环与理想

[美] N.H. 麦克可依 著

刘绍谋 译

1983.5.

环与理想
可依著
译

卡 拉 斯 数 学 专 论

第 八 辑

环 与 理 想

史密斯学院数学教授
N.H.麦克可依著
刘 绍 谋 译

序

在最近的二、三十年间，由于研究工作者的大量增加，抽象代数已经非常快速和行时地发展起来。事实上，对于一般数学家来说，即使他们的志趣在于其它方面，这个理论的一般方法和基本结果也已经引起他们相当大的兴趣。这个专论的目的是要介绍抽象代数的一个分支，这就不得不涉及环的理论，不得不对这个理论中理想的作用作某些强调。

除了在第八章和第七章的一些地方关于行列式的一些基本定理知识假定为已知外，本书几乎整个地自成一个体系。因此，为了明瞭所举的实例，读者必须具有相当的“数学素养”，同时还要领悟抽象推理的意义。然而，就形式上的技术而言，比代数的基本原理稍多一点的知识，也包含在本书之中。

本书前四章所论述的那些基本概念和结果，在环论的任何分支的进一步研究中，都是十分重要的。然而本专论的其它内容所研究的一些更为专门化的结果，也具有相当广泛的兴趣和应用价值。自然地，由于篇幅的限制，许多具有同等重要性的其它类型的材料不得不加以删削，就大部分内容而言，那些不需要对我们所考虑的环作有限性假定的材料已经精选出来—甚至于条件链的概念直到最后一章的末尾都没有提及。

第五章主要叙述可换环中关于素理想的克鲁尔(Krull)结果由于没有有限性条件的限制，所以，在确立素理想的存在

性时就必须应用超限的方法。实际上佐恩(Zorn)的最大原则是完全必要的，并且在本章适当的地方还作了详细的叙述和说明。

第六章阐述了环的子直和的理论。同时也略为介绍环的贾柯勃逊(Jacobson)根。第七章讨论了布尔(Boolean)环和这些环的某些代数的通则。特别地，作为某一个集合的子集的环，它的任何布尔环的表示的施顿(Stone)定理，是容易从上一章抽绎而出的。

元素在可换环中的矩阵理论是第八章的主题，明显地，在简短的一章中要给这一理论以广泛的说明是不可能的。然而。这一章之所以只作简要的叙述，部分的原因是由于本书还是属于一般入门的性质，部分是由于它的材料只是提供了初等环论中一些基本方法的说明，所以这一章是脱离于前两章而独立成篇的。最后，第九章介绍了可换环中准素理想的研究，本书末尾还对诺德(Noetherian)环和代数流形作了简短的讨论和剖析。

因为本专论的相当部分材料在以前尚未以书的形式出现，那末，或多或少地提供一点较为完整的参考资料还是聊胜于无的，因此，在每一章的末尾都附有一个参考书目，作为该章一般材料的补充，同时，对于在所能得到的论文中尚未论证的一些较专门化的结果，也附有偶或有用的资料出处，本书背后的文献绝不是完全的；就大部分内容而言，只是在本书中某些方面有参考价值的那些项目才列在其中。

在这里要一一列出我所参考的书和论文是不可能的。但是，我却要破例地提到那本引起了人们对抽象代数的普遍兴趣，而起了重要作用的B.L.范德瓦尔登的《近世代数》，

就内容而言，本专论前四章的很多地方和最后一章的小部分都采用B·L·范德瓦尔登的论文内容与材料。

我衷心地感谢Bailey Brown教授，R·E·Johoson教授和Saunders MacLane教授，他们曾细读了本书的全部原稿并提出很多有益的建议，特别是Brown教授对这个专题一开始就非常热心，同时，我在与他多次的讨论中也获益不浅，他不仅以特别精细和评品的态度读完了本书所有的原稿，而且在校订本书的证明中一直给我无可估量的帮助。

尼尔·亨利·麦克可依于马萨诸塞州诺塞姆顿城

1947．8．22．

目　　录

第 一 章

定义和基本性质

1. 环的定义：我们考虑有元素 a，b，c 的集合 R，使得对于 R 的任意元素 a 和 b，有唯一确定的和 $a+b$ 及积 ab（有时写为 $a\cdot b$），它们也是 R 的元素。并称为加法和乘法，像普通的初等代数中一样，R 的这些元素和与积是分别与运算相联系的。这样的一个集合，如果其加法与乘法有下列的五个性质，我们就称 R 为一个环：假设对于 R 的元素 a，b 和 c，它们既可不同也可以相同，具有

p_1. $a+(b+c)=(a+b)+c$　　（加法结合律）；

p_2. $a+b=b+a$　　（加法交换律）；

p_3. 方程 $a+x=b$ 在 R 中有一个解 x；

p_4. $a(bc)=(ab)c$　　（乘法结合律）；

p_5. $a(b+c)=ab+ac$，$(b+c)a=ba+ca$。（分配律）；

环的概念的重要性，主要在于下列事实，根据上面的定义，存在着许多完全不同类型的重要数学体系，它们都是一个环。自然地，由环的定义，所有这些体系都具有共同的性质，而这些性质的每一个都是这个定义的逻辑结果。今后，我们将要推导这些逻辑结果，从而得到所有的环所必须具有的性质。但是，在进一步推导这些性质之前，我们先来给出一些环的例子，它将有助于我们理解环的概念的含义。同时又可说明环的各种体系的某些事实。

2．环的例子：为了给出一个环的例子，我们必须先提出一个元素的集合，并且给出这些元素的加法和乘法的定义，使它们满足上述的五个性质．现在我们就来给出一些说明．至于那些性质的实际证明，我们将留给读者，因为它们由直接的计算或熟知的知识就立即可以得到．

首先，明显地许多普通代数的数系关于通常的加法和乘法的定义都构成环．因此，我们有偶数环（正偶数，负偶数和零），全体整数环、有理数环、实数环和复数环．必须注意，每一个这样的环都被包含在它后面的每一个环之内．因此，我们说它们是后面的每一个环的子环．同时也容易证明，所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数的集合，此处 a，b 是有理数，构成一个环．所有实系数的一元多项式的集合（关于普通多项式的加法和乘法）也构成一个环。更一般地，因为连续函数的和与积也是连续函数，因而容易看出，所有在一个固定区间上连续的函数的集合是一个环．同时也可以证明，所有一个实变数的收敛于某一个区间的幂级数的集合，关于幂级数通常的加法和乘法也构成一个环．

（非）整数环是基本而重要的环，我们将时常用到它，对于这个环有一个统一的符号是比较方便的，因此，我们将用字母 I 表示所有整数的环．

除了这些最熟悉的环以外，我们现在给出一些稍为详细的例子．事实上，大部分的环的出现将在后一章考虑．因此，目前不必要指出这些环的重要性和意义．基于这一点，我们主要的目的是给出多种多样环的形式同时又有例子的一个主体，从这些可以获得在后一章所确立的各种结果的说明．

例1. 全体整数对于模 n 的环 In，此处 n 是任意正整数。这个环的元素是记号 $0'$，$1'$，$2'$，…，$(n-1)'$。如果 a' 和 b' 是这些元素的任意两个元素，我们定义 $a'+b'$ 是 r'，此处 r 是 a 与 b 的普通的和被 n 除得的最小非负剩余，类似地，$a'b'$ 我们意味着 s'，此处 s 是 a 与 b 的普通积被 n 除得的最小非负剩余，作为一个说明，全体整数对于模 6 的环 I_6 是由六个元素 $0'$，$1'$，$2'$，$3'$，$4'$，$5'$ 所组成。如果以 4 与 5 的普通和被 6 所除，其最小非负剩余是 3，因此，在这个环中 $4'+5'=3'$，类似地 $2'+4'=0'$，$2'\cdot4'=2'$，$2'\cdot3'=0'$ 等等。

要证明 In 确实是一个环，必须用到一个熟知的事实，这就是用 n 去除任意一个整数，其最小非负剩余是唯一的。事实上，大家很清楚，这个性质是上面给出的关于加法和乘法的定义的本质，我们将来证明加法的结合律作为证明方法的一个说明，这也许是有益处的。

令 a'，b'，c' 是 In 的任意元素，如果

(1)　$a+b=q_1n+r_1$

此处 $0\leqslant r_1<n$，那末由 In 中加法的定义

$$a'+b'=r_1'$$

因此，$(a'+b')+c'=r_1'+c'$，计算这个结果，我们设

(2)　$r_1+c=q_2n+r_2$

此处 $0\leqslant r_2<n$，因此

$$(a'+b')+c'=r_2',$$

但是，如果我们以(2)中 r_2 的值代入方程(1)，我们看到

$$a+b+c=(q_1+q_2)n+r_2$$

因此r_2是以n除$a+b+c$的最小非负剩余。类似的计算可以证明

$$a'+(b'+c')=r_2'$$

所以

$$(a'+b')+c'=a'+(b'+c')$$

如所需要。

用相同的计算方法立即可以得到性质P_4和P_5，而P_2是明显的，所以我们来证明P_3，我们注意，如果a'与b'是In的任意元素，若$b\geqslant a$，则方程$a'+x=b'$有解$x=(b-a)'$，若$b<a$，方程的解是$x=(n+b-a)'$。

我们必须注意，用整数环I来构造I_n的这种方法是第三章将要充分阐述的一个重要步骤的一种特殊情况。

例2．g的所有的子集的环B，此处g表示X轴上的单位区间。这就是说g是所有横坐标为x，$0\leqslant x\leqslant 1$的点集。g的点的一个集合自然地称为g的一个子集，例如，g的任何单一的点就是g的一个子集，还有所有横坐标为x，$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$的点的集合也是$g$的一个子集。这是简单的说明，然而，明显地，集$g$还存在着大量的各种各样的子集。根据我们的定义，可以看出，g的所有的点的集合是g自己的一个子集，我们也将方便地认为空集也就是不包含点的集合是g的一个子集，这将有益于简化各种各样的叙述，否则，它未必是绝无例外的真确。

现在如果B是g的所有子集的集合，包括空集在内。我们将适当地来定义加法和乘法，使B成为一个环。必须强调的是B的一个元素就是g的一个子集。

令　a 与 b 是 B 的任意两个元素，根据 a 和 b，g 的点可以分为下列互相排斥的类，而其中的一些类可能偶然不包含 a，b 的点：（1）点既不在 a 中也不在 b 中，（2）点在 a 中但不在 b 中，（3）点在 b 中但不在 a 中，（4）点在 a 和 b 两者之中，这个事实可以用方便的但是纯符号的方法来表示，如下面图 1 中所示，这里 a 用园 a 内部的点表示，而 b 用园 b 的内部表示，这样，（1），（2），（3）和（4）这些类就可分别用图中标记 1，2，3 和 4 的区域来表示。

现在我们容易来定义 B 的加法与乘法，对于 ab 我们意味着 a 与 b 的交集，这就是所有在 a 和 b 两者中的点的集合，在图 1 中，ab 就是表示为区域 4 中点的集合。我们定义 $a+b$ 是所有在 a 中或在 b 中但不在 a，b 两者中的集合。因此，在图 1 中区域 2 和 3 在一起就表示 $a+b$。

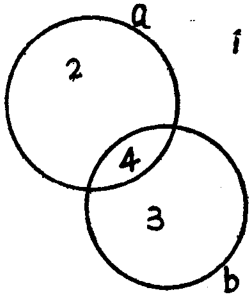

图　1

显然，如果 a 和 b 没有公共的点，ab 就是空集。因此，如果我们对于空集不作这样的约定，那末 g 的两个子集的积就未必是 g 的子集。

性质 P_2 和 P_4 是十分明显的，但是我们提出证明 P_1 的一个方法。令　a，b，c 是 B 的三个元素，根据这些元素，g 的点可以分成八个互相排斥的类，如图 2 中所指出的，这里 a，b，c 表示的符号分别用标记 a，b，c 的园的内部点来表示，我们将不列举这八个类，但是为了说明，必须指出区域 2 表示所有在 a 中但既不在 b 中又不在 c 中的点的集合。

现在$a+b$是由区域2，3，5和6来表示，因为c是由区域4，5，6和8所组成，这就明显地看出$(a+b)+c$就是由区域2，3，4和8所表示。那未，这个图解的表示指出，我们可把$(a+b)+c$表征为g的一个子集，这个子集刚好由集合a，b，c之一所有的点与所有同时在a，b，c三个集合中的点在一起所组成。这就明显地使我们能够用纯逻辑的而不用参照图解的方法来加以证明。但是图解已经提供了包含着逻辑步骤的一个明显可见的迹象。读者现在可以证明$a+(b+c)$刚好能够用相同的方法表示，因而就确立了加法结合律。性质P_5能够用同样的一般方法来证明，所以我们把它省略不证。

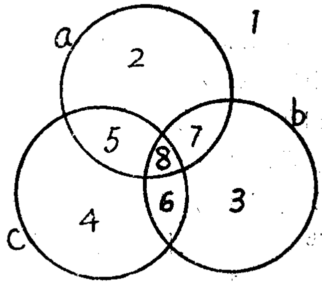

图 2

关于方程$a+x=b$我们取x为如上面定义的$a+b$便可得到一个解，因此，P_6是真确的。

必须注意，环B还有一些值得注意的性质。它对于原先提过的环是不真确的。例如在环B中，对于每个元素a，$a\cdot a=a$。具有这种性质的环，我们将在第七章中加以详细的讨论。明显地，在这个例子中，我们可以用任意的点集M来代替区间g，因而我们可以获得任意集合M的所有子集的环。

例3. 一个任意集合M的所有有限子集的环，为了具体化，令M是前面例子的区间g，上面已经阐明，g的所有子集的集合在适当的加法和乘法的定义下是一个环。明显地，

如果a和b仅仅包含有限的点，则$a+b$及ab同样也是真确的，容易看出，g的所有有限子集的集合也是一个环，自然地，它是g的所有子集的环的一个子环。

例4. 所有阶数为2的实数矩阵的环. 这个环是由所有形如

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$$

的元素所组成，此处e_{11}，e_{12}，e_{21}，e_{22}都是实数，关于加法和乘法分别定义如下：

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_{11}+f_{11} & e_{12}+f_{12} \\ e_{21}+f_{21} & e_{22}+f_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_{11}f_{11}+e_{12}f_{21} & e_{11}f_{12}+e_{12}f_{22} \\ e_{21}f_{11}+e_{22}f_{21} & e_{21}f_{12}+e_{22}f_{22} \end{bmatrix}$$

至于这是一个环的证明，我们留给读者。

用类似的方法，我们可以定义n阶（n行n列）的实数矩阵的环，并且我们也可以用其它数系的元素来代替实数——事实上可用任意环的元素. 矩阵环将在第八章作更完整的讨论。

应当指出，在这个例以前的所有例子中，其乘积因子的次序是无关紧要的，然而在2阶实数矩阵环中，情况就不是那样，例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 5. 实四元数环. 作为这个环的元素，我们采用所有的符号

$$(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$$

此处 e_1，e_2，e_3，e_4，都是实数，其加法和乘法分别定义如下：

$$(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)+(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$$
$$=(e_1+f_1,\ e_2+f_2,\ e_3+f_3,\ e_4+f_4)$$
$$(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$$
$$=(e_1f_1+e_2f_2+e_3f_3+e_4f_4,\ e_1f_2+e_2f_1+e_3f_4+e_4f_3,$$
$$e_1f_3+e_2f_4+e_3f_1+e_4f_2,\ e_1f_4+e_2f_3+e_3f_2+e_4f_1)$$

这个环的定义在许多代数的题目中都可找到，我们必须注意，它们虽有一些不同，但是在逻辑上是等价的，然而为了说明的目的，目前这个定义更为简单而且是完全满意的。

十分明显，加法的性质都是被满足的，而且 P_4 和 P_5 也可以直接来证明，但是计算较为麻烦。

实四元数环还有其它的性质，那就是乘积因子的次序是重要的。例如，我们有

$$(0,\ 1,\ 0,\ 0)(0,\ 0,\ 1,\ 0)=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$$
$$(0,\ 0,\ 1,\ 0)(0,\ 1,\ 0,\ 0)=(0,\ 0,\ 0,\ -1)$$

在任意的环 R 中，如果元素 a，b 使得 $ab=ba$，我们就说这些元素中的一个与另一个是可换的。如果 R 具有这样的性质，对于任意选择的 a 和 b，a 与 b 是可换的，我们就称 R 是一个可换环。否则就是一个不可换环。上面给出所有的环的例子中，除了最后两例以外，都是可换环，而最后两例都是不可换环。明显地，对于可换环来说，分配律 P_5 中两者之一是另一个的结果。

3. 加法性质. 现在我们转过来进一步考虑环的定义性质，性质 P_1，P_2 和 P_3 是谨严的性质，这些性质确定一个阿贝尔（可换）群，而且一个环中加法的基本性质都包含在这样的群中，然而我们不假定已熟悉这些概念，并将详细地来推导所要求的性质。

令 a 和 b 是任意环 R 的元素，它们不同或相同，由 P_3 存在着 R 的元素 n 和 n' 使得

$$a+n=a \text{ 及 } b+n'=b$$

同样地，存在着 R 的元素 x 和 y，使得

$$a+x=n' \text{ 及 } b+y=n$$

应用 P_1 和 P_2，由此可见有

$$\begin{aligned} n &= b+y=y+b=y+(b+n')=(y+b)+n' \\ &= (b+y)+n'=n+n', \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} n' &= a+x=x+a=x+(a+n)=(x+a)+n \\ &= (a+x)+n=n'+n. \end{aligned}$$

这就证明了 $n=n'$。因此，存在着 R 的唯一的元素 n，对于 R 的任意元素 a，具有性质

$$a+n=n+a=a$$

因此，这个元素 n 可用熟悉的记号 0 表示，并且叫做 R 的零元素。或简单称为零。自然地，任何其它的元素，就叫做非零元素。这样每一个环都有一个零元素，同时明显地，一个环除了只含一个元素外，也有非零元素。

读者可以不困难地验证原先提到的那些环的零元素。作为实例，我们必须注意，在 g 的所有子集的环中，空集就是零元素，而 2 阶实数矩阵环的零元素就是矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$