新學制
高中代數教科書

何魯

商務印書館

新學制

高級中學教科書

魯 編輯

數學

商務印書館發行

序

近行代數學教本,多由歐美書直譯,與我國學生程度不合,且於代數意義及方法均付闕如,故習代數者往往不知代數爲何物,卽知者亦不過能爲公式之機械計算而已.歐美學生之深造機會甚多故中等教科書雖稍嫌不完全,尙不足爲累;我國學生則反是,不於中學奠其基礎,則研究之興趣不生,將至一無所得而止.故余以爲在中國編教科書,其責任更重大,決非率爾操觚者所能勝任.玆余以十餘年之經驗,數閱月之苦思成此書,讀者可以見篇名而知代數之意義.至何處爲算術之推廣;何處爲代數之推廣;何處爲分析之肇始;皆不憚詳言,冀爲讀者一貫之助.吾知此書出,學者研究算學之興趣,必因之增加.得此津梁,自可進窺堂奧,固不無裨益於世也.

本書第三篇得余友向迪琮教授之助爲多,附及之以誌謝.

中華民國十二年夏　　季曾何魯識於學海室

目 錄

新學制高中教科書

代數學

第一篇

代數之基本運算

第一章 正負數及其運算

§1. 代數之目的 *Object of Algebra* 代數之目的為解決方程式.方程式者,在代數則為量與量之關係,如 $f(x, y)=0$;或一量與本量之乘方或方根之關係,如 $x^3+px+q=0$ 或 $2x-\sqrt{x+1}=0$.量分已知未知二種:解決云者,卽就已知量,依一定運算,以求未知量是也.方程式在物理為天然現象之定量公律.物理以得一定量公律為難能可貴;既得公律,而不假之以進研現象;換言之,卽有方程式而不知解,則物理進步為之阻,此物理之所以必資於代數也.量又分有限與無窮小二種:研究方程式之盡含有限量者,屬代數範圍;方程式之盡含無窮小者,為微分方程式,本書不論及之.科學發達,觀察為先,實驗次之,抽相科學如算學 *Mathematics*, 則根據原理或假設,以為推演.天然界之量,恆有數附之.為量雖多,而為數則一

也.研究量與量之關係,必假觀察以成,實驗以證其無訛.若於數,則可以假設或原理以支配之;再根據之,以研究數與數之任何種關係;如整數之名,假設也;$(\sqrt{-1})^2=-1$,亦假設也;於等數加等數和數仍等,原理也.算學雖至極繁賾之境,終不能背原理.是故算學爲研究物理之利器;而物理問題,實爲算學之資料.算學愈進步,則研究物理愈易;物理愈發達,則算學材料益愈多;且可轉移研究算學者之趨向.本書目的,在使讀者深明代數之意義;及能解決有限量方程式;又能爲讀解析幾何及高等分析者之充分預備.

§2. 正負數 *Positive and Negative Numbers* 算術只有正數而無負數;代數則先立正負數之名,乃代數家求推廣公式之第一步.

今設有方程式 $x+b=a$ ……………………(1)

移項,立得 $x=a-b$ ……………………(2)

此時如以數字代 a 及 b, 則(2)式與 x 之值.然欲計算可能,必 a 大於 b 乃可.設 a 小於 b, 則算術家將對此淺易問題而束手.計算不立,則(2)不得爲(1)之解;換言之,即同一一次方程式,有時有解,而有時無解也.夫算術家之用數不用量,爲其通也,得數之關係,可適用於任何量;代數家之用字不用數,爲其更通也,得字之關係,可適用於任何

數.今既窮於正數之計算,乃不得不創新數以濟其窮,而求公式之推廣.推廣之法若何?

設　　$a<b$

可令　　$b=a+c$

c 即 b 與 a 之較,且爲正數.於是(2)式可書爲

$$x=a-a-c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因 $a-a=0$ 故如以 $-c$ 代 x 則(3)式變爲

$$-c=-c$$

即此式能合也.於是(1)之解爲 $x=-c$. 減號與字合成一數,謂之負數.如 a, b, c 均爲正數,則 $-a, -b, -c$ 爲負數,a, b, c 又爲其絕對値 *Absolute Value*. 如 a 可正,可負:則 a 爲正時,$-a$ 爲負;a 爲負時,$-a$ 爲正.於是有一正數,必有一負數;有 $1, 2, 3, \cdots\cdots n$, 則有 $-1, -2, -3\cdots\cdots-n$. 3 可視爲 5 與 2 之較,或 6 與 3 之較,即

$$3=5-2=6-3$$

則 -3 可視爲 2 與 5,或 3 與 6 之較,即

$$-3=2-5=3-6$$

餘倣此.

§3. 正負整數之運算 *Operation of Positive and Negative Integers*

算術之初,只就正整數運算;如加,減,乘,除,乘方,及方根等是.繼推之於小數及分數.在代數,則每

創一新數,必求此新數之運算.新數之運算,必有新律以支配之;又與舊律不背,且永不令有矛盾之處發現.此其成功,蓋不在一時也.正負數通稱曰代數數 *Algebraical Numbers.* 欲求兩代數數之和,須先視兩數之號若何?或同號,或異號.若為同號,則求兩數之算術和,而冠以兩數之號.例如

$$5+3=8$$

$$-5+(-3)=-8$$

若為異號,則求兩數之較,而冠以絕對值大者之數之號.例如求 5 與 -3 之和.因兩數號不同,求其較,為 2.因 5 之絕對值比 -3 之絕對值大,故為正.即

$$5+(-3)=5-3=2$$

又如求 -5 與 3 之和,其較仍為 2,但絕對值大者之數為負,故應冠以負號.即

$$-5+3=-2$$

推廣言之,如欲求任若干代數數之和,

$$s=a+b+c+\cdots\cdots+l$$

則以各正數相加,令為 α;又以各負數相加,令為 β.則

$$s=\alpha-\beta$$

以異號數求和法取之.

§4. 正負數乘除法之公律 Law of Signs

兩代數數相乘;先如算術求其積,再視兩數之號.若爲同號,則積爲正,若爲異號,則於積冠以負號.

以公式表之如次.

$$\left.\begin{aligned}(+a)(+b)&=ab\\(-a)(-b)&=ab\\(+a)(-b)&=-ab\\(-a)(+b)&=-ab\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

即同號之數相乘,乘積爲正;異號者相乘,其積爲負也.

推廣言之,如欲求 n 代數數之積,須先求其算術積.負數數目爲雙者,則積爲正;負數數目爲單者,則積爲負.

兩代數數相除,其律仍同;即同號之數相除,其得數爲正;異號之數相除,得數爲負也.

以公式表之如后.

$$\left.\begin{aligned}\frac{+a}{+b}&=\frac{a}{b}\\\frac{-a}{-b}&=\frac{a}{b}\\\frac{+a}{-b}&=-\frac{a}{b}\\\frac{-a}{+b}&=-\frac{a}{b}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

中 $b\neq0$. 凡此皆公約,期便於計算者.其價值在使後此運用可合實用,又不互相矛盾而已.

§5. 乘方與方根 Powers and Radicals 設 π 爲 $a, b, \cdots\cdots l, n$ 個數之乘積,即

$$\pi=abc\cdots\cdots l$$

如令　$a=b=c=\cdots\cdots=l$

則　$\pi=\underbrace{aa\cdots\cdots a}_{n\text{因子}}$

依定義　$\pi=a^n$

π 爲 a 之 n 次乘方,亦即 n 個 a 之聯乘積也.此時 n 爲正整數.

又 $-a$ 之 n 次乘方爲

$$\pi'=(-a)^n=(-1)^n a^n$$

$(-1)^n=1$　　若 n 爲雙數

$(-1)^n=-1$　　若 n 爲單數

余謂　$a^n\times a^m=a^{n+m}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

中 n 及 m 均爲正整數.蓋 a^n 爲 n 個 a 之乘積,而 a^m 爲 m 個 a 之乘積.故 $a^n\times a^m$ 爲$(n+m)$個 a 之乘積,依定義爲 a^{n+m}. n 及 m 謂之指數.故一數兩乘方之積,其指數爲原兩指數之和.

又　$\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

如 $n-m=0$ 則有

$$a^0=1\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

如 $n-m=-p$ 則有

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

此 0 指數及負指數之定義也.

反之,如

$$\pi=a^n$$

n 爲一正整數,則 a 謂之 π 之 n 次方根.以符號表之

$$\sqrt[n]{\pi}=a$$

或

$$\pi^{\frac{1}{n}}=a$$

$\frac{1}{n}$ 爲分數指數,且可以分數運算馭之.詳見第四章.

又

$$(+a)\times(+a)=a^2$$

$$(-a)\times(-a)=a^2$$

$+a$ 及 $-a$ 爲 a^2 之平方根.且任一代數數之平方,必爲正.於是負數無平方根.如令

$$\sqrt{-1}=i$$

$$(\sqrt{-1})^2=i^2=-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

則 $\sqrt{-1}$ 或 i 謂之虛數,而

$$\sqrt{-a^2}=\sqrt{-1}\sqrt{a^2}=\pm ia$$

於是一二次方程式,如

$$x^2+a^2=0$$

者,亦有解.其解爲 $\pm ia$.計算時,當以 -1 代 i^2.此爲代數家推廣公式之又一步.詳見第十四章.

§6. 整數之特性 *Characteristic Properties of Integers*

代數整數對於加法,特性有二:一曰可易性 *Commutative law*, 一曰可羣性 *Associative law*.

如式　$$a+b=b+a$$

即 a, b 可互易而結果不變,此可易性也.

又如　$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$$

即 a, b, c 三數之中任二者可合爲一,仍不變其結果,此可羣性也.

又　$$a+0=a$$

故加零爲無效.

整數對於乘法之特性有三;一曰可易性,一曰可羣性,一曰可分性 *Distributive law*, 以式明之:

$$ab=ba$$

此可易性也;

$$abc=(ab)\cdot c=a\cdot(bc)$$

此可羣性也;

$$a(b+c)=ab+ac$$

此乘法對於加法之可分性也.

又　$$0\times a=0$$

$$1\times a=a$$

故欲一乘積爲零,必至少有一因子爲零;而以 1 乘,則積不變.

應用　余謂

$$a-(b-c+d)=a-b+c-d$$

因 $$a-(b-c+d)=a+(-1)(b-c+d)$$
$$=a+(-1)b+(-1)(-c)+(-1)d$$
$$=a-b+c-d$$

故也.

又 $$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=(a+b)a+(a+b)b$$
$$=a^2+ba+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

同理 $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

分數加法,於通分母後,純爲整數之運算.分數乘法,則以分子乘分子,分母乘分母,亦爲整數之運算.故上所論者,於分數亦適用.

§7. 實數之比較 Comparison of Real Numbers

正負整數及分數,通稱爲實數.其實無理數如不盡根 *Surds* $\sqrt{2}$, 及超然數 *Transcendental Numbers* 如 π, 或 e 亦屬焉.計算上,對於此種數,只取其相近值.本書第十章再論之,并及其比較法.此時僅論正負整數及分數,又稱爲有理數 *Rational Numbers*, 以示別於無理數及超然數也.

定義 謂 a 大於 b, 必 $a-b$ 爲正.即

$$a-b>0$$

其一 兩正數相較,絕對值大者爲大.

其二 兩負數相較,絕對值大者爲小. $-3>-5$

因 $$-3-(-5)=-3+5=2>0$$

故也.

其三 任一正數,恒大於零.因由此數減去零,餘數仍爲正故也.

其四 任一負數,恒小於零.如 $0>-1$, 因

$$0-(-1)=1$$

爲正故也.

如就正負整數論,則其大小次第如

$$-n<-(n-1)<\cdots\cdots<-3<-2<-1<0<1<2<3<\cdots\cdots<(n-1)<n$$

0 可視爲正負數之界,又曰中立數,因

$$\pm 0=0$$

故也.

§8. 等式與不等式 *Equality and Inequality*

謂 A, B 兩同類量相等,即同以一單位量之時,所含單位次數相等也.以式表之爲

$$A=B$$

謂兩數相等,必此兩數號同,而絕對值又相等.

如 C 爲其同類量,則有

$$A\pm C=B\pm C$$

如 m 爲一數,不爲零者,則有

$$mA=mB$$

及 $$\frac{A}{m}=\frac{B}{m}$$

此算學之普通原理也.

試取兩數不等者 a 及 b,設 a 大於 b 以式表之爲

$$a>b$$

或爲 $$b<a$$

如 c 爲任一數,則有

$$a\pm c>b\pm c$$

如 c 爲正數,則有

$$ac>bc$$

因 $$a>b$$

又可書爲

$$a-b>0 \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

以正數 c 乘之,得

$$c(a-b)>0$$

或 $$ac-bc>0$$

亦即 $$ac>bc$$

如 c 爲負,則以之乘(11)式,當得

$$c(a-b)<0$$

即 $$ac<bc$$

是故同以一數乘不等式兩端,必審知此數之號而後可也.以一數除不等式之兩端亦然.

又有
$$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$$

§9. 比與比例 *Ratio and Proportion*

比有兩種.以一同類量除一同類量,謂之比,此爲數值.或以同一單位量兩量,而以所得數值相除成之.以式表之爲

$$\frac{A}{B}\ \text{或}\ A:B$$

如以 c 爲單位, A 含 a 次單位,而 B 含 b 次,則其比爲

$$\frac{a}{b}\ \text{或}\ a:b$$

一量視他量之增減而自爲增減者,亦可成比.此比爲一新量,如在整速運動 *Uniform Motion.*

$$\frac{e}{t}=v$$

e 爲路長, t 爲時間, v 爲速率,此時 v 爲常數.在變速運動 *Non-Uniform Motion*, v 視 t 變,

令
$$v=f(t)$$

知 $f(t)$,即知此運動之律.如

$$v=at$$

則爲加速運動 *Accelerated Motion* 是也.如兩數相乘,亦可視爲一數與他一數倒數 *Reciprocal* 之比.

卽
$$ab=\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{b}{\frac{1}{a}}$$

前者爲正比,此爲反比.兩比相等,成爲比例.如

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

是也

余謂如有 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

則有 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$

因令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\lambda$

則 $a=b\lambda;\quad c=d\lambda$

而 $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{\lambda(b\pm d)}{b\pm d}=\lambda=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

推廣則有

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots=\frac{p}{q}=\frac{a\pm c\pm\cdots\cdots\pm p}{b\pm d\pm\cdots\cdots\pm q}$$

又由(13)式分之,得

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

以 bd 乘(12)之兩端,得

$$ad=bc$$

又以 cd 除此式之兩端,得

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$