
$$\therefore\quad \frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{bc}{a(a+b+c)},$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{bc}{a(a+b+c)}},$$

由此，P到各切点的距离可求出。

答：P到各切点的距离是$\sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}}$。

10．半径R和r的两园内切且都与直线AD切于A，直线BC||AD交两园于点B和点C，求△ABC外接园的半径。



解：设$\angle CAB=\alpha$，$\angle BAF=\beta$，

则 $\angle ACB=90°-(\alpha+\beta)$，

$\angle ABC=90°+\beta$，

设所求的半径为x，

$$\because\quad \frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(90°+\beta)}=\frac{AB}{\sin[90°-(\alpha+\beta)]}=2x,$$

即 $$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\cos\beta}=\frac{AB}{\cos(\alpha+\beta)}=2x,$$

在直角△ACF和△ABE中

$\because\quad AC=2R\cos(\alpha+\beta)$，$AB=2r\cos\beta$，