万学教育·海文考研

考研数学图书系列

2011

考研数学

标准全书习题详解

（数学一、数学二）

一本创造无数满分奇迹的数学经典

万学海文名师团队

王式安 1987-2001年全国硕士研究生入学考试数学命题组资深专家

蔡燧林 1992-2000年全国硕士研究生入学考试数学命题组资深专家

胡金德 1989-2001年全国硕士研究生入学考试数学命题组资深专家

程杞元 全国硕士研究生入学考试数学阅卷组资深专家

编著

万学教育·海文考研数学图书系列

《考研数学基础训练经典题集》（理工类）
《考研数学基础训练经典题集》（经济类）
《考研数学标准全书》（数学一、数学二）
《考研数学标准全书》（数学三）
《考研数学历年真题权威解析》（数学一）
《考研数学历年真题权威解析》（数学二）
《考研数学历年真题权威解析》（数学三）
《考研数学必备公式手册》
《考研数学成功冲刺模拟卷》（数学一）
《考研数学成功冲刺模拟卷》（数学二）
《考研数学成功冲刺模拟卷》（数学三）

王式安

原北京理工大学研究生院副院长、应用数学系副主任，教授，美国哥伦比亚大学、南佛罗里达大学、纽约大学等大学的访问教授，享受国务院政府特殊津贴的数学专家。曾任教育部考试中心考研数学命题组成员（1987-2001年）。

蔡燧林

原浙江大学数学系副主任、教授，1992年起享受国务院政府特殊津贴的数学专家。曾任教育部考研数学（数学一和数学二）命题组组长（1992-2000年），浙江省考研数学阅卷组成员，考研高等数学最权威辅导专家。

胡金德

清华大学教授，清华大学版《线性代数》的主要著作人。曾任教育部考研数学命题组线性代数组组长、总负责人(1989-2001年)，北京地区硕士研究生入学考试数学阅卷部（由15个阅卷组组成）总负责人(1997-2001年)。

程杞元

原北京理工大学应用数学系主任，教授。曾任全国硕士研究生入学考试数学阅卷组副组长，著名考研辅导专家，以巧思妙解见长，深受广大考研学子推崇。

-70

目 录

第一篇 高等数学

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇 高等数学

第一章 函数 极限 连续

一、选择题

1.【解】 因$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}$，由标准全书 P.5 定理 1.1.2(1) 知存在$\delta>0$，当$0<x<\delta$时$f(x)$有界.

因$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+1}{x^3+x^2}=1$，由定理 1.1.2(2) 知，存在$X>0$，当$x\in(X,+\infty)$时$\dfrac{x^3+x+1}{x^3+x^2}$有界，又$|1-\cos x|\leqslant 2$，所以当$x\in(X,+\infty)$时$f(x)$有界. 又$f(x)$在$[\delta,X]$上连续，从而有界. 综合之，$f(x)$在$(0,+\infty)$上有界. 选[D].

2.【解】 若$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在，而由已知$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在矛盾，故$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$必不存在. 选[C].

3.【解】 ①、②、③、④都不正确. 选[A].

① 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant 0,\\ -1, & \text{当 } x<0.\end{cases}$ $f(x)$在$x=0$处间断，而$|f(x)|$在$x=0$处连续. ② 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0.\end{cases}$ 有$\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0-h)=1$，而$f(x)$在$x=x_0$处并不连续. ③ 的反例：设$f(x)$在$x=x_0$连续且$f(x_0)=0$，$g(x)$在$x=x_0$的邻域有定义且有界但不连续，则显然有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0=f(x_0)g(x_0)$，$f(x)g(x)$在$x=x_0$连续. ④ 的反例：$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $f(x)+g(x)\equiv 0$，它在$x=0$是连续的.

4.【解】 由题设$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=c_1\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{x-x_0}=c_2\neq 0$. 故$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)g(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{x-x_0}=0\cdot c_2=0$. 选[C].

5.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}e^x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x-x}-1}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^n}\xlongequal{\text{洛}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2x-1}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2x}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{nx^{n-1}}\xlongequal{\text{当 } n=3 \text{ 时}}\dfrac{1}{3}$. 所以$n=3$，选[C].

6.【解】 由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，$a<b$，所以$\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)-f(x))=b-a>0$. 由保号性定理知，存在去心邻域$\mathring{U}_\delta(x_0)$，当$x\in\mathring{U}_\delta(x_0)$有$g(x)-f(x)>0$. 选[D]. 其他均可举出反例.

7.【解】 先写出选项中各个函数的具体表达式.

(A) 因在$x=0$的去心邻域$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{|x|}$，所以$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，故$\max\{f(x),g(x)\}=1$，它处处连续.

(B) $\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 它在$x=0$处也连续.

(C) $f(x)-g(x)=\begin{cases}1-x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0\\ -1, & \text{当 } x=0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin\dfrac{1}{x})=1\neq f(0)-g(0)$

$=-1$,所以 $x=0$ 为它的间断点.

(D) $f(x)+g(x)=\begin{cases}1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$,$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=1=f(0)+g(0)$. 所以 $x=0$ 为它的连续点. 选[C].

8.【解】先求极限得出 $f(x)$ 的表达式:$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ \dfrac{1+x}{2}, & |x|=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,可知 $x=\pm 1$ 为 $f(x)$ 的分段点. 由表达式可知 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点,$x=-1$ 为 $f(x)$ 的连续点. 选[B].

[**注**]:由极限表示的函数,欲讨论此函数的性质,必须分两步,先写出此函数的表达式再讨论.

9.【解】考虑分母为 0 处. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{洛}-1$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}=1$. 所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. 选[B].

二、填空题

10.【解】按复合关系先写出 $f(f(x))=\begin{cases}-f(x), & 当 f(x)\geqslant 0\\ \dfrac{1}{1-f(x)}, & 当 f(x)<0\end{cases}$,

再将题给的 $f(x)$ 的表达式代入上式右边,得

$$f(f(x))=\begin{cases}-(-x), & 当 -x\geqslant 0, x\geqslant 0\\ -\dfrac{1}{1-x}, & 当 x<0, \dfrac{1}{1-x}\geqslant 0\\ \dfrac{1}{1-(-x)}, & 当 x\geqslant 0, -x<0\\ \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}, & 当 x<0, \dfrac{1}{1-x}<0\end{cases},$$

化简上式右边,第 4 式的定义域为空集,删去之,得

$$f(f(x))=\left\{\begin{matrix}x, & 当 x=0\\ \dfrac{1}{x-1}, & 当 x<0\\ \dfrac{1}{x+1}, & 当 x>0\end{matrix}\right\}=\frac{\operatorname{sgn}x}{1+|x|}, 当 x\in(-\infty,+\infty).$$

11.【解】因为在 $[0,1]$ 上 $f(x)=nx(1-x)^n$ 可取最大值,最大值 >0. 但在端点处 $f(0)=f(1)=0$. 故存在 $x_0\in(0,1)$ 使 $f(x)$ 在 x_0 取最大值,故 $f'(x_0)=0$,即 $f'(x_0)=n(1-x_0)^n-n^2x_0(1-x_0)^{n-1}=0$,解得 $x_0=\dfrac{1}{n+1}$,故 $M(n)=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$,$\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{e}$.

12.【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{\sqrt{2}\left(\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{3}x}{\sqrt{2}\cdot\dfrac{x}{4}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

13.【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(2x)^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{8x^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\dfrac{\sqrt{2}}{32}$.

14.【解】$(1+e^{\frac{1}{x}})^{\ln(1+x)}=e^{\ln(1+x)\cdot\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$，$\lim\limits_{x\to0^+}[\ln(1+x)\cdot\ln(1+e^{\frac{1}{x}})]=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(1+e^{\frac{1}{x}})=$

$\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^u)}{u}\xlongequal{洛}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{1+e^u}=1$，所以原式 $=e$.

15.【解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{3x+1}\right)^{\left(-\frac{3x+1}{x}\right)\left(-\frac{1}{3x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{3x+1}\right)}=e^{-1}$.

16.【解】$(\sin^2\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^{x^2}=e^{x^2\ln(\sin^2\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})}$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln(\sin^2\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(\sin^2t+\cos t)}{t^2}=$

$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin^2t+\cos t-1}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\cos t(1-\cos t)}{t^2}=\dfrac{1}{2}$，所以原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

17.【解】因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}\xlongequal{洛}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+e^x}{x+e^x}=2$，所以原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)}=e^2$.

18.【解】由于$\dfrac{i}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{i}{n^2+n+i}\leqslant\dfrac{i}{n^2+n+1}$，$(i=1,2,\cdots,n)$，两边从 $i=1$ 到 $i=n$ 相加，得

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)},$$

命 $n\to\infty$ 取极限，由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i}=\dfrac{1}{2}$.

19.【解】$\left[(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{2}{n})\cdots(1+\dfrac{n}{n})\right]^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\ln(1+\dfrac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\dfrac{n}{n})\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\ln(1+\dfrac{i}{n})\right]=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln2-1$,

所以原式 $=e^{2\ln2-1}=\dfrac{4}{e}$.

20.【解】由题设有 $y''=-(x-1)y'-x^2y+e^x$. 因为 $y(0)=0,y'(0)=1$，所以 $y''(0)=2$. 由 y'' 的表达式知，y'' 在 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{y(x)-x}{x^2}\xlongequal{洛}\lim_{x\to0}\frac{y'(x)-1}{2x}\xlongequal{洛}\lim_{x\to0}\frac{y''(x)}{2}=1.$$

21.【解】$\int_{-1}^{2}\arctan(nx)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\arctan(nx)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\arctan(nx)\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\arctan(nx)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}\int_{n}^{2n}\arctan u\mathrm{d}u$.

当 u 足够大时，$\arctan u>1$，所以$\int_n^{2n}\arctan u\mathrm{d}u>(2n-n)=n$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{2n}\arctan u\mathrm{d}u=+\infty$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_n^{2n}\arctan u\mathrm{d}u$ 为“$\dfrac{\infty}{\infty}$型”，由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_x^{2x}\arctan u\mathrm{d}u=\lim\limits_{x\to+\infty}(2\arctan2x-\arctan x)=\pi-\dfrac{\pi}{2}$

$=\dfrac{\pi}{2}$，所以原式 $=\dfrac{\pi}{2}$.

22.【解】由$\lim\limits_{x\to0}(1-e^{\frac{x}{x-1}})=0$ 有$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，可知 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点. 又因为$\lim\limits_{x\to1+0}e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1-0}e^{\frac{x}{x-1}}=0$，所以$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=-1$，可知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

三、解答题

23.【解】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-\sin(x-1)}{\sqrt[3]{2x-x^2}-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)-\sin t}{\sqrt[3]{1-t^2}-1}=3\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)-\sin t}{-t^2}=3\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{1+t}-\cos t}{-2t}=$

$-\dfrac{3}{2}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-\frac{1}{(1+t)^2}+\sin t}{1}=\dfrac{3}{2}$. 也可用佩亚诺余项泰勒公式展开(略).

24.【解】 用佩亚诺余项泰勒公式展至 $o(x^2)$, $\sqrt{1-x^2}=1+\frac{1}{2}(-x^2)+o_1(x^2)$, $\cos 3x=1-\frac{1}{2}(3x)^2+o_2(x^2)=1-\frac{9}{2}x^2+o_2(x^2)$, $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o_3(x^2)$

代入,原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2+o_1(x^2)-o_2(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o_3(x^2)}=8$. 本题也可用洛必达法则做(略).

25.【解】 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{4+x^{-1}+x^{-2}}+x+1}{-x\sqrt{1+x^{-2}\sin x}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+x^{-1}+x^{-2}}-x(-1-x^{-1})}{-x\sqrt{1+x^{-2}\sin x}}=\frac{2-1}{1}=1.$$

26.【解】 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{\sqrt{1-\cos^2x}}{x}+\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{-\sin x}{x}+\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=-1+2=1$,

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2x}}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\cos^2x}}{x}+\lim_{x\to0^+}\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{|\sin x|}{x}+0=1.$$

【注】25,26 两题中请注意 $\sqrt{x^2}=|x|$.

27.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}[(2-\cos x)^x-1]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}[e^{x\ln(2-\cos x)}-1]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\cdot x\ln(2-\cos x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(2-\cos x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

28.【解】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left[\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}[e^{\frac{1}{x}\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}-1]$,而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln(1+\dfrac{\cos x-1}{3})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\cos x-1}{3}=0$,由 $u\to0$ 时 $e^u-1\sim u$,故

$$原式=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})\right]=\lim_{x\to0}(\frac{1}{x^2}\frac{\cos x-1}{3})=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{6x^2}=-\frac{1}{6}.$$

29.【解】① 设 $a_j=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,有 $a_j\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant f(x)=a_j\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\left[\left(\dfrac{a_1}{a_j}\right)^x+\cdots+\left(\dfrac{a_n}{a_j}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}\leqslant a_j\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot n^{\frac{1}{x}}=a_j$,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=1$,由夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a_j=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

② 命 $b_i=a_i^{-1}(i=1,\cdots,n)$, $t=-x$, $\varphi(t)=(f(x))^{-1}$,由①, $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=\max\{b_1,\cdots,b_n\}$,所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=(\max\{b_1,\cdots,b_n\})^{-1}=\min\{a_1,\cdots,a_n\}$.

③ 由洛必达法则得:

$\lim\limits_{x\to0}\ln f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}=\dfrac{\ln(a_1a_2a_3\cdots a_n)}{n}$,于是

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln f(x)}=e^{\frac{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

30.【解】方法一: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}-2}{x^2}\overset{洛}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{a}{2}(1+ax)^{-\frac{1}{2}}+\frac{b}{3}(1+bx)^{-\frac{2}{3}}}{2x}$. 当 $x\to0$ 时分子 $\to\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}$. 若 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}\neq0$,则由洛必达法则知,上式右边 $\to\infty$,从而左边 $\to\infty$ 矛盾,故 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}=0$.

再由洛必达法则,

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{a^2}{2}(-\dfrac{1}{2})(1+ax)^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{b^2}{3}(-\dfrac{2}{3})(1+bx)^{-\frac{5}{3}}}{2}=-\dfrac{a^2}{8}-\dfrac{b^2}{9}\xlongequal{题设}-\dfrac{3}{2}$，由$\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}=0$及 $-\dfrac{a^2}{8}-\dfrac{b^2}{9}=-\dfrac{3}{2}$，解得 $a=2,b=-3$.

方法二：用佩亚诺余项泰勒公式展开：

$$\sqrt{1+ax}=1+\frac{1}{2}(ax)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(ax)^2+o_1(x^2),$$

$$\sqrt[3]{1+bx}=1+\frac{1}{3}(bx)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(bx)^2+o_2(x^2),$$

代入原式，原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3})x-(\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{b^2}{9})x^2+o(x^2)}{x^2}\xlongequal{题设}-\dfrac{3}{2}$，所以$\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}=0,\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{b^2}{9}=\dfrac{3}{2}$，解得 a,b 同方法一.

31.【解】方法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(1+bx+cx^2)-1-ax}{x^4}\xlongequal{洛}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x(1+bx+cx^2)+e^x(b+2cx)-a}{4x^3}$.

若 $1+b-a\neq0$，则上式右边趋于 ∞. 与题设矛盾，故 $1+b-a=0$. 再用洛必达法则，

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+bx+cx^2)+2e^x(b+2cx)+2ce^x}{12x^2},$$

仿上讨论有 $1+2b+2c=0$. 继续用洛必达法则，

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+bx+cx^2)+3e^x(b+2cx)+6ce^x}{24x},$$

仿上讨论有 $1+3b+6c=0$. 综合之，由以上 3 个等式解得 $a=\dfrac{1}{3},b=-\dfrac{2}{3},c=\dfrac{1}{6}$. 以 a,b,c 之值代入，再由洛必达法则，可得原式极限为$\dfrac{1}{72}$.

方法二：将 e^x 在 $x_0=0$ 处按佩亚诺余项泰勒公式展开到 $o(x^4)$，有 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$，于是

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{(1+b-a)x+(\frac{1}{2}+b+c)x^2+(\frac{1}{6}+\frac{b}{2}+c)x^3+(\frac{1}{24}+\frac{b}{6}+\frac{c}{2})x^4+o(x^4)}{x^4}$$

可见上述极限存在的充要条件是

$$1+b-a=0,\frac{1}{2}+b+c=0,\frac{1}{6}+\frac{b}{2}+c=0.$$

解之 a,b,c 如方法一. 以 a,b,c 之值代入，立即可得原式极限为$\dfrac{1}{72}$.

[**注**]：若式中有待定系数且用洛必达法则时，必须步步讨论，方法二比方法一方便、快捷.

32.【解】 因为当 $x\to0$ 时，有 $e^{3x^2}-1\sim3x^2$，于是$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{3x^2}$ $=2$，由极限与无穷小的关系，有$f(x)\sin2x=((2+\alpha)3x^2+1)^2-1\xrightarrow{当x\to0时}0$，所以当 $x\to0$ 时 $\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1\sim\dfrac{1}{2}f(x)\sin2x$，于是可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{6}\frac{f(x)\cdot2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\frac{f(x)}{x}=2,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=6.$$

33.【解】 若$f(x)$在$x=0$处连续,即有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.因为$f(x)+k=2f(x+1)$,所以$f(0)+k=2f(1)$.因为$f(1)=1^{\sin 1}=1$,所以$f(0)+k=2$,又因为$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x\ln x}=1$,所以$1+k=2$,所以$k=1$.

34.【解】 因为$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i}}\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$,所以根据夹逼定理,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+i}}=1$.

35.【解】 $\dfrac{k}{(n+k)(n+k+1)}\leqslant\dfrac{k}{(n+k)^2}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\frac{k}{n}}{(1+\frac{k}{n})^2}$,$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\dfrac{\frac{k}{n}}{(1+\frac{k}{n})^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\frac{k}{n}}{(1+\frac{k}{n})^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\displaystyle\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}dx=\ln 2-\frac{1}{2}$,另一方面,

$\dfrac{k}{(n+k)(n+k+1)}=\dfrac{k}{n(n+1)(1+\frac{k}{n})(1+\frac{k}{n+1})}\geqslant\dfrac{k}{n(n+1)(1+\frac{k}{n})(1+\frac{k}{n})}=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\frac{k}{n}}{(1+\frac{k}{n})^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\cdot\displaystyle\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}dx=\ln 2-\frac{1}{2}$,由夹逼定理知原式$=\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

36.【解】 由$x_1>0$,$x_{n+1}=3+\dfrac{4}{x_n}$,可见$x_{n+1}>3(n=1,2,\cdots)$.若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,记为$a$,则$a\geqslant 3$,对$x_{n+1}=3+\dfrac{4}{x_n}$两边取极限,得$a=3+\dfrac{4}{a}$,即$a^2-3a-4=0$,得$a=4$,($a=-1$舍弃).

考虑$x_{n+1}-4=3+\dfrac{4}{x_n}-4=\dfrac{4-x_n}{x_n}$,$0\leqslant|x_{n+1}-4|=\dfrac{|x_n-4|}{|x_n|}<\dfrac{1}{3}|x_n-4|<\cdots<\dfrac{1}{3^n}|x_1-4|$.

令$n\to\infty$,由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-4|=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且等于4.

37.【解】 只要证$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$,视$y=\Delta x$,由原题设有$f(x+\Delta x)=f(x)+f(\Delta x)$,并且$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=0$,所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$,证毕.

38.【解】 分$|x|<1$,$|x|=1$,$|x|>1$讨论,得

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } |x|<1,\\ x, & \text{当 } |x|>1,\\ -\dfrac{a}{a+1}, & \text{当 } x=1,\\ \text{无定义}, & \text{当 } x=-1.\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}x=-1$,$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=1$,在$x=-1$处$f(x)$为跳跃间断点,$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$,$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$,$f(1)=-\dfrac{a}{a+1}$.当$-\dfrac{a}{a+1}=1$即$a=-\dfrac{1}{2}$时,$f(x)$在$x=1$处连续;当$a\neq-\dfrac{1}{2}$时,$f(x)$在$x=1$为可去间断点,其他情形其他点处$f(x)$均连续.

第二章　一元函数微分学

一、选择题

1.【解】 命 $u=x-t$,则

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x xf(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}$$

$$=1-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=1-\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=1-\lim_{x\to0}\frac{f(x)+xf'(x)}{f(x)+f(x)+xf'(x)}$$

$$=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{x^2}+\frac{f'(x)}{x}}{\frac{2f(x)}{x^2}+\frac{f'(x)}{x}},\text{而}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=f''(0),\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

所以原式 $=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$,选[C].

2.【解】 由题知 $f''(x)=1-\mathrm{e}^{-x}-x[f'(x)]^2$,表明 $f''(x)$ 存在,从而知 $f'(x)$ 连续.从而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}-\lim\limits_{x\to0}[f'(x)]^2=1-0=1$. 由极限的保号性知 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某去心邻域内与 x 同号,从而知当 $x>0$ 时 $f''(x)>0$;当 $x<0$ 时 $f''(x)<0$. 故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 左侧邻近是凸的,右侧邻近是凹的,选[D].

3.【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\infty$,所以 $x=0$ 是一条铅直渐近线. 又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-(1+x)\right)=0$,所以 $y=1+x$ 是一条斜渐近线,又因 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}=0$,所以 $y=0$ 是一条水平渐近线. 选[D].

4.【解】 证明[D]正确. 因 $f'''(x_0)>0$,由 $f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$ 知,存在 $x=x_0$ 的去心邻域 $f''(x)$ 与 $x-x_0$ 同号,又因 $f'(x_0)=0$,故在该去心邻域内 $f'(x)>0$,所以 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,选[D].

其他(A)、(B)、(C)均不正确. 因(A)中未设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,由 $f'(x)>0(x\neq0)$,只能推出 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 内 $f(x)$ 分别严格单调增. (B)中未设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,例如 $f(x)=|x|$,在 $x=0$ 处不可导. (C)中未设 $f'(x_0)=0$.

5.【解】 因为 $f'(x_0)=0$,且 $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$,所以由保号性知,存在 $\delta>0$,当 $x\in U_\delta(x_0)$ 时,$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$. 因此当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时有 $f'(x)>0$,所以在区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 上 $f'(x)>0$,即 $f(x)$ 严格单调增,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时有 $f'(x)<0$,所以在区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 上,$f'(x)<0$,即 $f(x)$ 严格单调减. 因此选[C].

6.【解】 证明[D]正确,反证法,设 $f(x)$ 有3个或3个以上零点,则由罗尔定理知 $f''(x)$ 有1个或1个以上零点,与题设矛盾.

7.【解】 因$f'_-(x_0)$与$f'_+(x_0)$均存在,则可推出$f(x)$在$x=x_0$处左连续且右连续,因此$f(x)$在$x=x_0$处连续,所以②正确. 因$f(x)$在$x=x_0$处连续且$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$,由洛必达法则,$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$,即有$f'(x_0)=A$. ③正确. 选[C].

8.【解】 应选[A]. 证明①与②是正确的. 对于①,设$f(a)>0$,由连续性知存在$U_\delta(a)$,当$x\in U_\delta(a)$时$f(x)>0$,从而知当$x\in U_\delta(a)$时$f(x)=|f(x)|$. 于是$f(x)$在$x=a$处可导. 设$f(a)<0$,其证明是类似的. 设$f(a)=0$,由$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$存在记为$A$,即有$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=A$. 当$x<a$时,$\dfrac{|f(x)|}{x-a}\leqslant 0$,当$x>a$时,$\dfrac{|f(x)|}{x-a}\geqslant 0$. 由于$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=A$,所以$A=0$. 从而$\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=\lim\limits_{x\to a}\left|\dfrac{f(x)}{x-a}\right|=0$. 所以$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$. 说明$f'(a)$存在且等于0,综上所述,①正确.

对于②,由$f(a)=0$,$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$存在,所以$f'(a)$存在,②正确.

9.【解】 用反证法证明[B]正确.

由题设$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在,$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$,则对于$\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$,$\exists X>0$,当$x>X$时,$|f'(x)-A|<\varepsilon=\dfrac{A}{2}$,即$\dfrac{A}{2}=A-\dfrac{A}{2}<f'(x)<A+\dfrac{A}{2}$,所以$f'(x)$有界且大于$\dfrac{A}{2}$. 在区间$[X,x]$上用拉格朗日中值定理得$f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)>f(X)+\dfrac{A}{2}(x-X)$,从而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,与题设$f(x)$有界矛盾. 同理可证,当$A<0$时也矛盾. 所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

其他均可举出反例说明(A)、(C)、(D)不正确,例略.

10.【解】 函数$|x|$,$|x-1|$,$|x+1|$分别仅在$x=0$,$x=1$,$x=-1$不可导且它们处处连续. 因此只须在这些点考察$f(x)$是否可导,下面按定义考察:

在$x=0$处,$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=(x^3+1)^{\frac{1}{3}}|x^2-1|\cdot\dfrac{|x|}{x}$,于是

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1\times1\times\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1\times1\times\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

故$f'_+(0)\neq f'_-(0)$,因此$f(x)$在$x=0$处不可导.

类似地可知$f(x)$在$x=1$处不可导,在$x=-1$处可导且$f'(-1)=0$. 选[B].

11.【解】 应选[C]. 由$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)g(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,故知$f'(x_0)$存在的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在. 选[C].

12.【解】 由题设条件及保号性知存在$x=0$的去心某邻域$f''(x)>0$,从而知$f'(x)$单调增,又由$f'(0)=0$知,$f'(x)$在$x=0$从左到右由负变正,故知$f(0)$为$f(x)$的极小值. 选[A].

二、填空题

13.【解】 设$u=t-s$,则$y=\int_0^t\sin u^2\mathrm{d}u$,所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\left(\int_0^t\sin u^2\mathrm{d}u\right)'_t}{\left(\int_0^t2\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s\right)'_t}=\dfrac{\sin t^2}{2\mathrm{e}^{-t^2}}$,所以$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=$

$$\frac{\left(\dfrac{\sin t^2}{2\mathrm{e}^{-t^2}}\right)'_t}{\left(\int_0^t2\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s\right)'_t}=\frac{\dfrac{4t\cos t^2\mathrm{e}^{-t^2}+\sin t^2\cdot2\mathrm{e}^{-t^2}\cdot2t}{(2\mathrm{e}^{-t^2})^2}}{2\mathrm{e}^{-t^2}}=\frac{4t\cos t^2+4t\sin t^2}{8(\mathrm{e}^{-t^2})^2},\text{故}\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\pi}}=-\frac{\sqrt{\pi}}{2\mathrm{e}^{-2\pi}}=-\frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{2\pi}}{2}.$$

14.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)(f(x)-f(a))}\xlongequal{洛}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{f'(a)[f(x)-f(a)+f'(x)(x-a)]}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f'(x)-f'(a)}{(x-a)}}{f'(a)\left[\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)}+f'(x)\right]}=\frac{f''(a)}{f'(a)(f'(a)+f'(a))}=\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.$$

15.【解】 当 $t=1$ 时，$x=\dfrac{4}{\pi}\arctan t=1,y=\dfrac{2t}{1+t^2}=1.$

因$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2},\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}$，所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，所以$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=0.$ 且$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=$ $\dfrac{\dfrac{\pi}{2}\cdot\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)'_t}{\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}}=\dfrac{\pi^2}{8}\cdot\dfrac{-4t}{1+t^2}$，所以$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-\dfrac{\pi^2}{4}$. 另一方面 $y=ax^2+bx+c$，所以 $y'|_{x=1}=2a+b,y''|_{x=1}$ $=2a$，因 $y=ax^2+bx+c$ 与$\begin{cases}x=\dfrac{4}{\pi}\arctan t,\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$ 在点(1,1)有相同的曲率圆，因此两曲线在点(1,1)相切，y'' 同号且曲率半径相同，从而有相同的 y''.

$$所以由\begin{cases}a+b+c=1,\\2a+b=0,\\2a=-\dfrac{\pi^2}{4},\end{cases}\quad 解得\quad\begin{cases}a=-\dfrac{\pi^2}{8},\\ b=\dfrac{\pi^2}{4},\\ c=1-\dfrac{\pi^2}{8}.\end{cases}$$

16.【解】 由极限与无穷小的关系，有 $xf(x)-\ln(1+x)=(A+\alpha)x^2$，其中，$\lim\limits_{x\to0}\alpha=0$.

解出$f(x)=\dfrac{(A+\alpha)x^2+\ln(1+x)}{x}$，$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$，又$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(A+\alpha)x^2+\ln(1+x)-x}{x^2}=A+\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\xlongequal{洛}A+\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{(1+x)}-1}{2x}=A-\frac{1}{2},$$

所以$f'(0)=A-\dfrac{1}{2}$.

17.【解】 点(x,y)到直线的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}|x+y-6|$. 考虑 $d^2=\dfrac{1}{2}(x+y-6)^2$ 在 $x^2+2xy+2y^2-4y=0$ 条件下的最小值问题. 用拉格朗日乘数法，令 $F(x,y,\lambda)=\dfrac{1}{2}(x+y-6)^2+\lambda(x^2+2xy+2y^2-4y)$. 由$\dfrac{\partial F}{\partial x}=0,\dfrac{\partial F}{\partial y}=0,\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=0$，解得 $x=0,y=2,\lambda=1$ 或 $x=-4,y=2,\lambda=-2$. 相应地得 $d_1=\dfrac{|0+2-6|}{\sqrt{2}}$ $=2\sqrt{2};d_2=\dfrac{|-4+2-6|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$. 所以最小值为 $2\sqrt{2}$.

18.【解】 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=2.$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-x+1}-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}.$$

所以有斜渐近线，其方程为 $y=2x-\dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x(x-\sqrt{x^2-x+1})}=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-x+1})=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}$,所以有水平渐近线,其方程为 $y=\dfrac{1}{2}$,无垂直渐近线.

19.【解】 对 $x^3+y^3-3axy=0$ 两边对 x 求导得 $3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}-3ay-3ax\dfrac{dy}{dx}=0$,所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}$,

则 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(2x-a\dfrac{dy}{dx}\right)(ax-y^2)-\left(a-2y\dfrac{dy}{dx}\right)(x^2-ay)}{(ax-y^2)^2}$$

$$=\frac{\left(2x-a\cdot\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}\right)(ax-y^2)-\left(a-2y\cdot\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}\right)(x^2-ay)}{(ax-y^2)^2}=\frac{2a^3xy}{(ax-y^2)^3}.$$

20.【解】 由莱布尼茨公式 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^iu^{(i)}v^{(n-i)}$,则 $f^{(2n+1)}(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}C_{2n+1}^i(x^2)^{(i)}(\sin ax)^{(2n+1-i)}$.

又因为 $(\sin ax)^{(2n+1-i)}=\sin(ax+\dfrac{(2n+1-i)\pi}{2})a^{2n+1-i}$,

所以 $$f^{(2n+1)}(x)=x^2\sin(ax+\frac{(2n+1)\pi}{2})a^{2n+1}+C_{2n+1}^12x\sin(ax+\frac{2n\pi}{2})a^{2n}$$

$$+C_{2n+1}^22\cdot\sin(ax+\frac{(2n-1)\pi}{2})a^{2n-1},$$

所以 $f^{(2n+1)}(0)=2a^{2n-1}C_{2n+1}^2\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}=2n(2n+1)(-1)^{n+1}a^{2n-1}$.

21.【解】 因为 $f'(x)=f^2(x)$,所以 $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$,$f'''(x)=3\times2\times f^2(x)f'(x)=3\times2\times1f^4(x)$,$f^{(4)}(x)=4\times3\times2\times1\times f^5(x)$,…. 由数学归纳法可证得 $f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$,所以 $f^{(n)}(0)=n!f^{n+1}(0)=n!2^{n+1}$.

三、解答题

22.【解】 设切点为 (x_0,y_0),于是在切点处的切线方程为 $y-y_0=-2x_0(x-x_0)$. 此切线与两坐标轴的截距分别为 $X=\dfrac{y_0}{2x_0}+x_0=\dfrac{x_0^2+1}{2x_0}$,$Y=y_0+2x_0^2=x_0^2+1$,$x_0>0$. 所以此切线与两坐标轴围成的三角形面积 $S=\dfrac{(x_0^2+1)^2}{4x_0}$. 令 $S(x)=\dfrac{(x^2+1)^2}{4x}$,$x>0$. 由求最小值的办法可得 $S(x)$ 的唯一驻点 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,验知它是极小值点,故为最小值点,相应地 $y=1-x^2=\dfrac{2}{3}$. 故切点为 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2}{3})$.

23.【解】 极坐标曲线 $r=e^\theta$ 用参数式表示为 $x=e^\theta\cos\theta$,$y=e^\theta\sin\theta$,过该曲线上的点 (e^θ,θ) 的切线斜率为 $k=\dfrac{y'_\theta}{x'_\theta}=\dfrac{e^\theta\sin\theta+e^\theta\cos\theta}{e^\theta\cos\theta-e^\theta\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$. 该切线方程为 $y-e^\theta\sin\theta=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}(x-e^\theta\cos\theta)$,它与 x 轴交点、y 轴交点分别为 $\left(\dfrac{e^\theta}{\sin\theta+\cos\theta},0\right)$、$\left(0,-\dfrac{e^\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)$. 切线与两坐标轴围成的面积 $S_\triangle=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{e^\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right|\left|-\dfrac{e^\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right|$.

题中要求 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 且交于坐标轴的正向,所以要求 $\sin\theta+\cos\theta>0$,$\sin\theta-\cos\theta>0$,从而 $\dfrac{\pi}{4}<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,于是 $S_\triangle=-\dfrac{e^{2\theta}}{2\cos2\theta}$,$\dfrac{\pi}{4}<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 按求最大、最小值的办法得 $\theta=\dfrac{3\pi}{8}$ 时 $S_\triangle$ 为最小,此时切点坐标 $x=e^{\frac{3}{8}\pi}\cos\dfrac{3\pi}{8}$,$y=e^{\frac{3}{8}\pi}\sin\dfrac{3}{8}\pi$,$\min S_\triangle=\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$.

24.【解】 $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}tf(x^2-t)dt\xlongequal{u=x^2-t}\int_0^{x^2}(x^2-u)f(u)du=x^2\int_0^{x^2}f(u)du-\int_0^{x^2}uf(u)du$,

所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^n}\xlongequal{洛}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^{x^2}f(u)\,du}{nx^{n-2}}\xlongequal{洛}\dfrac{4}{n\cdot(n-2)}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2\cdot x^{n-6}}$.

已知$f'(0)=1$,从而推知要使$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^n}$存在且不为0的充要条件是$n=6$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{4}{6\cdot4}=\frac{1}{6}.$$

25.【解】 过曲线上点$(x_0,f(x_0))$的切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,因切线交x轴于点$(u,0)$,所以$u=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$,设点$(x_0,f(x_0))$为曲线上任意一点,所以$u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

取$f(u),f(x)$在$x=0$处的二阶泰勒展开式,有

$$f(u)=f(0)+f'(0)u+\frac{f''(\eta)}{2!}u^2,0<\eta<u,(\lim_{u\to0}f''(\eta)=f''(0)\neq0),$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,0<\xi<x,(\lim_{x\to0}f''(\xi)=f''(0)\neq0).$$

因$f(0)=f'(0)=0$,所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\dfrac{f''(\eta)}{2}u^2}{u\cdot\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u\cdot f''(\eta)}{x\cdot f''(\xi)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u}{x}$.

由$u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$,所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{f(x)}{xf'(x)}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{xf'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf''(x)}{xf''(x)+f'(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{f''(x)+\dfrac{f'(x)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}f''(x)}{\lim\limits_{x\to0}f''(x)+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}}=\frac{1}{2}.$$

26.【解】 由$f(xy)=f(x)+f(y)+(x-1)(y-1)$,有$f(1\cdot1)=f(1)+f(1)$,所以$f(1)=0$,且$f(x+\Delta x)=f\left(x\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\right)=f(x)+f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)+\dfrac{(x-1)\Delta x}{x}$,所以有$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$

$\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}}+\dfrac{x-1}{x}\xrightarrow[\Delta x\to0]{}\dfrac{f'(1)}{x}+1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{a-1}{x}+1$. 所以$f'(x)=\dfrac{a-1}{x}+1$.

27.【证明】证法一: 设函数$f(x)=\ln x$. 由拉格朗日中值定理知:至少存在一点$\xi\in(a,b)$使$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\dfrac{1}{\xi}$. 由于$0<a<\xi<b$,故$\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$,从而$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$.

证法二: 设$f(x)=(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a),(x>a>0)$.

有$f'(x)=2x(\ln x-\ln a)+(x^2+a^2)\dfrac{1}{x}-2a=2x(\ln x-\ln a)+\dfrac{(x-a)^2}{x}>0$.

故$x>a$时,$f(x)$严格单调增加. 又$f(a)=0$,所以当$x>a$时,$f(x)>f(a)=0$,即$(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)>0$,以$x=b$代入,证毕.

28.【证明】证法一: 令$\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$,易知$\varphi(1)=0$,由于$\varphi'(x)=2x\ln x-x+2-\dfrac{1}{x}$,易见$\varphi'(1)=0$. 因为$\varphi''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$,$\varphi''(1)=2>0$,所以$\varphi(x)$在$x=1$处取得极小值,

又$\varphi'''(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$,当$0<x<1$时,$\varphi'''(x)<0$;当$1<x<+\infty$时,$\varphi'''(x)>0$,且$\varphi''(1)=2>0$.

从而推知当$x\in(0,+\infty)$时$\varphi''(x)\geqslant2$(仅在$x=1$时等于2). 所以曲线$y=\varphi(x)$是凹的. 所以$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$仅在$x=1$处成立等号.

证法二: 由证法一已知$\varphi(1)=0,\varphi'(1)=0,\varphi''(1)=2$. 当$0<x<1$时,$\varphi'''(x)<0$,当$1<x<+\infty$

时,$\varphi'''(x)>0$. 将 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处展开成泰勒公式 $\varphi(x)=\varphi(1)+\varphi'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}\varphi''(1)(x-1)^2+\frac{\varphi'''(\xi)}{3!}(x-1)^3=(x-1)^2+\frac{1}{6}\varphi'''(\xi)(x-1)^3$.

当 $0<x<1$ 时,$x<\xi<1$;当 $1<x<+\infty$ 时,$1<\xi<x$. 所以当 $x>0$ 时,$\varphi(x)\geqslant 0$.

证法三: 设 $\varphi(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$,所以 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$(当 $x>0$),$\varphi(1)=0$,所以当 $0<x<1$ 时,$\varphi(x)<0$;当 $1<x<+\infty$ 时,$\varphi(x)>0$. 于是当 $x>0$ 时,$(x^2-1)\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geqslant 0$,即 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

29.【证明】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. 又因为 $f(x)$ 连续,所以 $f(0)=0$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$,所以 $f'(0)=2$. 由泰勒公式,$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=2x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\leqslant 2x$,且仅当 $x=0$ 时成立等号,证毕.

30.【证明】 因为 $f(0)=0$,所以 $f(x_1+x_2)-f(x_1)-f(x_2)+f(0)=f'(\xi_1)x_1-f'(\xi_2)x_1=f''(\xi)(\xi_1-\xi_2)x_1$,其中不妨设 $x_1<x_2$,由 $x_2<\xi_1<x_1+x_2$,$0<\xi_2<x_1$,有 $\xi_2<\xi<\xi_1$. 因为 $f''(x)<0$,所以 $f''(\xi)(\xi_1-\xi_2)x_1<0$. 所以 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

31.【证明】 由 $f(x)=(x-4)e^{\frac{x}{2}}-(x-2)e^x+2$,有 $f(0)=0$,$f'(x)=(\frac{x}{2}-1)e^{\frac{x}{2}}-(x-1)e^x$,$f'(0)=0$,$f''(x)=xe^{\frac{x}{2}}(\frac{1}{4}-e^{\frac{x}{2}})<0$(当 $x>0$). 由泰勒公式有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\leqslant 0$ 且仅在 $x=0$ 时成立等号,证毕.

32.【证明】 由中值定理,存在 $\xi_1\in(0,x)$ 使得 $f(x)=f(0)+f'(\xi_1)(x-0)\geqslant f(0)+kx$. 所以存在足够大的 x_0 使 $f(x_0)>0$. 又因为 $f(0)<0$,由介值定理可得存在 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,+\infty)$ 使 $f(\xi)=0$. 又因为 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 为单调递增函数. 所以在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一 ξ 使 $f(\xi)=0$.

33.【解】 令 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$,$f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$. 若 $k\leqslant0$,则 $f'(x)<0$,而 $f(0^+)=+\infty$,$f(+\infty)<0$,所以当 $x>0$ 时 $f(x)=0$ 有且仅有一个根. 若 $k>0$,由 $f'(x)=0$ 解得唯一驻点 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$,又因 $f''(x)>0$,故 $f(x_0)=3(\frac{k}{2})^{\frac{2}{3}}-1$ 为最小值. 当 $3(\frac{k}{2})^{\frac{2}{3}}>1$,即当 $k>\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时,$f(x)>0$,$f(x)$ 无零点. 当 $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时,$f(x)$ 存在唯一零点. 当 $0<k<\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时,$f(x_0)<0$,且当 $x\to0^+$ 时 $f(x)\to+\infty$;当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有 2 个零点,分别在区间 $(0,x_0)$ 与 $(x_0,+\infty)$ 内.

34.【解】 令 $F(x)=e^{f(x)}\arctan x$,有 $F(1)=e^{f(1)}\arctan 1$,因为 $f(1)=0$,所以 $F(1)=\frac{\pi}{4}$. 又因为 $\int_0^{\frac{2}{\pi}}e^{f(x)}\arctan x\,dx=\frac{1}{2}$,所以由积分中值定理在 $(0,1)$ 内至少存在一点 x_1 使 $e^{f(x_1)}\arctan x_1=\frac{\pi}{4}$,即 $F(x_1)=\frac{\pi}{4}$. 因此由罗尔中值定理知,在 $(x_1,1)$ 内存在 ξ,使得 $F'(\xi)=0$. 由 $F'(\xi)=\frac{e^{f(\xi)}}{1+\xi^2}[(1+\xi^2)\arctan\xi\cdot f'(\xi)+1]=0$,有 $(1+\xi^2)\arctan\xi\cdot f'(\xi)=-1$.

35.【解】 由题设 $f'(a)f'(b)>0$,不妨令 $f'(a)>0$,$f'(b)>0$. 由保号性知存在 $x_1>a$ 及 $x_2<b$ 使 $f(x_1)>f(a)$,$f(x_2)<f(b)$. 由连续函数介值定理知,存在 $c\in(x_1,x_2)$ 使 $f(c)=f(a)=f(b)$. 用两次罗尔定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)=0$.

36.【解】 设直线方程为 $g(x)=ax+b$. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的交点设为 x_1,x_2,x_3. 不妨设 $x_1<x_2<x_3$,令

$F(x)=f(x)-g(x)$,有 $F(x_1)=F(x_2)=F(x_3)=0$. 仿35题知,存在 ξ 使 $F''(\xi)=0$,即 $f''(\xi)=0$.

37.【解】 反证法. 设不存在 ξ 介于 $f(x)$ 的两零点之间使 $g(\xi)=0$. 即设对任何 $x\in(a,b)$, $g(x)\neq 0$. 命 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$,有 $F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$. 由于 $F(x)$ 在 (a,b) 内至少有2个零点,所以 $F'(x)$ 至少有1个零点,与 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$ 矛盾. 所以至少存在一点 ξ 介于 $f(x)$ 的两零点之间使 $g(\xi)=0$.

38.【解】 命 $\varphi(x)=f(x)e^{g(x)}$,则 $\varphi'(x)=e^{g(x)}[f'(x)+f(x)g'(x)]$. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在2个零点,则由罗尔定理知,$\varphi'(x)$ 即 $f'(x)+f(x)g'(x)$ 在 (a,b) 内至少存在1个零点,与 $f'(x)+f(x)g'(x)\neq 0$ 矛盾. 故 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多存在1个零点.

39.【解】 因为 $f(0)=f(1)=0$, $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)>0$, $m=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)<0$. 因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,故存在 $x_1\in(0,1)$, $x_2\in(0,1)$ 使 $f(x_1)=M$, $f(x_2)=m$. 不妨认为 $x_2<x_1$. 作 $\varphi(x)=f(x)-Mx$,有 $\varphi(x_1)=f(x_1)-Mx_1=M-Mx_1>0$, $\varphi(1)=f(1)-M=M<0$. 故知存在 $c_1\in(x_1,1)$,使 $\varphi(c_1)=0$. 再在区间 $[c_1,1]$ 上对 $\varphi(x)$ 用罗尔定理,存在 $\xi\in(c_1,1)$ 使 $\varphi'(\xi)=f'(\xi)-M=0$,证明了存在 $\xi\in(c_1,1)$ 使 $f'(\xi)=M$. 类似地作 $\psi(x)=f(x)+m(x-1)$,有 $\psi(x_2)=f(x_2)+m(x_2-1)=mx_2<0$, $\psi(0)=f(0)-m>0$,故知存在 $c_2\in(0,x_2)$ 使 $\psi(c_2)=0$. 再在区间 $[0,c_2]$ 上对 $\psi(x)$ 用罗尔定理,存在 $\eta\in(0,c_2)$ 使 $\psi'(\eta)=f'(\eta)-m=0$,证明了存在 $\eta\in(0,c_2)$ 使 $f'(\eta)=m$. 由于 $0<\eta<c_2<x_2<x_1<c_1<\xi<1$,所以 $\eta\neq\xi$.

40.【解】 将 $\sin x$ 与 $f(x)$ 在 $x=0$ 处按佩亚诺余项泰勒公式分别展开至 $o_1(x^3)$ 与 $o_2(x^2)$, $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o_1(x^3)$, $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o_2(x^2)$. 代入原给极限,

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o_1(x^3)+f(0)x+f'(0)x^2+\frac{1}{2}f''(0)x^3+o_2(x^2)x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+f(0))x+f'(0)x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}f''(0)\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=0,$$

所以 $f(0)=-1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=\dfrac{1}{3}$.

41.【解】 设在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv$ 某常数,即 $f(x)\equiv 0$,结论自然成立. 设在 $[0,1]$ 上 $f(x)\not\equiv 0$,则在 $(0,1)$ 上 $|f(x)|$ 存在最大值. 设 $x_0\in(0,1)$ 有 $|f(x_0)|=M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$,所以 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的最大值就是 $f(x)$ 的最小值,所以 $f'(x_0)=0$. 将 $f(x)$ 在 x_0 处按泰勒公式展开:

$$0=f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2,(0<\xi_1<x_0),$$

$$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2,(x_0<\xi_2<1),$$

所以有 $|f''(\xi_1)|=\dfrac{2M}{x_0^2}$,及 $|f''(\xi_2)|=\dfrac{2M}{(1-x_0)^2}$,

① 若 $x_0\in(0,\frac{1}{2})$ 时,则存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$ 使 $|f''(\xi)|>8M$,

② 若 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$ 时,则存在 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $|f''(\xi)|\geqslant 8M$.

总之,至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $|f''(\xi)|\geqslant 8M=8\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$.

42.【证明】 由 $f(a)>0$, $f(b)>0$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 知存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)<0$,故在 (a,b) 内存在 x_0 使 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值且为负,故知 $f'(x_0)=0$. 由泰勒公式 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+$