交会定点典型
圖形平差法与精度估計

金 揚 善 著

民解放軍总参謀部測繪局譯印

一九五六年十月

交会定点典型圖形平差法与精度估計

引言

苏联A.B.郝吉耶夫C.Г.沙鲁比奇合著之『三角測量典型圖形平差法』（以下簡称該書），对交会定点所常用的『典型圖形』（二十一种），拟定了簡明而適用的計算格式，并备載点位誤差估計的算式，对于平差計算以及选点計划工作，都有很大便利。交会定点法在各种建設的三角測量中应用很广，因而对該書所述方法的需要甚切，而詳問其根源者亦甚多。本文的目的，即在擇例論証其由來，以期对探究此問題者有所助益。

更有進者：一般平差理論書籍不暇兼顧多样化的实用問題，对于实际工作特别是先進經驗的学習，深感不足。該書所載之平差方法与精度估計公式（該書已說明其中大部份不見于各書）涉及三种平差方法与精度估計的一般理論，这些理論亦实用于三角鎖網計算的現行先進方法中。这样一來，这些『一般理論』之如何結合实用的問題，大有專例演習的必要。而且，应用那些一般理論以推求該書所載之結果时，尙有若干特点与技巧頗値注意，其于理論与实用結合的方法上，亦將提供有益的帮助。因此，本文寫出的目的，不僅在于論証該書所載方法与公式的由來，更在于以其方法之論証为例，而演習各种平差方法与精度估計的一般理論之如何与更好地結合各种具体問題。

为節省篇幅計，本文对于一般書籍已有的理論不再詳述，僅在必要时寫出其結論或略加引申，对于公式的推演，僅在必要处推演較詳，一般易用普通方法導出者，僅加說明而从略，讀者鑒諒！

第一章　典型圖形的条件观測平差法

当典型圖形中僅有一个正弦条件时，則宜于將角条件（包括三角形与和角条件）列为一組或兩組，將正弦条件列为另一組，而按分組平差法進行平差。該書所載此类典型圖形共 8 种，均系按角度平差，其中平差与精度估計所依据的公式，均可按克呂格尔分組平差法及其相应的精度估計公式以得之。下文將选出其中一圖形（三角形中插入一点）为例而推演其算式之由來，其他圖形可用同法类推。

茲先述克呂格尔分組平差法：——

設有下列以角度改正数v_i表示的条件，并已將其分为三組：

第一組角条件：$(i=1,2\cdots n)$

$$[a_iv_i]+w_a=0,[b_iv_i]+w_b=0,\quad [c_iv_i]+w_c=0 \qquad (1)$$

第二組角条件：

$$[a'_iv_i]+w_1=0,\ [b'_iv_i]+w_2=0,[c'_iv_i]+w_3=0 \qquad (2)$$

第三組正弦条件：

$$[\alpha_iv_i]+\omega=0 \qquad (3)$$

先單独就第一組条件進行平差，組成联系数k'的法方程式并解之，得

$$\left.\begin{aligned}k'_1&=f_{1\cdot1}w_a+f_{1\cdot2}w_b+f_{1\cdot3}w_c\\k'_2&=f_{2\cdot1}w_a+f_{2\cdot2}w_b+f_{2\cdot3}w_c\\k'_3&=f_{3\cdot1}w_a+f_{3\cdot2}w_b+f_{3\cdot3}w_c\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

式中$f_{i\cdot r}$名为擴展系数。

由第一、二組条件之系数求出〔aa'〕、〔ba'〕、〔ca'〕，〔ab'〕、〔bb'〕、〔cb'〕，〔ac'〕、〔bc'〕、〔cc'〕。將此等数值代换（4）式中的w_a、w_b、w_c，則k'变为以下式表示的『助联系数』ρ之値：

$$\left.\begin{aligned}\rho_{a1}&=f_{1\cdot1}[aa']+f_{1\cdot2}[ba']+f_{1\cdot3}[ca']\\\rho_{b1}&=f_{2\cdot1}[aa']+f_{2\cdot2}[ba']+f_{2\cdot3}[ca']\\\rho_{c1}&=f_{3\cdot1}[aa']+f_{3\cdot2}[ba']+f_{3\cdot3}[ca']\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}\rho_{a2}&=f_{1\cdot1}[ab']+f_{1\cdot2}[bb']+f_{1\cdot3}[cb']\\\rho_{b2}&=f_{2\cdot1}[ab']+f_{2\cdot2}[bb']+f_{2\cdot3}[cb']\\\rho_{c2}&=f_{3\cdot1}[ab']+f_{3\cdot2}[bb']+f_{3\cdot3}[cb']\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}\rho_{a3}&=f_{1\cdot1}[ac']+f_{1\cdot2}[bc']+f_{1\cdot3}[cc']\\\rho_{b3}&=f_{2\cdot1}[ac']+f_{2\cdot2}[bc']+f_{2\cdot3}[cc']\\\rho_{c3}&=f_{3\cdot1}[ac']+f_{3\cdot2}[bc']+f_{3\cdot3}[cc']\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

改化第二組条件，使之变为与（2）式『完全等值』的方程式：（$i=1, 2\cdots n$）

$$
\left.
\begin{aligned}
[A'_1 v_1] + w'_1 &= 0 \\
[B'_1 v_1] + w'_2 &= 0 \\
[C'_1 v_1] + w'_3 &= 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (8)
$$

式中

$$
\left.
\begin{aligned}
A'_1 &= a'_1 + a_1\rho_{a1} + b_1\rho_{b1} + c_1\rho_{c1} \\
w'_1 &= w_1 + w_a\rho_{a1} + w_b\rho_{b1} + w_c\rho_{c1} \\
B'_1 &= b'_1 + a_1\rho_{a2} + b_1\rho_{b2} + c_1\rho_{c2} \\
w'_2 &= w_2 + w_a\rho_{a2} + w_b\rho_{b2} + w_c\rho_{c2} \\
C'_1 &= c'_1 + a_1\rho_{a3} + b_1\rho_{b3} + c_1\rho_{c3} \\
w'_3 &= w_3 + w_a\rho_{a3} + w_b\rho_{b3} + w_c\rho_{c3}
\end{aligned}
\right\} \qquad (9)
$$

單獨組成（8）式的联系數法方程式并解之，得

$$
\left.
\begin{aligned}
k'_1 &= f'_{1\cdot1}w'_1 + f'_{1\cdot2}w'_2 + f'_{1\cdot3}w'_3 \\
k'_2 &= f'_{2\cdot1}w'_1 + f'_{2\cdot2}w'_2 + f'_{2\cdot3}w'_3 \\
k'_3 &= f'_{3\cdot1}w'_1 + f'_{3\cdot2}w'_2 + f'_{3\cdot3}w'_3
\end{aligned}
\right\} \qquad (10)
$$

于此应当說明：所謂（8）与（2）式『完全等值』即謂一并解算（8）与（1）式所得各个改正数之値，完全等于一并解算（2）与（1）式所得各个改正数之値。換句話說，（8）与（1）式所表之条件方程式，可完全代替（2）与（1）式所表之条件方程式。欲使（8）与（2）式『完全等値』，必須（10）式之ρ符合（5）、（6）、（7）式的条件；同时，这些条件又可使改化后的条件方程式（8）与（1）式『互不关联』，（此处所謂『互不关联』，僅指法方程式的解算而言，

并非指这兩組条件方程式間不存在关系，其間之关系，已借ρ之助而归并于（8）式中。就此意义而言，ρ为『助联系数』的命名是很恰当的。}

亦即：

$$\left.\begin{aligned}[aA']=[aB']=[aC']=0\\ [bA']=[bB']=[bC']=0\\ [cA']=[cB']=[cC']=0\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

这个（11）式的意义就是説：（1）与（8）式一并組成的联系数法方程式，实与該兩式單独組成的法方程式無異，而由此單独組成的法方程式之联系数k'与k''{（4）与（10）式}所求得的改正数，亦將与一并解算（1）与（8）式因而（1）与（2）式所得之改正数無異。这就是説，利用（4）与（10）式的k'与k''而按下式求得的改正数v_i，与一并解算（1）与（2）式所得之改正数v_i完全相同：

$$\left.\begin{aligned}v_i&=v'_i+v''_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots n\\ v'_i&=a_ik'_1+b_ik'_2+c_ik'_3\\ v''_i&=A'_ik''_1+B'_ik''_2+C'_ik''_3\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

上式之v'_i与v''_i，等于單独解算第一組条件以及單独解算改化后的第二組条件所得之改正数，通常名为第一次与第二次改正数。至此，『分兩組平差』的目的完全达成。

4）若更有第三組条件（3式），可按同法將（3）式改化，以使改化后之条件方程式与（3）式『完全等値』，且使其联系数法方程式与（1）、（8）兩組条件(此时視为一組)之法方程式“互不关联”。于是，所有三組条件可分为三組而單独

解算，其所得結果与一并解算时無異。兹列举第三組条件的解算方法：

首先求出$[a\alpha]$、$[b\alpha]$、$[c\alpha]$、$[A'\alpha]$、$[B'\alpha]$、$[C'\alpha]$，代之于（4）、（10）式中之w_a、w_b、w_C与w'_1、w'_2、w_3以求三組条件的『助联系数』ρ'，即

$$\left.\begin{aligned}
\rho'_{a1} &= f_{1\cdot1}[a\alpha]+f_{1\cdot2}[b\alpha]+f_{1\cdot3}[c\alpha]\\
\rho'_{b1} &= f_{2\cdot1}[a\alpha]+f_{2\cdot2}[b\alpha]+f_{2\cdot3}[c\alpha]\\
\rho'_{c1} &= f_{3\cdot1}[a\alpha]+f_{3\cdot2}[b\alpha]+f_{3\cdot3}[c\alpha]\\
\rho''_{A1} &= f'_{1\cdot1}[A'\alpha]+f'_{1\cdot2}[B'\alpha]+f'_{1\cdot3}[C'\alpha]\\
\rho''_{B1} &= f'_{2\cdot1}[A'\alpha]+f'_{2\cdot2}[B'\alpha]+f'_{2\cdot3}[C'\alpha]\\
\rho''_{C1} &= f'_{3\cdot1}[A'\alpha]+f'_{3\cdot2}[B'\alpha]+f'_{3\cdot3}[C'\alpha]
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

按下式求第三組改化条件方程式的系数与常数項：

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \alpha_1+a_1\rho'_{a1}+b_1\rho'_{b1}+c_1\rho'_{c1}+A'_1\rho''_{A1}\\
&\quad +B'_1\rho''_{B1}+C'\rho''_{C1}\\
W &= \omega+w_a\rho'_{a1}+w_b\rho'_{b1}+w_C\rho'_{c1}+w'_1\rho''_{A1}\\
&\quad +w'_2\rho'_{B'_1}+w'_3\rho'_{C'_1}
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

应当指出：求出以前各組条件之改正数（例如12式之v'、v''）后，可將以前各組之平差值（观測值加$v'+v''$）代入下一組条件而求其閉合差。这样办法就等于用此平差值作为观測值的近似值以計算此組之閉合差，在理論上（实踐上不需要）以前已進行單独平差的各組条件自应采用相同的观測近似值以求閉合差。因此，在上述情况下，以前已單独平差的各組条件之閉合差应視为零，于是（14）式之W变为

$$W=\omega \tag{15}$$

至于何时应当使用以前各組之平差值以計算某組条件的閉合差，則应視該平差值之計算与改化常数項之計算孰为簡便而定。

第三組改化条件的联系数与第三次改正数为

$$k=-\frac{\omega}{[AA]},\quad w'''_1=A_1k \tag{16}$$

三組合并平差之总改正数为$v_1+v'''_1=v'_1+v''_1+v'''_1$，加此总改正数于观測值$l_1$，与加$v'''_1$于概略平差值（$l_1+v'_1+v''_1$）無異，同得最后的平差結果。

上述之理論可以类推，而应用于条件方程式分为四組、五組以至任意組之平差。

茲再叙述按克呂格尔法分組平差时如何計算平差值函数之中誤差。若分两組平差，則平差値之函数 F 的中誤差M_F由下式計算；

$$\left.\begin{aligned}
M^2_F&=\frac{m^2}{p_F}\\
\frac{1}{p_F}&=[ff]-\left\{\frac{[af]^2}{[aa]}+\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}+\right.\\
&\qquad\left.\frac{[cf\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}\right\}-\left\{\frac{[A'f]^2}{[A'A']}+\frac{[B'f\cdot1]^2}{[B'B'\cdot1]}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{[C'f\cdot2]^2}{[C'C'\cdot2]}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

上式可參見 И.И.希洛夫最小二乘法。若以上文所述之分二組平差而論，則按（17）式与前述改化后之条件方程系互不关联

且可完全代替原来条件之理，不难理解：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{p_F} = [ff] &- \left\{\frac{[af]^2}{[aa]} + \frac{[bf\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} + \frac{[cf\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}\right\} \\
&- \left\{\frac{[A'f]^2}{[A'A']} + \frac{[B'f\cdot 1]^2}{[B'B'\cdot 1]} + \frac{[C'f\cdot 2]^2}{[C'C'\cdot 2]}\right\} \\
&- \frac{[Af]}{[AA]}
\end{aligned}\right\} \quad (18)
$$

在用高斯約化法解算法方程式时，上述（17）或（18）式右端之各項可順便求出，此时应用（17）或（18）式較为簡便，否則較繁。在已求出各組联系数之擴缀系数（即（4）、（10）式中之$f_{1.r}$与$f'_{i.r}$）时，宜用下式：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{p_F} = [ff] &- \{[af]L'_1 + [bf]L'_2 + [cf]L'_3\} \\
&- \{[A'f]L''_1 + [B'f]L''_2 \\
&+ [C'f]L''_3\} - [Af]L
\end{aligned}\right\} \quad (19)
$$

其中之L'_1，L''_1，L可用$-[af]$、$-[bf]$、$-[cf]$、$-[A'f]$、$-[B'f]$、$-[C'f]$、$-[Af]$分别代换（4）、（10）与（16）式中之w_a、w_b、w_c、w'_1、w'_2、w'_3、w以得之，则：

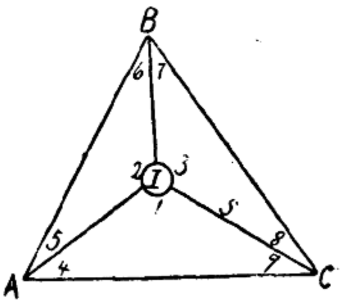
$$
\left.\begin{aligned}
L'_1 &= -\{f_{1.1}[af] + f_{1.2}[bf] + f_{1.3}[cf]\} \\
L'_2 &= -\{f_{2.1}[af] + f_{2.2}[bf] + f_{2.3}[cf]\} \\
L'_3 &= -\{f_{3.1}[af] + f_{3.2}[bf] + f_{3.3}[cf]\}
\end{aligned}\right\} \quad (20)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
L''_1 &= -\{f'_{1.1}[A'f] + f'_{1.2}[B'f] + f'_{1.3}[C'f]\} \\
L''_2 &= -\{f'_{2.1}[A'f] + f'_{2.2}[B'f] + f'_{2.3}[C'f]\} \\
L''_3 &= -\{f'_{3.1}[A'f] + f'_{3.2}[B'f] + f'_{3.3}[C'f]\}
\end{aligned}\right\} \quad (21)
$$

$$L = +\frac{[Af]}{[AA]} \tag{22}$$

L'_i、L''_i、L等名为傳遞系数（或轉換系数），在全部条件一并平差的情况下利用各L以求权倒数$\frac{1}{p_F}$的理論，各書多有論述。在此处分組平差的情况下，按改化后的条件方程式系可完全代替原來条件之理，亦易証明（19）至（22）式之成立。

（圖一）



茲以（圖一）为例，詳述以上理論之应用。（圖一）中A、B、C为已知坐标之点，I为新插入之点，即所求点。1，2，…9为实測之角，須待平差。此类圖形有極条件一，有角条件七个但独立者僅有六个。茲采用三个『和角条件』为第一組，其閉合差为w_a、w_b、w_c；三个『三角形条件』为第二組，其閉合差为w_1、w_2、w_3；極条件为第三組，其閉合差ω設为由前兩組之單独平差值算得者。这些条件方程式甚易推求，不必贅述，列之于下表，較为醒目而便于应用：

（表一） 原有之条件方程式表

条件分組	条件类别	系数的記号	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	$=-w$
第一組	和角条件	a				1	1					$-w_a$
		b						1	1			$-w_b$
		c								1	1	$-w_c$
第二組	三角形条件	a′	1			1					1	$-w_1$
		b′		1			1	1				$-w_2$
		c′			1				1	1		$-w_3$
第三組	邊条件	a				Δ_4	$-\Delta_5$	Δ_6	$-\Delta_7$	Δ_8	$-\Delta_9$	$-\omega$

表中v_i代表角度 i 的改正数，Δ_i 代表$log\ Sin\ i$ 的1″表差，Δ_i与ω同以对数第六位为單位。

由第一組条件單独平差，甚易求出相应于（4）与（12）式之k'与v'_i；

$$k'_1=-\frac{1}{2}w_a,\quad k'_2=-\frac{1}{2}w_b,\quad k'_3=-\frac{1}{2}w_c \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} v'_1=v'_2=v'_3=0,\quad v'_6=v'_7=-\frac{1}{2}w_b \\ v'_4=v'_5=-\frac{1}{2}w_a,\quad v'_8=v'_9=-\frac{1}{2}w_c \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

由（表一）求出：

$$\left.\begin{array}{lll}[aa']=1, & [ba']=0, & [ca']=1 \\ [ab']=1, & [bb']=1, & [cb']=0 \\ [ac']=0, & [bc']=1, & [cc']=1\end{array}\right\} \quad (25)$$

参照（5）、（6）、（7）式与（4）式之关系，將（25）式代入（23）式中之相应値，得助联系数如下：

$$\left.\begin{array}{lll}\rho_{a1}=-\dfrac{1}{2}, & \rho_{a2}=-\dfrac{1}{2}, & \rho_{a3}=0 \\ \rho_{b1}=0, & \rho_{b2}=-\dfrac{1}{2}, & \rho_{b3}=-\dfrac{1}{2} \\ \rho_{c1}=-\dfrac{1}{2}, & \rho_{c2}=0, & \rho_{c3}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$

將上式与（表一）中a、b、c、w之値代入（9）式，得：

$$\left.\begin{array}{lll}A'_1=a'_1=1, & A'_4=a'_4+\rho_{a1}=\dfrac{1}{2}, & A'_7=\rho_{b1}=0 \\ A'_2=0=0, & A'_5=\rho_{a1}=-\dfrac{1}{2}, & A'_8=\rho_{c1}=-\dfrac{1}{2} \\ A'_3=0=0, & A'_6=\rho_{b1}=0, & A'_9=a'_9+\rho_{c1}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll}B'_1=0=0, & B'_4=\rho_{a2}=-\dfrac{1}{2}, & B'_7=\rho_{b2}=-\dfrac{1}{2} \\ B'_2=b'_2=1, & B'_5=b'_5+\rho_{a2}=\dfrac{1}{2}, & B'_8=\rho_{c2}=0 \\ B'_3=0=0, & B'_6=b'_6+\rho_{b2}=\dfrac{1}{2}, & B'_9=\rho_{c2}=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll}
C'_1 = 0 = 0, & C'_4 = \rho_{a3} = 0, & C'_7 = c'_7 + \rho_{b3} = \frac{1}{2} \\
C'_2 = 0 = 0, & C'_5 = \rho_{a3} = 0, & C'_8 = c'_8 + \rho_{c4} = \frac{1}{2} \\
C'_3 = c'_3 = 1, & C'_6 = \rho_{b8} = -\frac{1}{2}, & C'_9 = \rho_{c8} = -\frac{1}{2}
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
w'_1 = w_1 + w_a\rho_{b1} + w_c\rho_{c1} = w_1 - \frac{1}{2}w_a \\
\qquad - \frac{1}{2}w_c = w_1 + v'_4 + v'_9 \\
w'_2 = w_2 + w_a\rho_{a2} + w_b\rho_{b2} = w_2 - \frac{1}{2}w_a \\
\qquad - \frac{1}{2}w_b = w_2 + v'_5 + v'_6 \\
w'_3 = w_3 + w_b\rho_{b3} + w_c\rho_{c3} = w_3 - \frac{1}{2}w_b \\
\qquad - \frac{1}{2}w_c = w_2 + v'_7 + v'_8
\end{array}\right\} \quad (26)$$

于是第一第二兩組条件改化为『等值』方程式系以及第三組条件幷列如下表所示：

（表二）　第二組条件改化后之条件方程式表

条件分組	条件类别	系数的記号	v_1	v_2	a_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	$=-w$
第一組	和角	a				1	1					$-wa$
		b						1	1			$-wb$
	条件	c								1	1	$-wc$
第二組	改化后	A′	1			0.5	-0.5			-0.5	0.5	$-w_1'$
	之三角	B′		1		-0.5	0.5	0.5	-0.5			$-w_2'$
	形条件	C′			1			-0.5	0.5	0.5	-0.5	$-w_3'$
第三組	極条件	α				Δ_4	$-\Delta_5$	Δ_6	$-\Delta_7$	Δ_8	$-\Delta_9$	$-\omega$

第二組改化条件的联系数法方程式为：

$$\left.\begin{aligned} 2k_1''-0.5k_2''-0.5k_3''+w_1'&=0\\ -0.5k_1''+2k_2''-0.5k_3''+w_2'&=0\\ -0.5k_1''-0.5k_2''+2k_3''+w_3'&=0 \end{aligned}\right\}$$

解之，得相应于（10）式之式：

$$\left.\begin{aligned} k_1''&=-0.6w_1'-0.2w_2'-0.2w_3'\\ k_2''&=-0.2w_1'-0.6w_2'-0.2w_3'\\ k_3''&=-0.2w_1'-0.2w_2'-0.6w_3' \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

由（26）式可得：

$$[w']=[w]-(w_a+w_b+w_c) \tag{28a}$$

此式右端表示三角形条件与和角条件的『閉合差之和』的差数，

甚易証明此差数应等于"水平条件"($v_1+v_2+v_3+wg=0$) 的閉合差wg，于是

$$[w']=wg=\angle 1+\angle 2+\angle 3-360° \tag{28}$$

若命 $$-0.2[w']=-0.2wg=u \tag{29}$$

則（27）式可書为：

$$\left.\begin{aligned} k''_1&=u-0.4w'_1\\ k''_2&=u-0.4w'_2\\ k''_3&=u-0.4w'_3 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

参照（12）式，由（30）式与（表二）求出第二次改正数 v''_i 如下：——

$$\left.\begin{aligned} &v''_1=k''_1=u-0.4w'_1, && v''_4=0.5(k''_1-k''_2)=0.5(v''_1-v''_2)\\ &v''_2=k''_2=u-0.4w'_2, && v''_5=-0.5(k''_1-k''_2)=-v''_4\\ &v''_3=k''_3=u-0.4w'_3, && v''_6=0.5(k''_2-k''_3)=0.5(v''_2-v''_3)\\ & && v''_7=-0.5(k''_2-k''_3)=-v''_6\\ & && v''_8=0.5(k''_3-k''_1)=0.5(v''_3-v''_1)\\ & && v''_9=-0.5(k''_3-k''_1)=-v''_8 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

現在進行（表二）中第三組極条件方程式的改化，其閉合差 ω 应当用第一第二次改正后之平差值計算，以避免改化常数項之煩。由（表二）：

$$\left.\begin{aligned}
&[a\alpha]=\Delta_4-\Delta_5,\ [b\alpha]=\Delta_6-\Delta_7,\ [c\alpha]=\Delta_8-\Delta_9\\
&[A'\alpha]=\ \ 0.5(\Delta_4+\Delta_5)-0.5(\Delta_8+\Delta_9)=0.5(\sigma_a-\sigma_c)\\
&[B'\alpha]=-0.5(\Delta_4+\Delta_5)+0.5(\Delta_6+\Delta_7)=0.5(\sigma_b-\sigma_a)\\
&[C'\alpha]=-0.5(\Delta_6+\Delta_7)+0.5(\Delta_8+\Delta_9)=0.5(\sigma_c-\sigma_b)
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

上式中 $\sigma_a=\Delta_4+\Delta_5,\ \sigma_b=\Delta_6+\Delta_7,\ \sigma_c=\Delta_8+\Delta_9$ (33)

依照（13）式与（4）、（10）式的关系，將（32）式代換（23）、（27）式中的相应值，則得三組条件的助联系数：

$$\rho'_{a1}=-0.5(\Delta_4-\Delta_5),\ \rho'_{b1}=-0.5(\Delta_6-\Delta_7),\ \rho'_{c1}=-0.5(\Delta_8-\Delta_9)\quad(34)$$

$$\left.\begin{aligned}
\rho''_{A1}=&-0.6\times0.5(\sigma_a-\sigma_c)-0.2\times0.5(\sigma_b-\sigma_a)\\
&-0.2\times0.5(\sigma_c-\sigma_b)\\
\rho''_{B1}=&-0.2\times0.5(\sigma_a-\sigma_c)-0.6\times0.5(\sigma_b-\sigma_c)\\
&-0.2\times0.5(\sigma_c-\sigma_b)\\
\rho''_{C1}=&-0.2\times0.5(\sigma_a-\sigma_c)-0.2\times0.5(\sigma_b-\sigma_c)\\
&-0.6\times0.5(\sigma_c-\sigma_b)
\end{aligned}\right\}$$

命 $\sigma'_a=0.2\sigma_a,\ \sigma'_b=0.2\sigma_b,\ \sigma'_c=0.2\sigma_c$ (35)

則 $\rho''_{A1}=\sigma'_c-\sigma'_a,\ \rho''_{B1}=\sigma'_a-\sigma'_b,\ \rho''_{C1}=\sigma'_b-\sigma'_c$ (36)

將（34）、（36）式之ρ'以及（表二）中之a、b、c、A'、B'、C'之値代入（14）式，得第三組極条件之改化系数为：

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=\rho''_{A1}=\sigma'_c-\sigma'_a\\
A_2&=\rho''_{B1}=\sigma'_a-\sigma'_b\\
A_3&=\rho''_{C1}=\sigma'_b-\sigma'_c
\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

$$A_4=\Delta_4+\rho'_{a1}+0.5(\rho'_{A1}-\rho'_{B1})$$
$$=0.5(\Delta_4+\Delta_5)+0.5(-2\sigma'_a+\sigma'_b+\sigma'_c)$$

$$A_5=-\Delta_5+\rho'_{a1}-0.5(\rho'_{A1}-\rho'_{B1})$$
$$=-0.5(\Delta_4+\Delta_5)-0.5(-2\sigma'_a+\sigma'_b+\sigma'_c)$$

$$A_6=\Delta_6+\rho'_{b1}+0.5(\rho'_{B1}-\rho'_{C1})$$
$$=0.5(\Delta_6+\Delta_7)+0.5(\sigma'_a-2\sigma'_b+\sigma'_c)$$

$$A_7=-\Delta_7+\rho'_{b1}-0.5(\rho'_{B1}-\rho'_{C1})$$
$$=-0.5(\Delta_6+\Delta_7)-0.5(\sigma'_a-2\sigma'_b+\sigma'_c)$$

$$A_8=\Delta_8+\rho'_{c1}+0.5(\rho'_{C1}-\rho'_{A1})$$
$$=0.5(\Delta_8+\Delta_9)+0.5(\sigma'_a+\sigma'_b-2\sigma'_c)$$

$$A_9=-\Delta_9+\rho'_{c1}-0.5(\rho'_{C1}-\rho'_{A1})$$
$$=-0.5(\Delta_8+\Delta_9)-0.5(\sigma'_a+\sigma'_b-2\sigma'_c)$$

顧及（33）、（35）式，并命

$$\delta=0.1(\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c) \tag{38}$$

則A_4至A_9可簡寫为：

$$\left.\begin{aligned}A_4&=-A_5=\delta+\sigma'_a\\A_6&=-A_7=\delta+\sigma'_b\\A_8&=-A_9=\delta+\sigma'_c\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

最后按下式計算联系数k与第三次改正数：

$$k=-\frac{\omega}{[AA]},\ v'''_i=A_ik \tag{39}$$

此后，計算观測角之最后平差值以及所求点之坐标，至此点位之計算工作完成。現在討論点位之誤差：——