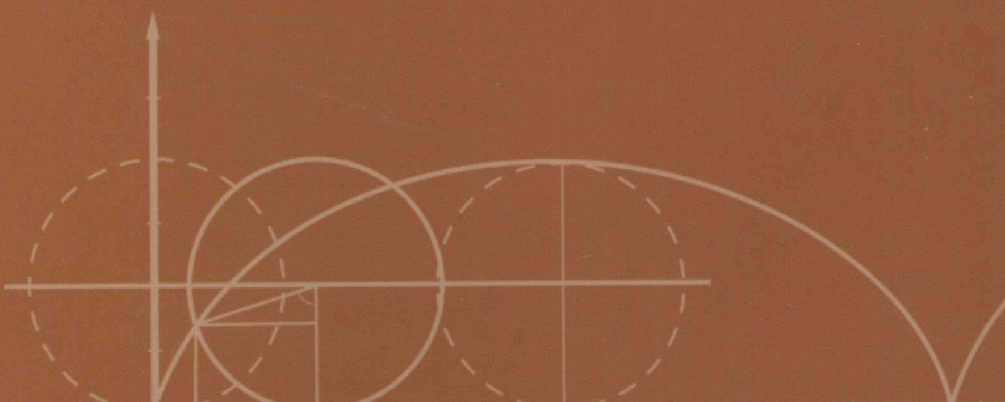
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

数学

普通高中课程标准实验教科书

选修 4-4

坐标系与参数方程



凤凰国标教材

凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

ISBN 7-5343-6797-2

9 787534 367977 >

ISBN 7－5343－6797－2
G·6482 定价:2.55 元

批准文号：苏价费[2006]160 号 举报电话：12358

经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

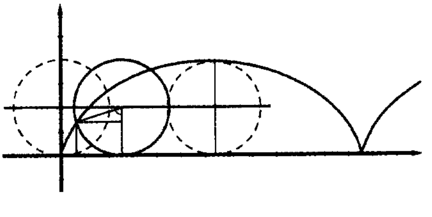
坐标系与参数方程

zuobiaoxi yu canshufangcheng

选修4-4

主　编：单　墫

副主编：李善良　陈永高　王巧林



凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书·数学
书　　名　坐标系与参数方程(选修4-4)
作　　者　本书编写组
责任编辑　蔡　立
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市马家街31号210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷　江苏新华印刷厂
厂　　址　南京市张王庙88号(邮编210037)
电　　话　025-85521756
开　　本　1000×1436毫米　1/32
印　　张　2
版　　次　2005年6月第1版
　　　　　2006年6月第3次印刷
书　　号　ISBN　7-5343-6797-2/G·6482
定　　价　2.55元
批发电话　025-83260760,83260768
邮购电话　025-85400774,8008289797
短信咨询　10602585420909
E-mail　jsep@vip.163.com
盗版举报　025-83204538

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

编写人员　仇炳生

参与设计　李善良　陈光立

责任编辑　蔡　立

几何学主要是研究空间图形的形状、大小和位置关系.解析几何将坐标方法引进几何图形的研究,把“形”和“数”有机的结合起来,使几何学的研究变得更加精确、深刻,开创了几何学研究的新篇章.我们曾经运用坐标方法成功的研究了椭圆、双曲线及抛物线等二次曲线的性质.然而,客观世界中丰富多彩的曲线仍然令我们目不暇接.

2004年雅典奥运会闭幕式上由麦穗组成的螺线,展示了人与自然的和谐以及人们获得丰收的喜悦,螺线的运动更是充满了生命的活力.

神舟五号飞船遨游太空时,它的飞行轨道是一个椭圆.当飞船完成预定任务离开轨道返回地球时,它又在太空中留下一条人类征服自然的痕迹.

凸轮、齿轮等机械零件,由于它们的轮廓线采用了不同类型的曲线,在传动自动化方面具有不同的功能.

美丽的四叶玫瑰线、摆线……又把我们带进一个美妙的曲线世界.

怎样拓展坐标系,运用多种代数形式刻画客观世界中丰富多彩的几何图形呢?

目　　录

4.1 坐标系

为了确保宇宙飞船能在预定轨道上运行，并在按计划完成科学考察任务后，安全、准确的返回地球，从火箭升空的时刻开始，需要随时测定飞船在空中的位置及其运动的轨迹.

运动会的开幕式上常常有大型团体操的表演，其中不断变化的背景图案是由看台上座位排列整齐的人群不断翻动手中的一本画布构成的.要出现正确的背景图案，需要确定不同的画布所在的位置.

刻画一个几何图形的位置，需要设定一个参照系，即以参照系为标准确定它的相对位置. 参照系不同，表示几何图形位置的方式也不同.

坐标系就是一个参照系，它是实现几何图形与代数形式互相转化的基础.

如何创建坐标系呢？

4.1.1 直角坐标系

我们知道，在直线上，当取定一个点为原点，并确定了度量单位和直线的方向，就建立了数轴(即直线的坐标系). 它使直线上任意一点 P 都可以由惟一的实数 x 确定.

在平面上，当取定两条互相垂直的直线的交点为原点，并确定了度量单位和这两条直线的方向，就建立了平面直角坐标系. 它使平面上任意一点 P 都可以由惟一的有序实数对 (x, y) 确定(如图 4-1-1(1)).

在空间中，选择两两垂直且交于一点的三条直线. 当取定这三条直线的交点作为原点，并确定了度量单位和这三条直线的方向，就建立了空间直角坐标系. 它使空间任意一点 P 都可以由惟一的三元有序实数组 (x, y, z) 确定(如图 4-1-1(2)).

建立坐标系是为了确定点的位置. 因此，在所创建的坐标系中，应满足：**任意一点都有确定的坐标与它对应；反之，依据一个点的坐标就能确定这个点的位置.**

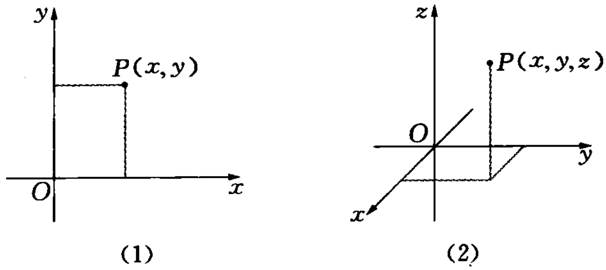


图 4-1-1

在数轴上，直线上所有点的集合与全体实数的集合建立一一对应；在平面直角坐标系中，平面上所有点的集合与全体有序实数对(x, y)的集合建立一一对应；在空间直角坐标系中，空间所有点的集合与全体由三个实数组成的有序实数组(x, y, z)的集合建立一一对应.

确定点的位置就是求出这个点在设定的坐标系中的坐标.

例 1 选择适当的平面直角坐标系，表示边长为 1 的正六边形的顶点.

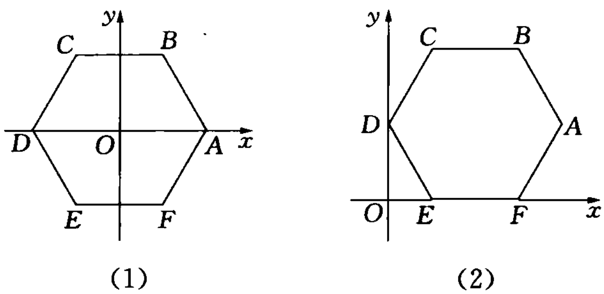


图 4-1-2

解 建立如图 4-1-2(1)所示的坐标系，得正六边形的顶点坐标分别为

$$A(1, 0), B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), D(-1, 0), E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

也可建立如图 4-1-2(2)所示的坐标系，得正六边形的顶点坐标分别为

$$A\left(2,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ B\left(\frac{3}{2},\ \sqrt{3}\right),\ C\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{3}\right),\ D\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ E\left(\frac{1}{2},\ 0\right),$$

$$F\left(\frac{3}{2},\ 0\right).$$

坐标系对于每一个问题仅具有相对意义. 只要能够简捷地表示点的位置，并且有利于对它的继续研究，我们既可以将坐标系设定在不同的位置，也可以建立其他的坐标系. 如图 4-1-2(1) 中，边长为 1 的正六边形的六个顶点到它的中心 O 的距离都等于 1，即它们都在以 O 为圆心的单位圆上，仅是相对于点 O 的方位不同. 因此，正六边形的六个顶点的位置，也可以通过它们到点 O 的距离以及它们相对于点 O 的方位来刻画，即用“距离和方向”确定点的位置. 若取 O 点为计算距离的基准点，Ox 为计算角的始边. 在确定长度单位后，就创建了一个新的坐标系. 我们约定，坐标 $P(r,\ \theta)$ 中，r 表示 OP 的距离，θ 表示以 Ox 为始边，OP 为终边按逆时针计算的角. 在新坐标系中，正六边形的顶点坐标分别为

$$A(1,\ 0),\ B\left(1,\ \frac{\pi}{3}\right),\ C\left(1,\ \frac{2\pi}{3}\right),\ D(1,\ \pi),\ E\left(1,\ \frac{4\pi}{3}\right),\ F\left(1,\ \frac{5\pi}{3}\right).$$

例 2 已知 B 村位于 A 村的正西方向 1 公里处，原计划经过 B 村沿着北偏东 60°的方向埋设一条地下管线 m. 但在 A 村的西北方向 400 米处，发现一古代文物遗址 W. 根据初步勘察的结果，文物管理部门将遗址 W 周围 100 米范围划为禁区. 试问：埋设地下管线 m 的计划需要修改吗？

分析 解决这一问题的关键，在于确定遗址 W 与地下管线 m 的相对位置. 如图 4-1-3，以 A 为原点，正东方向和正北方向分别为 x 轴和 y 轴的正方向，建立平面直角坐标系. 只要求出点 W 与直线 m 的距离，则问题即可解决.

解 建立如图 4-1-3 所示的平面直角坐标系，则 $A(0,\ 0)$，$B(-1\,000,\ 0)$.

由 W 位于 A 的西北方向及 $|AW|=400$，得 $W(-200\sqrt{2},\ 200\sqrt{2})$.

由直线 m 过 B 点且倾斜角为 $90°-60°=30°$，得直线 m 的方程是

$$x-\sqrt{3}y+1\,000=0.$$

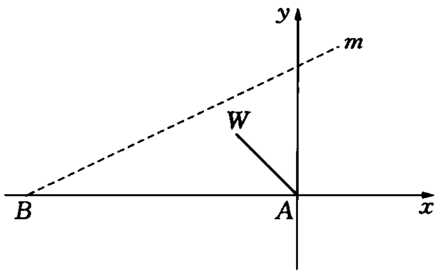


图 4-1-3

于是，点 W 到直线 m 的距离为

$$\frac{|-200\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot 200\sqrt{2}+1\,000|}{2}=100\cdot(5-\sqrt{2}-\sqrt{6})\approx 113.6>100,$$

所以，埋设地下管线 m 的计划可以不修改.

例3 已知点 $Q(a,\ b)$，分别按下列条件求出点 P 的坐标：

(1) P 是点 Q 关于点 $M(m,\ n)$ 的对称点；

(2) P 是点 Q 关于直线

$$l:\ x-y+4=0$$

的对称点(Q 不在直线 l 上).

解 设点 P 的坐标为 $(x,\ y)$.

(1) 由题意，M 是 PQ 的中点，

因此 $\begin{cases}x+a=2m,\\ y+b=2n,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2m-a,\\ y=2n-b.\end{cases}$

所以点 P 的坐标为 $(2m-a,\ 2n-b)$.

(2) 由题意，PQ 的中点在 l 上，且 $PQ\perp l$，因此有

$$\begin{cases}\dfrac{x+a}{2}-\dfrac{y+b}{2}+4=0,\\[2ex] \dfrac{y-b}{x-a}\cdot 1=-1.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = b - 4, \\ y = a + 4. \end{cases}$

因为 Q 不在直线 l 上，所以 $x - a = b - 4 - a \neq 0$.

所以点 P 的坐标为 $(b-4, a+4)$.

4.1.2 极坐标系

在自动化生产中，常常利用凸轮控制机器的传动，凸轮的轮廓线上的点 M 的位置，由点 M 到凸轮孔心 O 的距离 OM 以及凸轮转过的角 $\angle AOM$ 确定(如图 4-1-4).

军舰巡逻在海面上，发现前方有一群水雷，如何确定它们的位置以便将它们引爆?

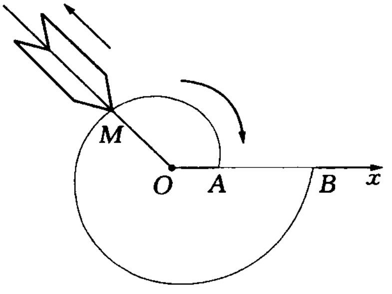
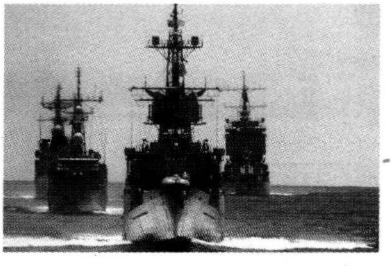


图 4-1-4



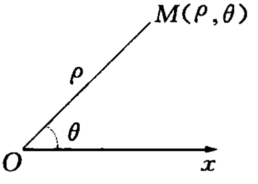


图 4-1-5

在上述问题中，若采用直角坐标系，不仅坐标轴难以选择，而且点的坐标也不便测定.

为了简便地表示上述问题中点的位置，应创建怎样的坐标系呢?

在凸轮问题中，设

$$OM=\rho,\ \angle AOM=\theta.$$

取射线 OA 为角的始边，采用距离 ρ 和角 θ 为坐标建立坐标系，则点 M 的位置可以表示为 $(\rho,\ \theta)$. 类似地，我们可以取军舰所在位置为定点 O，军舰的航向 OA 为角的始边，采用距离 ρ 和角 θ 为坐标建立坐标系，则水雷的位置也可以表示为 $(\rho,\ \theta)$.

一般地，在平面上取一个定点 O，自点 O 引一条射线 OX，同时确定一个长度单位和计算角度的正方向（通常取逆时针方向为正方向），这样就建立了一个极坐标系(polar coordinates system). 其中，点 O 称为极点(pole)，射线 OX 称为极轴(polar axis)（如图 4-1-5).

设 M 是平面上任一点，ρ 表示 OM 的长度，θ 表示以射线 OX 为始边，射线 OM 为终边所成的角. 那么，有序数对 $(\rho,\ \theta)$ 称为点 M 的极坐标. 显然，每一个有序实数对 $(\rho,\ \theta)$ 决定一个点的位置. 其中，ρ 称为点 M 的极径(radius vector)，θ 称为点 M 的极角(polar angle).

由极径的意义可知 $\rho\geqslant 0$. 当极角 θ 的取值范围是 $[0,\ 2\pi)$ 时，平面上的点（除去极点）就与极坐标 $(\rho,\ \theta)$ $(\rho\neq 0)$ 建立一一对应的关系. 我们约定，极点的极坐标是极径 $\rho=0$，极角 θ 可取任意角.

例 1 写出图 4-1-6 中各点的极坐标

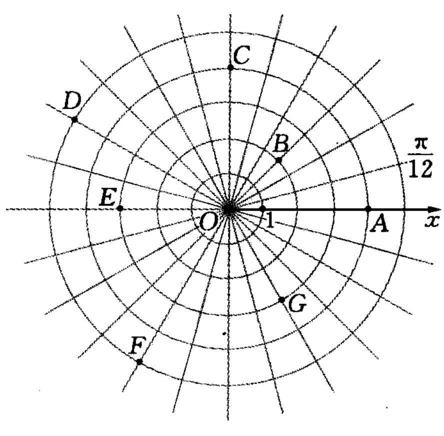


图 4-1-6

解 图中各点的极坐标分别为

$$A(4,\ 0),\ B\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right),\ C\left(4,\ \frac{\pi}{2}\right),\ D\left(5,\ \frac{5\pi}{6}\right),\ E(3,\ \pi),\ F\left(5,\ \frac{4\pi}{3}\right),$$

$G\left(3,\ \frac{5\pi}{3}\right)$.

为了研究方便，在极坐标系中，极径 ρ 允许取负值，极角 θ 也可以取任意的正角或负角. 当 $\rho<0$ 时，点 $M(\rho,\ \theta)$ 位于极角终边的反向延长线上，且 $OM=|\rho|$. 例如，在例 1 中，点 B 的极坐标也可以表示为

$$\left(2,\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\text{或}\left(-2,\ \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)\ (k\in\mathbf{Z}).$$

一般地，如果 $(\rho,\ \theta)$ 是点 M 的极坐标，那么

$$(\rho,\ \theta+2k\pi)\text{ 或}(-\rho,\ \theta+(2k+1)\pi)\ (k\in\mathbf{Z})$$

都可以作为点 M 的极坐标. 但这样建立的极坐标系，平面上的点与它的极坐标之间就不是一一对应关系.

例 2 在极坐标系中，

(1) 已知两点 $P\left(5,\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $Q\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)$，求线段 PQ 的长度；

(2) 已知点 M 的极坐标为 $(\rho,\ \theta)$，且 $\theta=\frac{\pi}{3}$, $\rho\in\mathbf{R}$，说明满足上述条件的点 M 的位置.

解 (1) P, Q 在过极点且与极轴成 $\frac{\pi}{4}$ 角的直线上，它们位于极点的两侧. 因此，

$$PQ=5+1=6;$$

(2) 由于点 M 的极角恒为 $\frac{\pi}{3}$，且 $\rho\in\mathbf{R}$，因此，点 M 在过极点且与极轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角的直线上.

例 3 已知点 $Q(\rho,\ \theta)$，分别按下列条件求出点 P 的极坐标.

(1) P 是点 Q 关于极点 O 的对称点；

(2) P 是点 Q 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的对称点.

解 (1) 由 P, Q 关于极点对称，得它们的极径 $OP=OQ$，极角相差 $(2k+1)\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$). 所以，点 P 的极坐标为

$$(\rho,\ (2k+1)\pi+\theta)\text{ 或}(-\rho,\ 2k\pi+\theta)\ (k\in\mathbf{Z}).$$

(2) 如图 4-1-7 所示，由 P, Q 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 对称，得它们的极径 $OP=OQ$，点 P 的极角 θ' 满足

$$\theta'=\pi-\theta+2k\pi.$$

所以点 P 的极坐标为

$$(\rho,\ (2k+1)\pi-\theta)\text{ 或}(-\rho,\ 2k\pi-\theta)\ (k\in\mathbf{Z}).$$

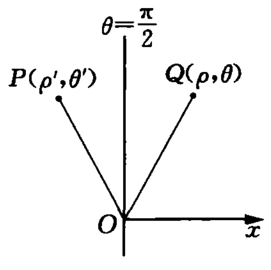


图 4-1-7

极坐标系与直角坐标系是两种不同的坐标系，它们都可以确定点的位置，但又各具特点. 通常在运动的过程中，若点作平移变动时，则点的位置采用直角坐标描述较方便；若点作旋转变动时，则点的位置采用极坐标描述较方便. 为了研究问题的方便，发挥两种坐标系的长处，需要将点的极坐标与直角坐标互相转换.

以直角坐标系的原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，且在两种坐标系中取相同的长度单位(如图 4-1-8). 平面内任意一点 P 的直角坐标与极坐标分别为$(x,\ y)$和$(\rho,\ \theta)$，则由三角函数的定义可以得到如下两组公式：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

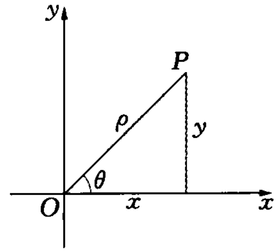


图 4-1-8

通常情况下，将点的直角坐标化为极坐标时，取 $\rho \geqslant 0$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$.

例 4 把点 M 的极坐标 $\left(8, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ 化成直角坐标.

解 $x = 8\cos\dfrac{2\pi}{3} = -4$，$y = 8\sin\dfrac{2\pi}{3} = 4\sqrt{3}$，

因此，点 M 的直角坐标是 $(-4, 4\sqrt{3})$.

我们知道，一个点的极坐标可以有多种表达形式，如点 $M\left(8, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ 也可以表示为 $\left(-8, \dfrac{5\pi}{3}\right)$. 对于 $\rho < 0$ 时，上面的公式也适用(你能给出证明吗?). 此时，由

$$-8\cos\frac{5\pi}{3} = -4 \text{ 及 } -8\sin\frac{5\pi}{3} = 4\sqrt{3},$$

得点 M 的直角坐标是 $(-4, 4\sqrt{3})$.

例 5 把点 P 的直角坐标 $(\sqrt{6}, -\sqrt{2})$ 化成极坐标.

解

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\tan\theta = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$