

全国第四届

非线性振动会议论文集

PROCEEDINGS
OF
THE 4th NATIONAL CONFERENCE
ON
NONLINEAR VIBRATIONS



会址：辽宁沈阳东北工学院

1986年8月18~21日

全国第四届非线性 振动会议论文集

THE PROCEEDINGS
OF
THE 4TH NATIONAL CONFERENCE
ON
NONLINEAR VIBRATIONS

会址：辽宁 沈阳 东北工学院

1986年8月

第四届全国非线性振动会议

论文集编辑委员会

主编 闻邦椿 陈予恕 徐业宜

编委：韩二中 李 骥 关立章

宋家嘯 陈秀东 纪盛青

刘 杰 金志胜

秘书：朱仕文

(筹备组曾邀请更多的同志参加此次会议论文的审查工作，不少同志因事未能参加，故上述名单中未予列入)

前 言

非线性振动是最近五十年来得到迅速发展的振动学的一个重要分支。正是由于非线性振动对自然科学和工程技术的很多分支，如：等离子物理、微电子学、近代光学与声学、自动控制、机械制造、生物工程、化学工程、近代流体力学及航天技术的发展具有重大意义。因此，目前在许多工业发达国家中有相当多的科学家和技术工作者正在从事非线性振动的研究。新中国成立以来，我国有愈来愈多的科技工作者正在从事这一方面的研究工作。

当前国内外有关非线性振动的研究工作，集中在以下几个方面：

- 1、非线性振动理论的分析方法及分叉理论。
- 2、非线性振动理论的定性方法。
- 3、非线性振动问题的数值解法。
- 4、机械工程及力学系统中的非线性振动问题。
- 5、电子学、电工技术及自动控制系统中的非线性振动问题。
- 6、生态学、生物力学、经济学、社会学、化学及近代物理学中的非线性振动问题。
- 7、非线性振动的测试方法及仪器。

自1961年起，开始定期召开国际非线性振动学术会议。1961年至1969年每两年召开一次（第一届至第五届），1969年至1984年每三年召开一次（第五届至第十届）。1981年，我国代表陈予恕、闻邦椿两位同志首次参加了在苏联基辅召开的第九届国际非线性振动会议，共宣读了四篇论文。1984年，陈予恕、闻邦椿、凌复华三位同志参加了在保加利亚瓦尔纳召开的第十届国际非线性振动会议，共宣读了五篇论文。

自1979年起直至今天，我国也相继召开了四次全国非线性振动会议。

第一届全国非线性振动会议，1979年10月于山东济南召开，由山东工业大学负责筹备，会上共做了十几个专题讲座，宣读了十多篇学术论文。

第二届全国非线性振动会议，1981年11月于安徽黄山召开，由华东冶金学院负责筹备，会上共宣读了九十余篇论文。

第三届全国非线性振动会议，1983年11月于天津市召开，由天津大学负责筹备，会上共宣读了一百多篇论文。

第四届全国非线性振动会议将于1986年8月在辽宁沈阳召开，由东北工学院负责筹备，会议筹备组共收到一百零六篇论文，现有八十一篇论文收集到会议论文集。

从这几次会议情况看来，我国关于非线性振动的研究正在沿着理论与我国四化建设的实践相结合的道路不断深入发展，目前我国关于非线性振动的科研队伍已经形成。在国内从事数学、力学及工程技术的科技工作者正在同心协力，为发展我国的非线性振动事业进行着不懈的努力。这几次全国非线性振动学术会议对推动我国的非线性振动及相邻学科的发展起到了积极作用。

我们编辑这本论文集是召开全国非线性振动会议以来的第一次尝试。由于时间紧迫，经验不足，我们未对论文内容逐一进行仔细审阅。为了贯彻“百花齐放，百家争鸣”的方针，以促进学术交流，我们将作者寄来的绝大部分论文都收集到这本论文集中。该论文集的编辑工作一定有很多不足之处，望读者见谅。

全国第四届非线性振动学术会议论文集编辑委员会

1986年7月5日

目 录

一、工程中的非线性问题

不对称分段线性振动离必机的动力学特性·····	1
东北工学院 闻邦椿	
·多自由度滞变体系在地震作用下的模糊随机振动·····	8
哈尔滨建筑工程学院 王光远、欧进萍	
非理想能源条件下动力消振器的特性·····	19
东北工学院 关立章	
振动机械在共振区内的自同步问题·····	25
东北工学院 关立章 闻邦椿	
三平米模型非线性共振筛振动实验研究·····	34
天津大学 霍拳忠 朗作贵 吴方升 金志胜 王继宗	
用多重尺度法对柴油机曲轴变惯量扭振问题的研究·····	40
天津大学 吴建国	
支承在非线性弹簧上的转子—轴承—弹性基础系统的不平衡响应与隔振分析·····	48
北京钢铁学院 孙衍全 东北工学院 闻邦椿	
惯性共振式振动刨的动力学特性·····	56
福州大学 严世榕 东北工学院 闻邦椿	
·弹性不对称分段线性系统受迫振动的分析·····	62
东北工学院 张天侠 闻邦椿	
弱非线性惯性共振式振动机的振幅的稳定性问题·····	72
东北工学院 刘杰	
具有非线性和变参数多自由度系统对随机激励的响应及应用·····	79
东北工学院 纪盛青	
考虑间隙时初轧机主传动系统自激振动分析·····	85
东北工学院 王铁光	
电力系统中的非线性振动·····	96
南京工学院 王政贤	
冲击式锤锻机的动力分析·····	103
东北工学院 段志善 闻邦椿	

凿岩机机体运动的数值解.....	113
东北工学院 戚靖洋 张国忠 闻邦椿	
自同步垂直振动机动力学参数的数值方法.....	120
上海建筑材料工业学院机电系 陈宇明 杨小宇 丁志华	
分段线性振动机械的数值计算方法.....	129
东北工学院 李东升 闻邦椿	
机床颤振的非线性数学模型及其数字仿真.....	134
华中工学院 师汉民 卢天贶	
各向异性支承中的单盘转子过临界点时的瞬态响应.....	143
上海交通大学 方之楚 骆振黄	
用附加 δ 函数谱计算非线性结构随机振动的响应.....	154
同济大学 张相庭	
双线型恢复力结构随机风振响应的研究.....	160
同济大学 张相庭	
中长圆柱形挤压油膜阻尼装置对于中心摆动的阻尼作用.....	167
中国纺织大学 马淦林	
交流电动机失稳自激的电振荡与机械振动.....	175
天津大学 邱家俊	
经济发展过程中的混沌现象——对经济发展的非线性振动模型初探.....	186
中国科学院力学研究所 缪经良	
心脏跳动数学方程的最简形式表明——心脏跳动是自激振动.....	190
中国科学院力学研究所 缪经良	
关于弹簧摇床的非线性动力学研究.....	193
沈阳建筑工程学院 彭世德 东北工学院 闻邦椿	
采用基础隔振器结构的地震响应分析.....	201
同济大学 冯奇	

二、非线性振动理论的分析方法

多频激励下Duffing系统的研究.....	209
天津大学 陈予恕 金志胜 石家庄铁道学院 杨绍普	
作用有干摩擦阻尼的质量块受随机推力时的速度分析.....	216
浙江大学 庄表中 吉林职业师范学院 焦岩	
有随机系数多自由度的自激振动.....	222
合肥工业大学 徐业宜	

· 一种确定一类非线性系统混沌参数域的方法·····	230
天津大学 李骊 金志胜 裴钦元	
· 由双重摄动法讨论非线性特性·····	229
中国科学院力学研究所 欧阳怡 缪经良	
· 一类碰撞振动系统的稳定性研究·····	243
东北工学院 耿厚才 李景正	
· 双参数系统的渐近解法·····	248
中山大学 徐兆 张今奇	
· 有间隙系统的自激振动·····	250
合肥工业大学 徐业宜	
· 关于强非线性振动系统的某些解法研究·····	262
天津大学 金志胜	
· 有干摩擦力作用的非线性振动系统的性态·····	269
上海交通大学 杨长俊	
· 耦合非线性振荡系统周期运动的一种分叉·····	277
西安交通大学 徐健学	
· 强非线性动力方程的渐近分析·····	285
西南交通大学 曹登庆	
· 强迫参数激励非线性振子的全局分叉和混沌·····	294
北京航空学院 林锐 黄克累 天津大学 金志胜	
✓ 非线性振动系统参数估计的一种统计方法·····	301
重庆大学 邱盛林 徐饴陶	
✓ 求解非线性动力平衡方程边值问题的加权残数——打靶法·····	306
重庆大学 殷学纲 陈淮	
· 求解一类强非线性振动系统强迫振动的近似解析法——参数展开平均法·····	313
天津大学 金志胜	
· 中心流形定理在多自由度非线性自治系统Hopf分叉中的应用·····	315
天津大学 苏本才 金志胜	
· 弹性圆锥偏壳的非线性强迫振动周期解·····	325
天津大学 霍增春	
· 大阻尼系统的非线性随机振动分析·····	335
中国科学院力学研究所 缪经良	
✓ 两自由度系统的非线性随机振动·····	339
河北工学院 安应琪	

一类非线性系统的分析.....	348
长沙铁道学院 谢柳辉	
弱非线性系统在冲击载荷下响应的优化.....	354
吉林大学 梁艳春 王在申	
单自由度非线性振动的计算机辅助分析.....	359
北京农业工程大学 鲍妍光	
✓多自由度系统的非线性振动传递函数.....	366
湖南大学 唐驾时	
✕受横向集中随机载荷作用的弹性梁杆的随机参数振动.....	373
沈阳冶金机械学校 任广福 东北工学院 关立章	
求非线性自治系统周期解的打靶法.....	380
青岛建工学院 袁惠群 东北工学院 关立章 王铁光	
✓二维系统的渐近解法.....	386
中山大学 徐兆	
一种新的结构阻尼模型.....	395
中国科学院力学研究所 缪经良 欧阳怡	
✓变系数振动系统的振动条件.....	401
合肥工业大学 张长波 中科院应用数学所 俞元洪 合肥工业大学 徐业宜	
两自由度耦合vanderpol振子的拟主振动解.....	404
北京航空学院 刘炼生 黄克累	
扁球壳的非线性固有频率.....	414
甘肃工业大学 王新志 韦朴 西安公路学院 王晋堂	
✕纵横激励下简支梁的非线性响应.....	421
东北工学院 于树栋 关立章	
✕弹性梁动力稳定性及非线性响应的理论与实验研究 (I).....	426
东北工学院 于树栋 关立章	
✕弹性梁动力稳定性及非线性响应的理论与实验研究 (II).....	433
东北工学院 于树栋 关立章	

三、非线性振动的稳定性问题及研究方法

△分维的概念、计算和应用.....	439
上海交通大学 凌复华	
状态函数零点与极限环 (II).....	445
大连工学院 陈秀东	

粗糙平面上旋转充液腔体的稳定问题.....	452
天津大学 李 颀 林荣信	
用 <i>MELNIKOV</i> 方法对 <i>DUFFING</i> 型方程的数值研究.....	458
上海交通大学 何治奇 凌复华	
带有5次非线性恢复力的 <i>Duffing</i> 方程的突变分析.....	467
上海交通大学 包光伟 凌复华	
关于 <i>Melnikov</i> 方法的数值计算.....	474
上海交通大学 包光伟 凌复华	
带参数的二维点映射分叉及混沌性态的数值研究.....	481
上海交通大学 宋映东 包光伟 凌复华	
状态函数与 <i>Lienard</i> 方程的极限环.....	487
大连工学院 李嘉旭 陈秀东	
<i>Lienard</i> 方程特征点的估值和极限环存在性.....	494
大连工学院 吴焕芹 陈秀东	
复多项式求根的对分判别法.....	500
大连工学院 孙丽华 赵振海 张毓明 陈秀东	
<i>Lienard</i> 方程极限环的电子计算机计算分析.....	506
大连工学院 孙丽华 陈秀东	
一个无除法运算的复常系数线性系统的稳定性判据.....	512
大连工学院 赵振海 孙丽华 陈秀东	
参数激励项对圆柱壳体动力稳定性的影响.....	518
上海交通大学 梅海 魏焕民 凌复华	
流固耦合系统的振动和动力稳定性.....	526
上海交通大学 魏焕民 凌复华	
弹性曲杆侧倾动力稳定性研究.....	533
上海交通大学 王伟民 凌复华	
次谐分叉、稳定性和混沌.....	541
北京航空学院 林锐 陆启韶 黄克累	
一个动力稳定性问题的讨论及其应用.....	548
重庆大学 罗义银 邱盛林	
关于采用状态变量摩擦定律的摩擦振子运动稳定性分析.....	553
天津大学 储景云 柏林工业大学 科·克诺特	

非线性振动方程 $\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 = f\cos\omega t$ 的倍分枝研究和 <i>chaos</i> 现象.....	563
天津大学 姜正奎	
密封浮环自治振动运动稳定性研究.....	569
西安交通大学 张义忠 朱因远 谢壮宁	

不对称分段线性的非线性振动 离心机的动力学特性

闻 邦 楮

(东 北 工 学 院)

一、前 言

目前在煤炭工业部门, 不对称分段线性的非线性振动离心机开始得到应用。这种振动离心机用于细粒煤及煤泥的脱水能获得较良好的工艺指标。但是有关该种振动离心机的动力学特性及其动力学参数的计算方法在有关文献中尚未做过详细的分析与说明。为此, 本文将运用非线性振动理论中的渐近方法对该种振动离心机的振动系统进行分析, 并讨论其动力学参数的计算方法。

二、不对称分段线性的非线性振动离心机的力学模型及其运动的微分方程式

图1. a与b分别表示该种振动离心机的工作机构与力学模型。由图看出, 用于物料脱水的锥型转子固定于一横轴上, 横轴装于一对有止推能力的滚动轴承上, 轴承座与转子一起作轴向振动, 它借助于剪切橡胶弹簧与基座作相对振动, 基座则安装于弹性支座上。转子借固定于滚动轴承外座的双轴惯性激振器激振。在轴承外座与基座之间装有不对称分段线性的非线性弹簧。

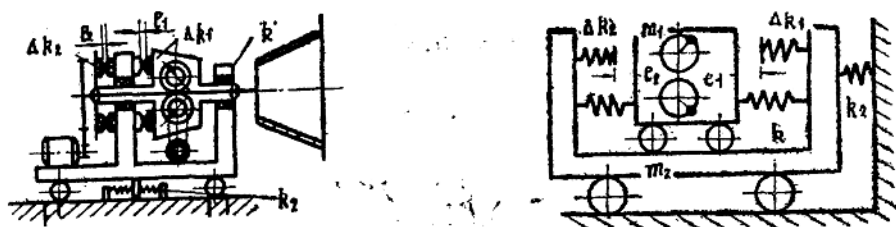


图1 不对称分段线性非线性振动离心机的工作机构与力学模型

参照力学模型图1. b, 可建立转子 (与轴承外座) (即质体 m_1) 及基座 (即质体 m_2) 沿转子轴线方向运动的微分方程式:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_m \sin^2 \beta) \ddot{\bar{Z}}_1 + F_m(\ddot{\bar{Z}}_1) + \Psi(\dot{\bar{Z}}, Z) + C_1 \dot{\bar{Z}}_1 &= m_0 v^2 r \cos vt \\ m_2 \ddot{\bar{Z}}_2 - \Psi(\dot{\bar{Z}}, Z) + k_2 \bar{Z}_2 + c_2 \dot{\bar{Z}}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

式中 m_1, m_2 —质体1 (包括 m_0) 与质体2的质量;

m_0 —偏心块质量;

$\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$ —质体1和质体2相对于静平衡位置的位移;

$\ddot{\bar{Z}}_1, \ddot{\bar{Z}}_2$ —质体1和质体2之加速度;

ν —激振器的回转角速度;

r_0 —偏心块之偏心距;

$\bar{Z}, \dot{\bar{Z}}, \ddot{\bar{Z}}$ —质体1对质体2之相对位移, 相对速度与相对加速度, $\bar{Z} = \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2$;

k_2 —质体2与基础之间的弹簧在水平方向的刚度;

c_1 —与振动质体1的速度成正比的阻尼力;

c_2 —与振动质体2的速度成正比的阻尼力;

$F_m(\ddot{\bar{Z}}_1)$ —在锥体中物料沿锥体内壁间歇滑动的非线性作用力;

$$F_m(\ddot{\bar{Z}}_1) = \begin{cases} m_m \ddot{\bar{Z}}_1 \cos^2 \beta, & \text{当 } \varphi_m(\ddot{\bar{Z}}_1) < \varphi < \varphi_k(\ddot{\bar{Z}}_1) + 2\pi \\ -m_m f \cos \beta (\omega^2 R_0 \cos \beta + \ddot{\bar{Z}}_1 \sin \beta), & \text{当 } \varphi_k(\ddot{\bar{Z}}_1) < \varphi < \varphi_m(\ddot{\bar{Z}}_1) \end{cases} \quad (2)$$

式中 m_m —锥体中的物料的质量;

R_0 —物料在锥体中的当量外径;

ω —锥体的转动角速度;

f —物料沿锥体滑动的摩擦系数;

β —锥体锥角之半;

$\varphi_k(\ddot{\bar{Z}}_1)$ —与锥体轴向振动加速度有关的物料开始沿锥体滑动之振动相位角;

$\varphi_m(\ddot{\bar{Z}}_1)$ —与锥体轴向振动加速度有关的物料停止沿锥体滑动之振动相位角;

$\Psi(\dot{\bar{Z}}, \bar{Z})$ —线性及非线性弹簧的作用力;

$$\Psi(\dot{\bar{Z}}, \bar{Z}) = \begin{cases} c\dot{\bar{Z}} + k\bar{Z}, & \text{当 } -e_2 < \bar{Z} < e_1, \\ (C + \Delta C_1)\dot{\bar{Z}} + k\bar{Z} + \Delta k_1(\bar{Z} - e_1), & \text{当 } \bar{Z} > e_1, \\ (C + \Delta C_2)\dot{\bar{Z}} + k\bar{Z} + \Delta k_2(\bar{Z} + e_2), & \text{当 } \bar{Z} < -e_2 \end{cases} \quad (3)$$

式中 C —与线性弹簧刚度及成正比的阻尼系数;

$\Delta C_1, \Delta C_2$ —与间隙弹簧刚度 $\Delta k_1, \Delta k_2$ 成正比的阻力系数;

k —线性弹簧刚度;

$\Delta k_1, \Delta k_2$ —间隙弹簧的刚度;

e_1, e_2 —右间隙弹簧与左间隙弹簧的间隙。

由于左右间隙弹簧刚度及间隙的不对称性, 当机器正常工作时, 在一次近似情况下的振

动中心将偏离静平衡位置。设质体1和2分别偏离 d_1 和 d_2 。因为质体2下有弹簧 k_2 ，所以 $d_2 = 0$ ，而 $d = d_1$ 。

根据能量平衡条件，若不考虑物料摩擦力的影响，便可求得一次近似情况下的振动中心之坐标 d ：

$$d = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

式中 $A = \Delta k_1 - \Delta k_2$, $B = -2[(a_r - e_1)\Delta k_1 + (a_r - e_2)\Delta k_2 - 2k]$

$$C = \Delta k_1(a_r - e_1)^2 - \Delta k_2(a_r - e_2)^2 \quad (4)$$

式中 a_r ——一次近似情况下的相对振幅。

为了进行计算，我们将进行坐标变换：

$$Z = Z + d \quad (5)$$

同时，为了提高计算的精度，我们建立以下方程：

$$m'_1 \ddot{Z}_1 + K(Z_1 - Z_2) = \varepsilon Q_1 + \varepsilon m_0 v^2 r \cos vt \quad (6)$$

$$m_2 \ddot{Z}_2 - K(Z_1 - Z_2) + k_2 Z_2 = \varepsilon Q_2,$$

$$K = k + k_e, \quad m'_1 = m_1 + m_m \sin^2 \beta$$

式中 k_e ——用等效线性化得出的等效弹簧刚度，可按式(7)进行近似计算。

$$k_e = k + \Delta k_1(\varphi_{01} - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{01}) - \Delta k_2(\varphi_{02} - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{02}) \quad (7)$$

其中 $\varphi_{01} = \arccos(e_1 + d)/a_r$,

$$\varphi_{02} = -\arccos(e_2 - d)/a_r \quad (8)$$

这时，非线性作用力：

$$\varepsilon Q_1 = \varepsilon Q_{11} + \varepsilon Q_{12}$$

$$\varepsilon Q_{11} = \begin{cases} -m_m \cos^2 \beta \ddot{Z}_1 & \text{当 } \varphi_m(\ddot{Z}_1) < \varphi < \varphi_k(\ddot{Z}_1) + 2\pi \\ m_m f \cos \beta (\omega^2 R_0 \cos \beta + \ddot{Z}_1 \sin \beta), & \text{当 } \varphi_k(\ddot{Z}_1) < \varphi < \varphi_m(\ddot{Z}_1) \end{cases}$$

$$\varepsilon Q_{12} = \begin{cases} -C\dot{Z} + k_e Z, & \text{当 } -(e_2 - d) < Z < e_1 + d \\ -(C + \Delta C_1)\dot{Z} + k_e Z - \Delta k_1(Z - e_1 - d) & \text{当 } Z > e_1 + d \\ -(C + \Delta C_2)\dot{Z} + k_e Z - \Delta k_2(Z + e_2 - d) & \text{当 } Z < -(e_2 - d) \end{cases}$$

$$\varepsilon Q_2 = \begin{cases} -\varepsilon Q_1 - C_2 \dot{Z}_2, & \text{当 } -(e_2 - d) < Z < e_1 + d \\ -\varepsilon Q_1 - C_2 \dot{Z}_2, & \text{当 } Z > e_1 + d \\ -\varepsilon Q_1 - C_2 \dot{Z}_2, & \text{当 } Z < -(e_2 - d) \end{cases} \quad (9)$$

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 - \dot{Z}_2, \quad Z = Z_1 - Z_2$$

下面我们进一步求方程的解。

三、非线性方程的一次近似解与改进的一次近似解

该种振动离心机通常是在第二固有频率的邻近工作。为了将方程变换到第二主坐标上，

我们设:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \Psi_1^{(2)} Z_0 = \Psi_1^{(2)} a \cos \varphi \\ Z_2 &= \Psi_2^{(2)} Z_0 = \Psi_2^{(2)} a \cos \varphi \\ Z_0 &= a \cos \varphi, \quad \varphi = vt + \theta \end{aligned} \quad (10)$$

二阶振型函数 $\Psi_1^{(2)}$, $\Psi_2^{(2)}$ 及固有频率分别可由以下方程求出:

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(2)} &= 1 \\ \Psi_2^{(2)} &= (k - m_1' \omega_1^2) / K = K / (K + k_2 - m_2 \omega_2^2) \\ m_1' m_2 \omega_j^4 - [(K + k_2) m_1' + K m_2] \omega_j^2 + K k_2 &= 0 \\ j &= 1, 2 \end{aligned} \quad (11)$$

将式 (10) 代入方程 (6) 中, 得第二主坐标上的方程:

$$m (\ddot{Z}_0 - \omega_2 Z_0) = \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r Q_r \Psi_r^{(2)} + \varepsilon \sum_{r=1}^2 E_r \Psi_r^{(2)} \cos vt \quad (12)$$

其中

$$m = m_1' \Psi_1^{(2)2} + m_2 \Psi_2^{(2)2}, \quad E_1 = m_0 v^2 r, \quad E_2 = 0 \quad (13)$$

式中 m — 第二主质量;

ω_2 — 第二固有频率。

方程 (10) 中的 a 与 θ 可由下式决定:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_*^{(2)} a - \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r E_r \Psi_r^{(2)} \cos \theta / m (\omega_2 + v) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1^{(2)} - v + \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r E_r \Psi_r^{(2)} \sin \theta / m a (\omega_2 + v) \end{aligned} \quad (14)$$

等效衰减率 $\delta_*^{(2)}$ 与等效固有频率 $\omega_*^{(2)}$ 可由下式求出:

$$\begin{aligned} \delta_*^{(2)} &= \frac{1}{2\pi m \omega_2 a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r Q_r^{(2)}(a, \varphi) \Psi_r^{(2)} \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{2m_1} \{ C_2 \Psi_1^{(2)2} + [C + \frac{\Delta C_1}{\pi} (\varphi_{01} - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_{01}) - \\ &\quad - \frac{\Delta C_2}{\pi} (\varphi_{02} - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_{02})] (\Psi_1^{(2)} - \Psi_2^{(2)})^2 + (C_1 + \frac{A_1}{va}) \frac{1}{\omega_1} \Psi_1^{(2)2}, \\ \omega_*^{(2)} &= \omega_2 - \frac{1}{2\pi m \omega_2 a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r Q_r^{(2)}(a, \varphi) \Psi_r^{(2)} \cos \varphi d\varphi \\ &= \omega_2 + \frac{1}{2\pi m \omega_2} [\Delta k (\varphi_{01} - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_{01}) - \Delta k_2 C (\varphi_{02} - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_{02}) - \pi k_*] \\ &\quad (\Psi_1^{(2)} - \Psi_2^{(2)})^2 \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\ddot{Z}_1) \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{m_m v^2 a \cos \beta}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos \beta \sin^2 \varphi \frac{\varphi_k}{\varphi_m} - f \left(-\frac{\omega^2 R_c \cos \beta}{v^2 a} \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin \delta \sin^2 \varphi \right) \frac{\varphi_m}{\varphi_k} \right] \end{aligned}$$

$$M' = \Psi_1^{(2)2} (m_1 + m_m (\sin^2 \beta - \frac{B_1}{m_m v^2 a \Psi_1^{(2)}})) + \Psi_2^{(2)} m_2$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\ddot{Z}_1) \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{m_m v^2 a \Psi_1^{(2)} \cos \beta}{\pi} \left\{ -\frac{1}{2} \cos \beta (\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \right\} \frac{\varphi_k + f}{\varphi_m} \left[-\frac{\omega^2 R_0 \cos \beta}{v^2 a \Psi_1^{(2)}} \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin \beta (\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi) \right] \frac{\varphi_m}{\varphi_k} \end{aligned} \quad (16)$$

在定常情况下, $\frac{da}{dt} = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, 于是可得以下方程:

$$m_1^2 a^2 [(\omega_e^{(2)2} - v^2)^2 + 4\delta_e^{(2)2} v^2] = E^{(2)2}$$

$$\theta = \arctg(\omega_e^{(2)2} - v^2) / 2\delta_e^{(2)} v$$

$$\text{其中 } E^{(2)} = E_1 \Psi_1^{(2)} + E_2 \Psi_2^{(2)} \quad (17)$$

根据以上方程, 可作出不对称分段线性的非线性系统的幅频响应曲线与相频曲线(图2)。

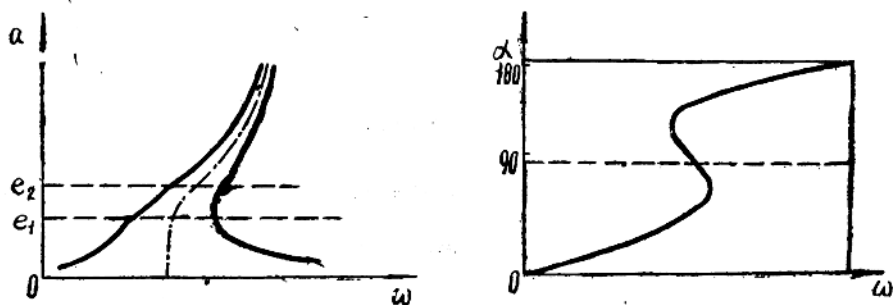


图2 幅频与相频曲线图

由图可见, 幅频响应曲线具有硬式非线性的特性。该种非线性振动机通常工作在亚共振区域内, 即系统的工作频率 ω 略低于系统的二阶固有频率 $\omega_e^{(2)}$ 。通常取

$$\omega = 0.85 \sim 0.95 \omega_e^{(2)} \quad (18)$$

该系统的改进的一次近似解

$$Z = \Psi_s^{(2)} a \cos \varphi + \varepsilon u_s^{(2)}(a, \varphi) \quad (19)$$

$$s = 1, 2 \dots$$

其中

$$\begin{aligned} u_s^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_r^{(2)} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^n \Psi_r^{(2)} Q_{r0}^{(2)}(a, \varphi) e^{-i n v t} d\varphi}{m (w_r^{(2)2} - (n v)^2)} \times e^{i n v t} \\ s &= 1, 2 \end{aligned} \quad (20)$$

将 $Q_{r0}^{(2)}(a, \varphi)$ 代入上式, 若首先不考虑 $F_m(\ddot{Z}_1)$ 的影响, 並化简, 可得:

$$\begin{aligned}
 Z_s &= \Psi_s^{(2)} a \cos \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} \Psi_s^{(2)} [\Psi_1^{(2)} - \Psi_2^{(2)}]^2 \cdot \frac{a}{\pi m_1 \omega_2^2 (1-n^2)} \cdot \\
 &\quad \cdot [(\Delta k_1 C_{n1} - \Delta k_2 C_{n2}) \cos n\varphi + w_2 (\Delta C_1 D_{n1} - \Delta C_2 D_{n2}) \sin n\varphi] \\
 C_{n1} &= \frac{2}{n} \cos \varphi_{01} \sin n\varphi_{01} - \frac{\sin(n-1)\varphi_{01}}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\varphi_{01}}{n+1} \\
 C_{n2} &= \frac{2}{n} \cos \varphi_{02} \sin n\varphi_{02} - \frac{\sin(n-1)\varphi_{02}}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\varphi_{02}}{n+1} \\
 D_{n1} &= \frac{\sin(n-1)\varphi_{01}}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\varphi_{01}}{n+1} \\
 D_{n2} &= \frac{\sin(n-1)\varphi_{02}}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\varphi_{02}}{n+1}
 \end{aligned} \quad (21)$$

若考虑 $F_m(\ddot{Z}_1)$ 的影响, 我们同样可以用前面介绍的方法求得由于物料弹动而引起的高次谐波成分的具体数值。

四、不对称分段线性非线性振动离心机的高次谐波成分的理论结果与试验结果

该种振动离心机与线性振动离心机的基本区别是具有明显的高次谐波成分。只要将具体数值代入式 (21) 中, 即可求得各高次谐波成分的幅值。

若振动离心机的参数为 $\Delta k_1/K = 2.5$, $\Delta k_2 = 0$, $(e+d)/a_r = 0.5$, 则振动离心机轴向振动的位移与加速度的各次谐波成分为:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= a [\cos \varphi + 0.1148 \cos 2\varphi + 0.0215 \cos 3\varphi + 0.00229 \cos 4\varphi + \dots] \\
 \ddot{Z}_1 &= -av^2 [\cos \varphi + 0.4594 \cos 2\varphi + 0.1938 \cos 3\varphi + 0.0367 \cos 4\varphi + \dots]
 \end{aligned} \quad (22)$$

由以上结果看出, 对于不对称的非线性振动系统, 除了奇数次谐波之外, 还有偶数次谐波。同时, 还可以看出, 高次谐波加速度的值与一次谐波加速度相比, 有相当高的比例, 它对机器零部件的强度有相当大的影响, 计算时不能忽略。

对于对称的分段线性非线性系统, 当 $\Delta k_1 = \Delta k_2$, 而且当 $e_1 = e_2 = 0.5a_r$, $\Delta k_1/K = 2.5$ 时, 振动离心机轴向振动的位移与加速度的各次谐波成分可由下式表示:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= a (\cos \varphi + 0.0430 \cos 3\varphi + 0.0028 \cos 5\varphi + \dots) \\
 \ddot{Z}_1 &= -av^2 (\cos \varphi + 0.3876 \cos 3\varphi + 0.07177 \cos 5\varphi + \dots)
 \end{aligned} \quad (23)$$

由上式看出, 对于对称的分段线性的非线性系统, 在高次谐波成分中, 不包括偶数次谐波成分。同样, 高次谐波加速度与一次谐波加速度相比, 有相当大的比值。

图3a、b所示的分别为不对称及对称非线性系统的试验加速度曲线。对于不对称非线性系统, 其加速度也是不对称的, 对于对称的非线性系统, 其加速度是对称的。

当振动离心机的某些零部件的固有频率与这些高次谐波成分的频率相接近时, 可能会产生共振, 使其动变形及动应力增大。因此, 应尽力避免使这些零部件发生高次谐波共振。通常在设计时, 使零部件的固有频率大于工作频率的5倍。因为在这些情况下, 高次谐波成分的幅值已显著减小。