

微积分讲义习题集

第二册

北京工业学院数学教研室

1979.9.

目 录

第七章 极限理论与函数近似表示	1
§7.1 极限定义的 $\varepsilon-\delta$ 的说法	1
§7.2 无穷小的顺序与无穷小的比较	2
§7.3 极限运算法则与极限的性质	4
§7.4 函数的连续性定理与证明	6
§7.5 柯西定理与罗彼塔法则	7
§7.6 误差估计	11
§7.7 函数的近似表示	11
§7.8 广义积分的判别法	12
第八章 微分方程	15
§8.1 一阶微分方程的基本概念	15
§8.2 一阶微分方程的解法	17
§8.3 一阶微分方程的应用	21
§8.4 高阶微分方程	23
§8.5 可降阶的高阶微分方程	23
§8.6 高阶齐次线性微分方程	26
§8.7 高阶齐次非线性微分方程	28
§8.8 二阶线性微分方程的应用	30
§8.9 常系数线性微分方程组	32

第九章	矢量的代数	34
§9.1	矢量的概念与矢量的线性运算	34
§9.2	空间直角坐标·矢量的坐标表达式	36
§9.3	矢量的数量积	39
§9.4	矢量的矢量积	41
§9.5	矢量的混合积	44

第十章	空间解析几何	45
§10.1	平面的方程	45
§10.2	直线的方程	49
§10.3	空间的曲面方程	56
§10.4	空间的曲线方程	59
§10.5	曲面的研究法 二次曲面	61
§10.6	空间曲面与曲线在坐标面上的投影	63

第七章 极限理论与函数的近似表示

§ 2.1 极限定义的 ϵ, δ 的说法

2.1 用 $\epsilon-\delta$ 或 $\epsilon-N$ 的方法, 给出下列极限的定义并说明其几何意义.

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$(d) x \rightarrow a^+ \text{ 时 } y \rightarrow b$$

根据定义证明下列各极限 (2.2-2.7)

$$2.2 \lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8$$

$$2.3 \lim_{x \rightarrow 2} (5x+2) = 12$$

$$2.4 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$$

$$2.5 \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-6x+5}{x-5} = 4$$

$$2.6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+5}{x} = 6$$

$$2.7 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

2.8 当 $x \rightarrow \infty$ 时 $y = \frac{x^2-1}{x^2+5} \rightarrow 1$. 问 N 应为何值, 才能使当 $|x| > N$ 时 $|y-1| < 0.01$?

2.9 当 $x \rightarrow 2$ 时 $y = x^2 \rightarrow 4$. 问 δ 应约等于多少, 才能使由 $|x-2| < \delta$ 而使 $|y-4| < 0.001$? [提示: 因为 $x \rightarrow 2$, 所以不妨设 $1 < x < 3$.]

2.10 证明函数 $f(x) = |x|$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限为零.

2.11 证明极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ 不存在.

2.12 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y = \frac{1+x}{x} \rightarrow \infty$. 问 x 应满足什么条件, 才能使不等式 $|y| > 10^4$ 成立?

2.13 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y = \frac{1}{2x-1} \rightarrow \infty$. 问 x 应满足什么条件

件, 才能改 $|y| > 100$?

7.14 证明

(a) 若 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

(b) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A.$$

§ 7.2 无穷小的比较与无穷小的比较

7.15 当 $x \rightarrow 0$ 时, 试决定下列各无穷小对于 x 的阶数:

(a) $x^3 + 1000x^2$, (b) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} \ (x > 0)$.

(c) $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}} \ (x > 0)$, (d) $\sqrt{a+x^3} - \sqrt{a} \ (a > 0)$.

(e) $2 \sin^3 x$, (f) $\sqrt[3]{\tan x}$.

(g) $1 - \cos x$, (h) $x + \sin x$.

7.16 证明当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列各对无穷小要是等价的:

(a) $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$, (b) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$.

(c) $\arcsin x \sim x$, (d) $\ln(1+x) \sim x \sim e^x - 1$.

7.17 设 $y = x^3$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 比较 $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3$ 与 Δx 的阶. 当 x 取何值时, 为同阶. 不同阶又相当?

7.18 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 和 $y = 1 - \sqrt{x}$ 都是无穷小. 问其中哪一个是高阶无穷小?

7.19 求下列极限

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg 2x}{3x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\lg 5x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{\arcsin x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\arcsin 4x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x + \sin x}{x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \pi x}{x^2}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sec x - 1}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \lg^2 x}{x \sin x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(1+x-1)}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{4x}$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)}$$

7.20. 下列极限过程正确吗? 作出正确答案:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin x}{\lg \frac{\pi x}{2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin x}{\lim_{x \rightarrow 1} \lg \frac{\pi x}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\lg \frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

x

x

x

7.21. 在确定的趋势下, 无穷大与无穷小是否是无界函数? 无界函数一定是无穷大或无穷小吗?

7.22 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, 则 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$

有界. 问: 若 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 有界, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 一定存在吗? 举例说明.

§ 7.3 极限运算法则与极限的性质

7.23 设已知 $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, 试由极限运算法则求出下列极限, 并要求在每一步后边注出根据根据.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{5x^2 + 7x + 2}$$

7.24 问下列各题的解法是否正确:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec^2 x - \tan^2 x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sec^2 x - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan^2 x$$

$$= \infty - \infty = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 9}{x - 9} = \frac{\lim_{x \rightarrow 9} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 9} (x - 9)} = \frac{0}{0} = \infty$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x}{\infty} = 0$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0 \cdot 1 = 0.$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2}$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 = 0$$

7.25 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}$ ，并回答下列问题：

(a) 此题能否直接利用极限运算法则来求？

(b) 能否先求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1}$ ，再根据此极限求解上题？为什么？

什么？

(c) 若已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A \neq 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ ，问如何求

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}?$$

7.26 求下列极限：

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + 1}{\cos x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{\frac{1}{x} \sin x}$

7.27 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ ，并回答下列问题：

(a) 此题能否直接利用极限运算法则来求？

(b) 函数 $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 和 $y = x+1$ 是否同一函数？作出它们的图形，观察它们的相同和不同之处；

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)$ 吗？为什么？

(d) 若已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$ ， $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha(x) = 0$ ，说明

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha(x) f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$$

7.28 求下列极限

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x-4}$

(b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

$$(c) \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-t^2} \right) \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}.$$

7.29. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 并回答下列问题:

(a) 此题能否直接利用极限之积法则来求?

(b) 函数 $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 与 $\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$ 相同否?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \text{ 吗?}$$

(c) 如何求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$?

其中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$ 与 n 为正整数.

7.30. 求下列极限

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{3x^2+5x+6}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+4}{2x^2+6}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x+3\sin x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{a^2+1} \quad (a>1).$$

7.31. 试证明: 如果当 $x \rightarrow a$ 时函数 $f(x)$ 有有限的极限 A , 则对于充分接近于 a 的 x 的取值 函数是有界的.

§7.4. 函数连续性处理的证明

7.32. 证明: 若 $f(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续, 而且

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是有界的.

7.33. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $\alpha = x$ 和 $x = \beta$ 是 $f(x) = 0$ 相邻的两个根, 证明: 若 α, β 间某一点 γ 的函数值 $f(\gamma)$ 为正(负), 则 $f(x)$ 在 (α, β) 内恒为正(负).

7.36. 解释下式中每个等号成立的理由:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sqrt{x + \sin x^2} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}} (x + \sin x^2)} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}} x + \lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}} x + \sin \lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2} + 1} \end{aligned}$$

7.35. 如果函数 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 问 $f(x)$ 在 $x = a$ 处是否有极限? 如果 $f(x)$ 在 a 处有极限, 问 $f(x)$ 在 a 处是否连续?

在 7.36-7.38 各题中根据连续函数的性质, 验证:

7.36. 方程 $x^2 - 5x - 1 = 0$ 至少有一实根介于 1 与 4 之间。

7.37. 方程 $x \cdot 2^x = 1$ 至少有一个小于 1 的正根。

7.38. 任何奇次多项式至少有一个实零点。

(注. 由区间上连续函数的性质: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 的内部至少有一个 $f(x) = 0$ 的一个实根.)

§ 7.5 柯西定理与罗彼塔法则

7.39. 对函数 $f(x) = x^3$ 及 $g(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上验证柯西定理的正确性。

7.40. 对函数 $f(x) = \sin x$ 及 $g(x) = x + \cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上验证柯西定理的正确性。

7.41. 对于函数 $f(t) = t^3, g(t) = t^2$ 在 $[1, 2]$ 上求柯西定

程中的号.

742. 说明在闭区间 $[-1, 1]$ 上柯西定理对于函数 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x^3$ 何以不真?

743. 设在 $[a, b]$ 上有 $|f'(x)| \geq |g'(x)|$, 试证对于 $[a, b]$ 内的两点 $x, x + \Delta x$ 有:

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \geq |g(x + \Delta x) - g(x)|.$$

744. 利用柯西公式证明: 如果 $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, 则有

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \quad \text{其中 } 0 < \theta < 1.$$

罗彼洛法则

试称下列各极限 (应先判定函数是属于何种不定式)

(7.45-7.86):

$$745. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

$$746. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

$$747. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$$

$$748. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$749. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$750. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

$$751. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$$752. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$$

$$753. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

$$754. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$$

$$755. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$$

$$756. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

$$7.57 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$$

$$7.58 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$7.59 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin y - 1}{\ln(1+y)}$$

$$7.60 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \operatorname{tg} 2x}{\ln \operatorname{tg} x}$$

$$7.61 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\arccos \operatorname{ctg} x}$$

$$7.62 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$7.63 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$7.64 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [x(2^{\frac{1}{x}} - 1)]$$

$$7.65 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x$$

$$7.66 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}$$

$$7.67 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$7.68 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2 \arctan x}{\ln \sin x}$$

$$7.69 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right]$$

$$7.70 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} \right]$$

$$7.71 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$$

$$7.72 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$7.73 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$$

$$7.74 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$$

$$7.75 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$7.76 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^{\frac{1}{y}}$$

$$7.77 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\frac{1}{1-x}}$$

$$7.78 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{m} \right)^m$$

$$7.79 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$$

$$7.80 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$$

$$7.81 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$$

$$7.82 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$$

$$7.83 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$$

$$7.84 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$$

$$7.85 \quad \lim_{y \rightarrow a} (a^2 - y^2) \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a}$$

$$7.86 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

$$7.87 \quad \text{验证极限 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \text{ 存在, 但不能用罗彼塔法则计算.}$$

$$7.88 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$[\text{提示: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}]$$

曲线的斜渐近线

求各曲线的斜渐近线 (7.89 — 7.102):

$$7.89 \quad y = \frac{1}{x-1} + 3 \text{ (并作图)} \quad 7.90 \quad y = \frac{x^2}{x+1} \text{ (并作图)}$$

$$7.91 \quad y = \frac{x}{3-x^2} \text{ (并作图)} \quad 7.92 \quad y = 2^{\frac{1}{x}}$$

$$7.93 \quad y = e^{-x} \sin x$$

$$7.94 \quad y = \arctg \frac{1}{x+1}$$

$$7.95 \quad y = x - 2 \arctg x \text{ (并作图)} \quad 7.95 \quad \frac{x^2}{4} - \frac{1}{9} = 1$$

$$7.97 \quad (y+x+1)^2 = x^2 + 1$$

$$7.98 \quad 2y(x+1)^2 = x^3$$

$$7.99 \quad y = x \ln(e + \frac{1}{x})$$

$$7.100 \quad y = 2x + \arctg \frac{x}{2}$$

$$7.101 \quad y = \frac{1}{(x+2)^3}$$

$$7.102 \quad y = e^{\frac{1}{x}} - 1$$

§ 7.6 误差估计

7.103. 为了使求出球乙积准确到 1%, 问度量球半径 R 时, 允许发生的相对误差如何?

7.104. 摆动的周期 T (以秒计) 按下式确定:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

其中 l (以公分计) 为摆长, $g = 981$ 厘米/秒² 为重力加速度。

a) 为了使周期 T 增大 0.05 秒, 摆长 $l = 20$ 厘米的长度需修多长若干?

b) 当测得周期 T 时的相对误差为 δ 时 (设摆长不变), 所谓 g 值的相对误差如何?

7.105. 测得正方形的边长等于 24.51 米, 误差为 ± 0.01 米, 试求出在此计算其面积时的绝对误差与相对误差。

7.106. 计算 $\sqrt{x}$ 时, 要求其相对误差不大于 δ , 问测 x 时, 允许有多大相对误差?

7.107. 设 x 的相对误差为 δ , 求 $\lg x$ 的绝对误差

§ 7.7 函数的近似表示

7.108. 说明公式 $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$, 在几何上是用一条什么曲线在 $x_0 + \Delta x$ 的纵坐标值, 来代替 $f(x)$ 在 $x_0 + \Delta x$ 处的函数值。

7.109. 应用公式 $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$ 计算某些数的近似值时, 应根据什么原则确定:

① $f(x)$; ② x_0 ; ③ Δx 。

7.110. 求下列各数的近似值

a) $\sin 29^\circ$

b) $\cos 61^\circ$

c) $\ln 11$

d) $\arcsin 0.54$

e) $\sqrt{e}$

f) $(\frac{98}{99})^5$

7.111. 证明在工程中常用的近似公式

$$\sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}} \quad (a > 0, |b| \ll a)$$

并利用它计算

a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{34}$

c) $\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt[7]{100}$

7.112. 当 $|x|$ 足够小时, 证明下列各近似公式, 并判断其误差近似值或弱近似值.

a) $(1+x)^n \approx 1+nx$

b) $\sin x \approx x$

c) $\ln(1+x) \approx x \quad |x| < 1$

d) $e^x \approx 1+x$

e) $\arcsin x \approx x \quad |x| < 1$

§ 7.8. $\int$ 积分的判别法

无穷积分的判别法

计算下列积分 (7.113-7.118):

7.113. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

7.114. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

7.115. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

7.116. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

7.117. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

7.118. $\int_0^{\infty} e^{-dx} dx$

7.119. 求证无穷积分 $\int_a^{\infty} \frac{|\varphi(x)|}{x^p} dx$ 当 $p > 1$ 并且

$\varphi(x)$ 在区间 $x \geq a > 0$ 上为有界函数时, 为收敛积分。

检查下列所给积分的收敛性 (7.120-7.136):

7.120. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$

7.121. $\int_0^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx$

7.122. $\int_0^{\infty} \frac{x^{13} dx}{(x^5+x^3+1)^2}$

7.123. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

7.124. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

7.125. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+x^3}}$

7.126. $\int_2^{\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}} dx$

7.127. $\int_1^{\infty} x^x e^{-x} dx$

7.128. $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$

7.129. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

7.130. $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

7.131. $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

7.132. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}$

7.133. $\int_0^{\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$

7.134. $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x \sqrt{1+x^2}} dx$

7.135. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} dx$

7.136. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0)$

7.137. 设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 函数 $\varphi(x)$ 有界, 则

积分 $\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$ 是否必收敛? 举出适当的例子。

若前一个积分绝对收敛, 问后一个积分的收敛性如何?

积分判别法

计算下列积分 (7.138-7.142):

$$7.138 \int_0^1 \frac{dx}{x^n}$$

$$7.139 \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} \text{ (设 } b > a \text{)}$$

$$7.140 \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} \text{ (} b > a \text{)} \quad 7.141 \int_0^1 x \ln x \, dx$$

$$7.142 \int_0^2 \frac{dx}{x \ln x}$$

判断下列积分的敛散性 (7.143-7.154):

$$7.143 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}} \text{ (} b > a \text{)} \quad 7.144 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7.145 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} \quad 7.146 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$7.147 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^3}} \quad 7.148 \int_0^1 \frac{dx}{\sin^2(1-x)}$$

$$7.149 \int_0^1 \ln x \, dx \quad 7.150 \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{x-1}}$$

$$7.151 \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1} \quad 7.152 \int_0^1 \frac{\sqrt{x} \, dx}{e^{\sin x} - 1}$$

$$7.153 \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x} \quad 7.154 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

7.155 求曲线 $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 和它的渐近线之间的图形的面积.

7.156 求曲线 $y = x \ln x$ 与 x 轴所围成的面积.

7.157 设在原点 $x=0$ 处放有 8 单位正电荷, 在点 a 处放 1 单位正电荷, 求它们间的斥力把单位正电荷由点 a 引至无穷远处所作的功.

7.158 当 a 为何值时积分 $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^a \ln x}$ 收敛?