高等学校教学用書

畫法幾何教程

下冊

Н. А. ПОПОВ著

浙江大学画法几何及制图教研組譯

高等学校教学用书

画法几何教程

下册

Н. А. 波波夫著

浙江大学画法几何及制图教研組譯

前　　言

本書系根据苏联国立科学技术理論書籍出版社（Государственное Издательство Технико-Теоретической Литературы）出版的，波波夫（Н. А. Попов）所著“画法几何教程”（Курс Начертательной Геометрии）1947版譯出。原書經苏联高等教育部审定为高等工业学校教科書。

本書中譯本分上下兩册出版，由浙江大学画法几何及制图教研組翻譯。上册已由高等教育出版社出版。参加下册翻譯和校訂工作的有（依頁次先后为序）施潤昌、王之煦、蕭善駒、杜銘愚、馬霄鵬、杜文偉、蔣协中、徐道观、柯　純、王槐卿和王高升。全書最后并由柯　純校訂。

下册目录

第十二章

曲面与平面以及曲面与直綫的相交。展开

§49. 曲面的断面和展开概論

曲面（在特殊情况下是多面体）被平面截断而得的断面，是一平面图形，它包含了既在曲面上又在截平面上的点。

断面的一般作法是在于求出曲面素綫和截平面的交点。

假如平面截断一直綫面，那末断面的作法就归結于求出直綫（直綫素綫）与截平面的交点。

特别是，假如平面截断多面体，那末得到的断面是多边形，这个多边形的頂点是作为多面体稜綫与截平面的交点而求得的，或者这个多边形的边是作为多面体的稜面与截平面的交綫而决定的。

同样，假如平面截断一曲綫面，則可在这个曲面上找出一些尽可能簡單的曲綫（例如圓），并求出这些曲綫与截平面的交点。

在作断面的同时，順便地来研究展开图的作法是适当的。假如把立体表面重合于一个平面上，这样得到的平面图形叫做表面的展开图。

假如曲面立体是一个多面体，那末为了求出它的展开图，必須决定多面体所有稜面的眞实大小，并把这些眞实大小以一定的次序画在平面上。

在展开可以展开的直綫面时，可以把可以展开的直綫面当作由許多数量的无穷小的平面基素所組成，換句話說用多面体来代替此曲面立体，这时，代替光滑曲綫的折綫应这样作出，使折綫的边長尽可能地接近于曲綫的弧長。在这一情况下，多边形的各边將非常接近于展开了的曲綫的弧。

§50. 曲面立体被投射面所截而得的断面

假如截平面是一个投射面，那末决定这个断面就很簡單。讓我們来研究这种断面的例子。

例1.在图403中，直三稜柱的底面 ABC 在平面H上，它被一縱面投射面P截断。

断面三角形 EFG 的縱面投影 $e'f'g'$ 重合于縱面跡綫 P_v，因为点 E，F，G 的縱面投影 $e'f'g'$ 应該在稜柱稜綫的縱面投影与平面P的交点上。

断面三角形的横面投影重合于稜柱的横面跡綫，因为稜柱是直立的，所以它的稜綫垂直于平面H。

断面图形的眞实大小可以用变更投影面法或重合法求得。

在用第一种方法时（图403a）采用平面P作为新的横面，而它的縱面跡綫P_V作为軸O_1X_1。当平面P与图紙平面重合之后，在經过 e'，f'，g' 而垂直于 O_1X_1 的直綫上，截取投影綫段使等于点 e，f，g 在平面H上的投影綫段：

$e'e_1 = ea'$，$f'f_1 = fb'$ 和 $g'g_1 = gc'$。三角形 $e_1f_1g_1$ 就是断面的真实大小。

在用第二种方法时（图403б）將平面P繞跡綫 P_H 旋轉使重合于平面H，跡綫P_V重合于軸OX。按照重合法的一般規則我們得到所求的三角形$e_0f_0g_0$。

在同一个图上，解决了根据在稜面 BCGF 上的点K的縱面投影 k'，决定它的横面投影k的問題。稜面BCGF 的横面投影重合于稜柱底面的一条边的横面投影 bc；所以

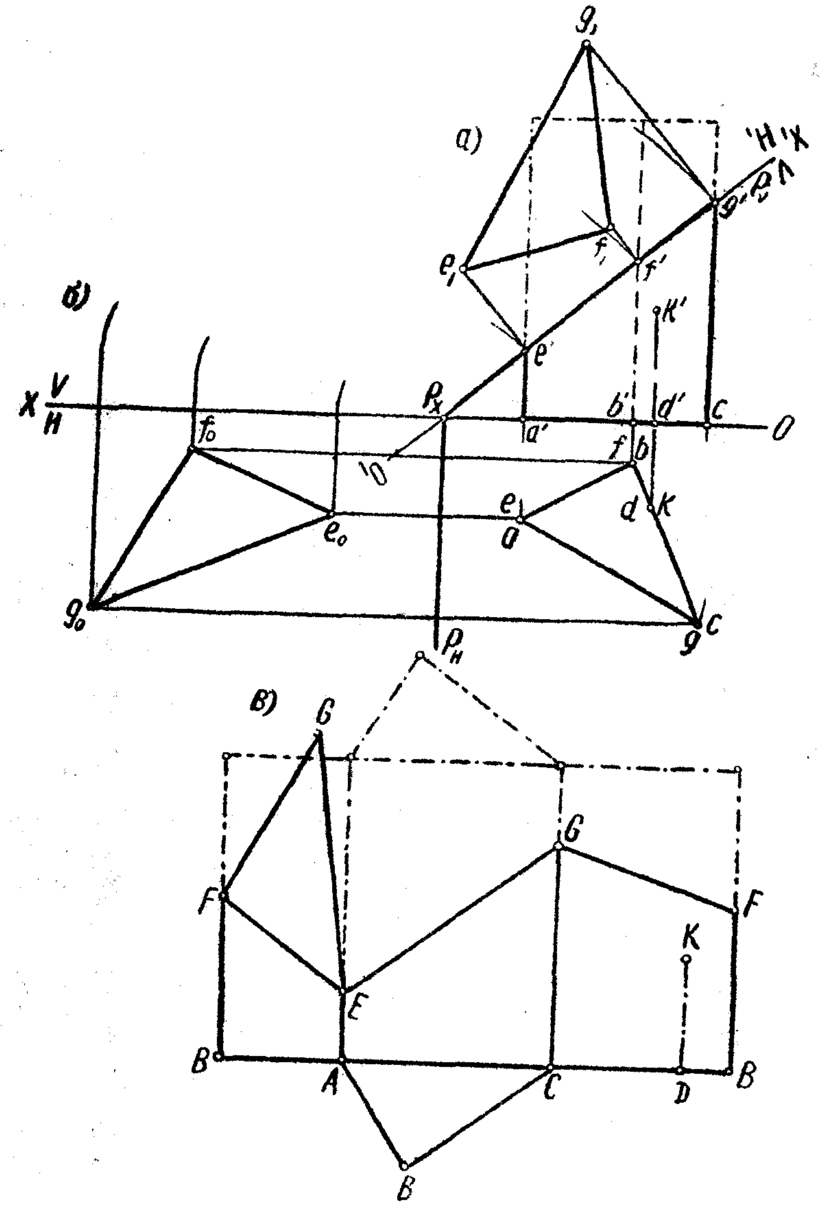

图 403

点K的横面投影k是在bc与从投影k′向軸OX所作的垂綫的交点上。

稜柱側表面的展开图是由三个長方形組成的，这三个長方形的底边各等于稜柱底面三角形的边，而長方形的高則等于稜柱的高。

展开图的作法可用下列方法来进行（图403,в）：在一直綫上截取稜柱底面三角形的各边BA，AC，CB（从平面H上取得），而在从求得的各点B，A，C和B所引的垂綫上截取稜柱高度（从縱面投影面上取得）。假如在稜柱側表面展开图上再作出稜柱的底面，那么就得到了稜柱的完整展开图。

为了作出截頂稜柱的側表面展开图（或者說，作出断面綫）在經过B，A，C，B各点的垂綫上从平面V上截取稜綫被平面P截去稜柱的頂后所余下的部分：BF＝b′f′，AE＝a′e′和CG＝c′g′。要得到截頂稜柱的完整展开图，在一条稜綫旁添作断面的眞实大小，在我們这个图中断面的眞实大小添作在EF的旁边。

把点K迁移到展开图上，为此，从点C截取綫段CD＝cd(从平面H上取得)，而在經过D点的垂綫上截取綫段DK＝d′k′（从平面V上取得）。

例2.在图404上，正五稜錐的底面在平面H上，并且它被一縱面投射面P截断。

用a′,b′,c′,d′和e′表示稜錐的稜綫与平面P的交点的縱面投影，在相应的稜綫的横面投影上，求出这些点的横面投影a,b,c,d

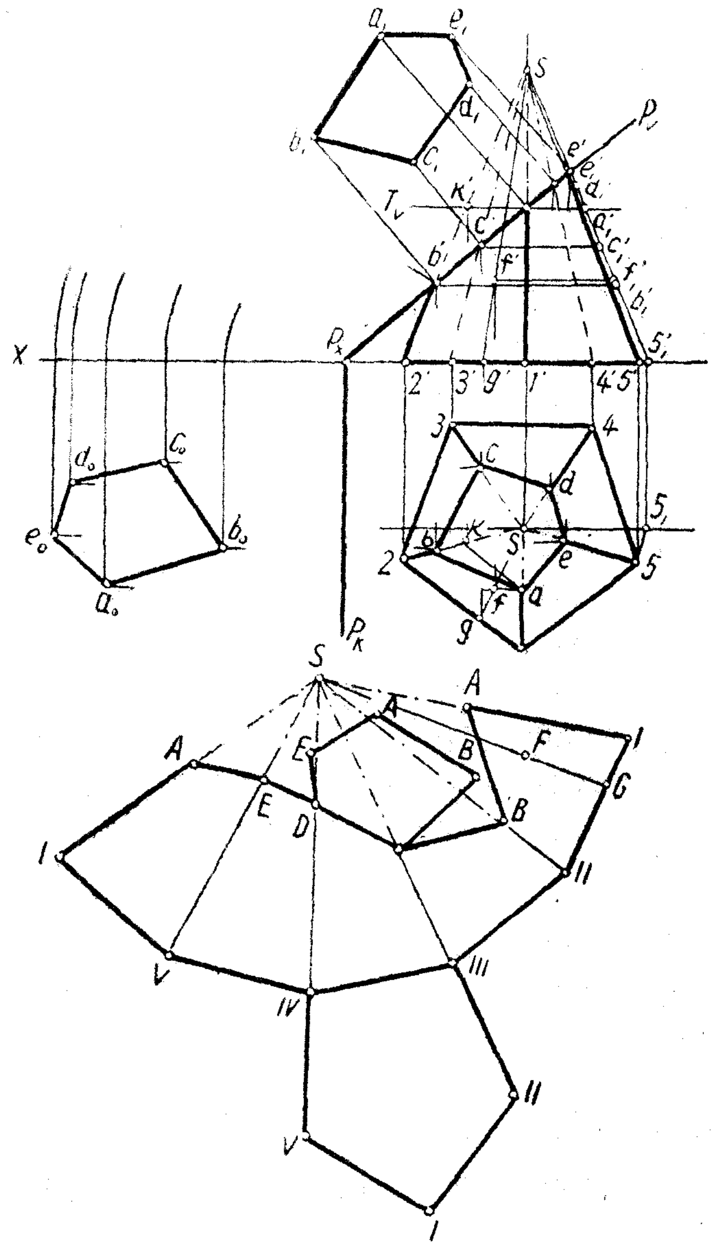

图 404

和e。点A的横面投影a是利用一个輔助的横面平行面T求得的，与稜錐相交的平面T在平面H上給出与稜錐的底面似的一个图形。因此求出稜綫S—Ⅱ与平面T的交点K，再經过横面投影k作一直綫平行于1—2，使与s—1相交于点a，点a即为所求的横面投影。

为了要作出在稜面Ⅰ—S—Ⅱ上由其縱面投影f′給出的点F的横面投影f，經过s′和f′作直綫使与稜錐底面的边的縱面投影1′—2′相交于g′，与点s，連接位于投影1,2上的横面投影g，并在sg上决定横面投影f。

断面图形的眞实大小是用改变投影面法和重合法求得的，在第一种方法中采用平面P作为新的横面。在第二种方法中將平面P繞P_H旋轉使它重合于平面H。

稜錐的側表面的展开图是由五个等腰三角形組成的，这些三角形的底边等于五边形的边長，而三角形的兩条腰等于側稜綫的眞实大小。在現在的情形下側稜綫的眞实大小是由旋轉稜綫S—V至平行于平面V的位置而确定的。

稜錐的展开图的作法如下：任意地取一点S—稜錐頂点—以側稜綫的眞实大小s′—5′，为半徑从点S作圓弧。从圓弧上任意一点开始用兩脚規沿圓弧截取等于底面五角形的边的綫段五次。按照它們在投影图上所表示的符号的次序用符号标注求得的点，并把这些点与頂点S連接起来。如果在任一个三角形的底边旁边添作一个底面五角形，則得到了稜錐表面的完整展开图。

將点a′，b′，c′，d′和e′迁移到$s'—5'_1$上，因为这相当于旋轉所有截断后的綫段至平行于平面V的位置，所以就可以决定稜錐截断面的側稜綫Ⅰ—A，Ⅱ—B，Ⅲ—C，Ⅳ—D和Ⅴ—E的眞实大小。由此可見$5'_1—a'_1$就是稜綫截断后的部分Ⅰ—A的眞实大小$5'_1—b'_1$是稜綫截断后的部分Ⅱ—B的眞实大小，以此类推。在稜錐展开图相应的稜綫上，截取稜錐側稜綫截断后的部分的眞实大小；如果再添作一个断面的眞实大小，則就得到了截頂稜錐的完整展开图。

为了要在展开图上作出点F，从点Ⅰ向点Ⅱ方向截取綫段Ⅰ—G＝1—g，連接点G和S，并在SG上截取$GF=5'_1—f'_1$也就是綫段GF的眞实大小。

圓柱和圓錐的断面图形的作法与稜柱和稜錐的断面图形的作法并沒有什么不同，因为可以把圓柱的素綫看作是內接于該圓柱的稜柱的稜綫，把圓錐的素綫看作是內接于該圓錐的稜錐的稜綫。

例3、在图405中是一个底面在平面H上，并且被縱面投射面P截断的正圓柱。我們来求出其断面的側面投影，断面的眞实大小，以及截頂圓柱的展开图。

为了作出柱面与錐面的断面的投影，以及其側表面的展开图，取許多均匀分布的素綫較为方便。在已知情形下，于图405，將底面圓周分成了8等分，同时將素綫从平面H上轉移到平面V和W上。

断面的縱面投影与截平面的縱面跡綫 P_V 重合，而它的横面投影与圓柱的横面跡綫重合。如果把平面P与圓柱素綫的交点的縱面投影 a′, f′, d′…… 轉移到相应的素綫的側面投影上，并用光滑曲綫把它們連接起来，那末就得到了断面的側面投影。断面图形的側面投影是一个橢圓，但如果平面P对平面H的傾斜角度变成45°，那末这个橢圓就变成圓了。

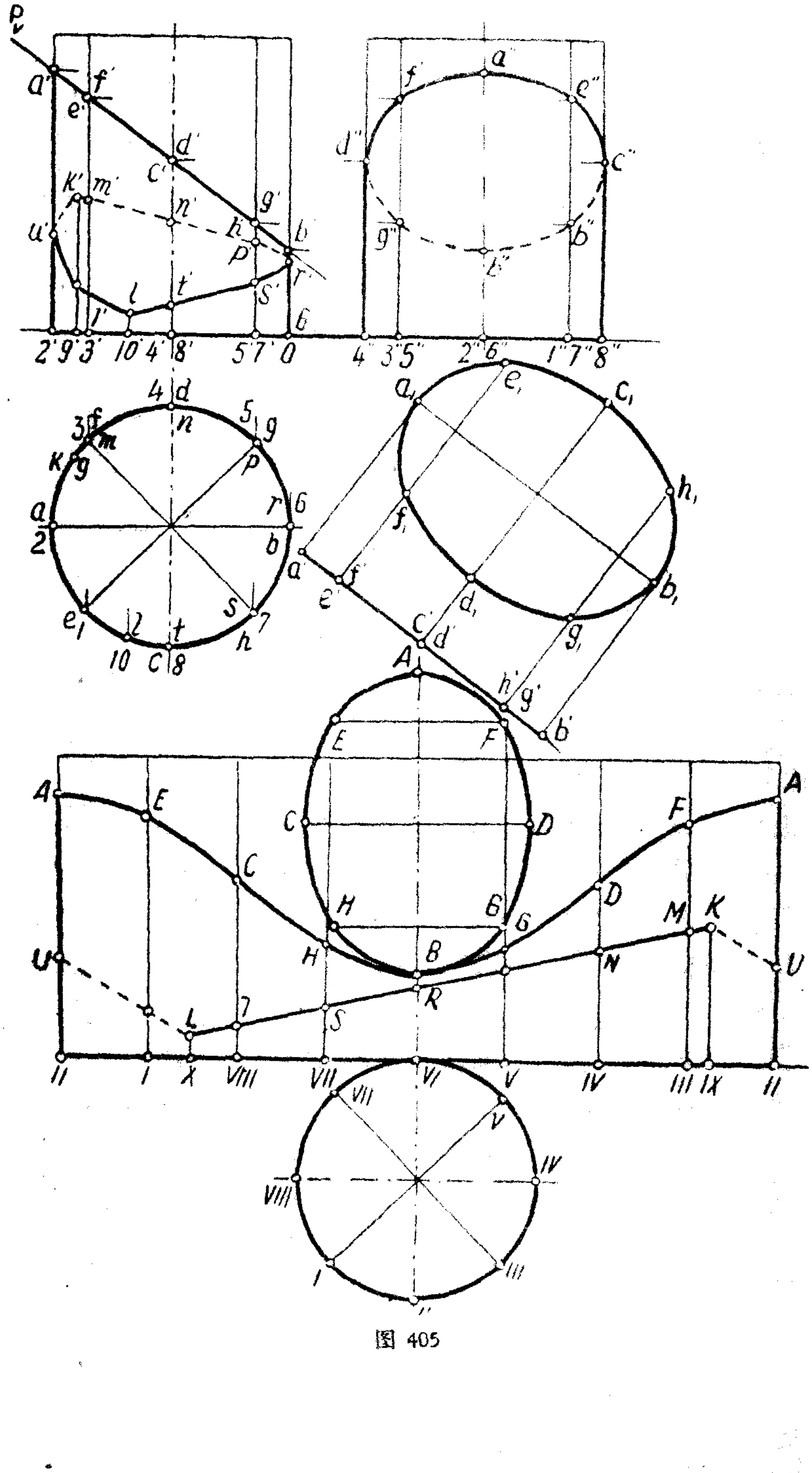

图 405

断面的真实大小是用改变投影面法求出的，并且同样也將是一个短軸等于圓柱直徑的橢圓。

为了作出圓柱側表面的展开图，在一直綫上截取圓柱底面圓周的長度πd（d为圓柱的直徑），并把它分成8等分，然后引直綫垂直于此直綫，在这些垂綫上截取圓柱的高度（从平面V上取得）。

如果在垂綫上从平面上截取圓柱的素綫被平面P截断后的部分（从軸OX到跡綫P_v的距离），并把求得的各点A，F，D，……用光滑曲綫連接起来，那末就得到了截頂圓柱側表面的展开图。

如果在完整圓柱的側表面的展开图旁边添上圓柱的兩个底圓，而在截頂圓柱的側表面的展开图旁边添上一个底圓和一个实真大小的断面图形，那末我們就得到了沒有截頂的和截頂的圓柱的表面的完整展开图。

最短綫。常常必須量度在任何曲面上的兩点間的最短距离。在这种情况下，此距离只有在直綫面上当兩点都位于同一素綫上时才可能沿直綫来測度。如果兩点是在不同的素綫上或者是在非直綫面上，那末此兩点間的距离就必須沿曲面上的某一曲綫来測度了。

在平面上最短的距离就是一直綫；如果曲面是可以展开的，那末当它展开在一平面上时，在曲面上的綫的長度是不变的，因此曲面上兩点間的最短距离应沿在展开图上变成了一直綫的那条綫来測度。在可展开的曲面上的这种綫叫做最短綫。

要作出曲面上兩点間的最短綫，必須先作出曲面的展开图，在此展开图上作出已知的兩点，用直綫把它們連接起来，然后根据此直綫上的点在展开图上的位置决定这些点在曲面上的位置。

在圓柱上（图405）取兩点K和L，利用圓柱上通过Ⅸ和Ⅹ的素綫，把这兩点轉移到展开图上，并用直綫把它們連接起来，在圓柱投影对应的素綫上作出在展开图上直綫KL与素綫Ⅹ—L，Ⅷ—C，Ⅶ—H，Ⅵ—B，Ⅴ—G，Ⅳ—D，Ⅲ—F，Ⅸ—K的交点M.N.P.R.S和T。曲綫LTSRPNMK就是所求的最短綫①，它的横面投影是一个圓，即圓柱在平面H上的跡綫。

所求之最短綫是一圓柱螺綫。該綫之縱面投影系一正弦曲綫。

例4，以横面平行面T截断一圓錐（图406），并作出展开图。

如果圓錐被平行于H的平面T截断，那末如同前面所指出过的一样，因为平面T是一縱面投射面，所以断面的縱面投影与跡綫T_v重合，而它的横面投影將相似于底面，也

① 常常有这种情形：在曲面上的兩点可能用不止一条而是几条最短綫来連接，这时在曲面上該兩点間的最短距离就沿其中長度最短的一条来測度，例如我們在在图405中求得的最短綫KMNPRSTL并不是最短的一条，此兩点間的最短距离是沿向着另一側的綫段KUL。

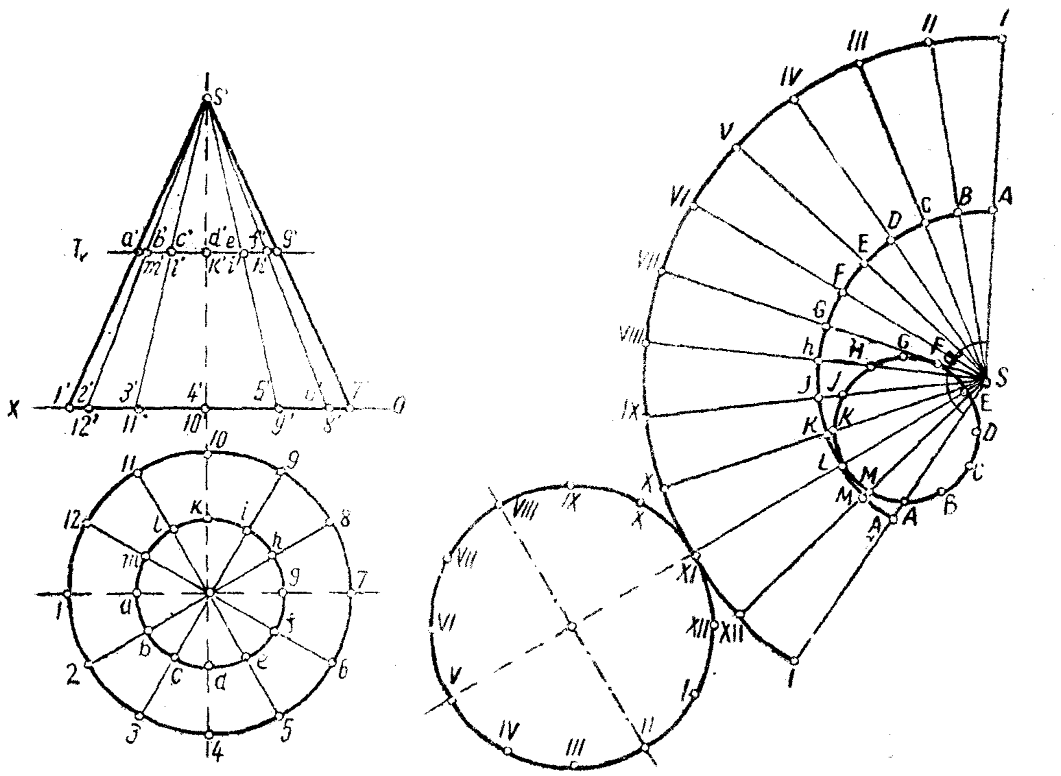

图 406

就是說將是一个圓，这个圓的直徑等于断面的縱面投影 a′g′ 的長度。由此可見，从圓錐底面的中心以断面的縱面投影長度之一半为半徑作圓，則就得到了断面的横面投影。

我們首先来作沒有截頂的圓錐的側表面展开图，为此，將圓錐底面圓周分成 12 等分，引素綫，并作展开图就象作十二个稜面的稜錐的展开图一样，所不同的是我們用圓弧来連接素綫的端点，这个圓弧是以三角形的公共頂点—圓錐的頂点——为中心，素綫的長度为半徑作出的。为了更准确地作出圓錐側表面的展开图，可以决定展开图所形成扇形的角度，按照公式：

$$\alpha=\frac{360^\circ r}{S}$$

这里 S 表示素綫的長度，而 r 表示圓錐底面圓周的半徑。实际上，扇形的弧的長度 L 就是圓錐底面圓周的長度，也就是 $L=2\pi r$，及 $L=S\alpha$

或　$2\pi r=S\alpha$

由此得　$\alpha=\frac{2\pi r}{S}=\frac{360^\circ r}{S}$，

如果从完整的圓錐表面的展开图中，除去截出的圓錐表面的展开图，那末就求得了截頂圓錐側表面的展开图。但是截出的圓錐相似于完整的圓錐，因此它的側表面展开图是与完整的圓錐的展开图具有同一中心角的扇形，但半徑等于截出的圓錐的素綫長度。

从扇形的中心S用等于s′a′的半徑作圓弧，即得环狀扇形A—I—I—A。这就是截頂圓錐側表面的展开图。要求出截頂圓錐的表面的完整展开图，必須添作底面圓周及断面圓，如图406所示。

例5，于图407底面在平面H上的一正圓錐被縱面投射面P截断。

断面图形的横面和側面投影是利用均勻分布的素綫作出的。断面图形的横面和側面投影都是橢圆。截平面P对H存在着这样的一个傾斜角度，在这个傾斜角度下断面图形在平面W上的投影也可能是一个圓，但在横面上的投影却始終是橢圓。

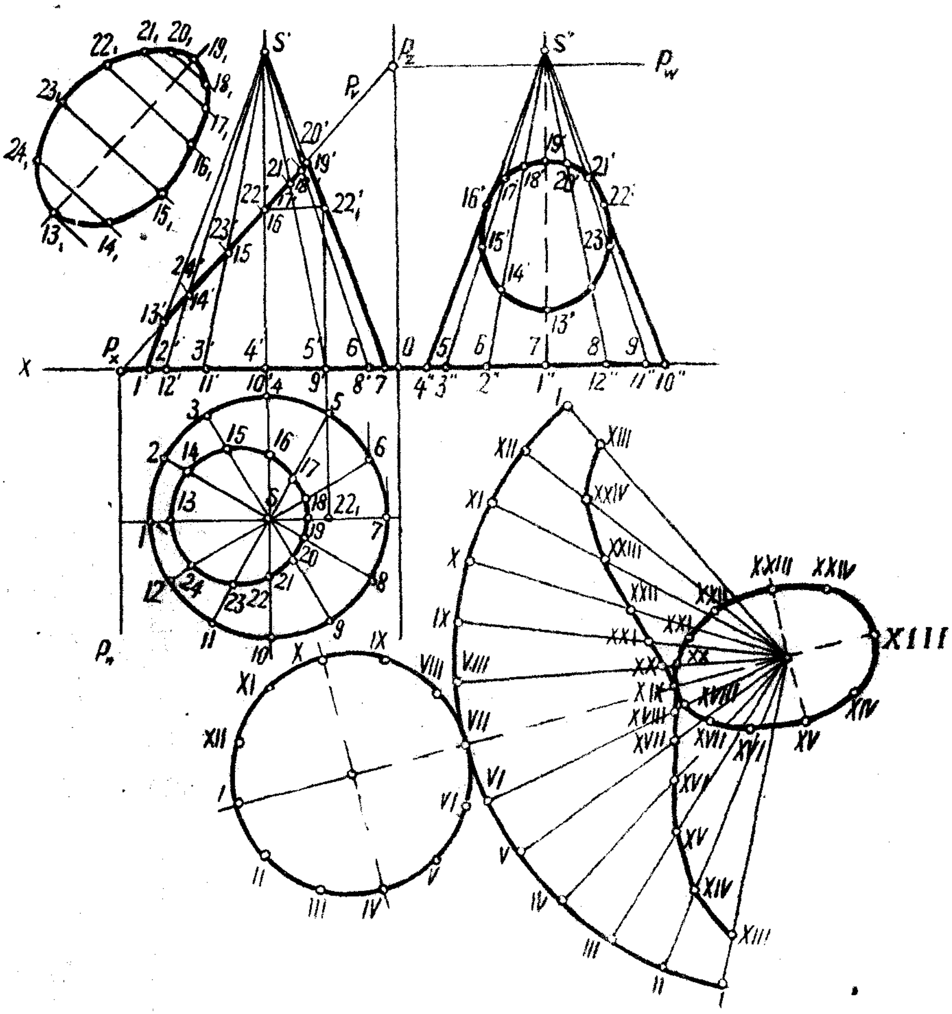

图 407

点XⅢ，XIX，XVI和XXII——断面曲綫与圓錐在平面V和W上投影輪廓的切点——都是特别重要的点。

为了作出截頂圓錐側表面的展开图，我們首先来决定完整圓錐的扇形的中心角，按照公式：

$$\alpha = \frac{360°\gamma}{S}$$

这里 γ 表示圓錐底圓半徑，而 S 表示素綫（1′—s′）的長度。作出扇形之后，引素綫，然后决定他們的实長，并在素綫上截取素綫的截出部份，因为除了极限素綫外（在平面 V 和 W 上的投影）所有其余的素綫都是縮短了的。为了决定素綫的截出部分的眞实大小，从素綫与截平面跡綫 P_V 的交点（14′，15′，16′……）引平行于軸 OX 的直綫使与极限素綫之一 s′—1′ 或 s′—7′ 相交，这也就等于把截断后的素綫旋轉到平行于平面 V 的位置。事实上，素綫 S—X 上 S—XXⅡ 一段的实長是將投影 s—22 繞垂直于 H 并通过点 S 的軸，旋轉到平行于軸 OX 的位置 s—22_1，再把求得的点 22_1 移到极限素綫的縱面投影 s′—7′ 上的点 $22_1'$ 而求得的。从投影 22′ 引平行于軸 OX 的直綫使与素綫 s′—7′ 相交，同样的將得到同一点 $22_1'$。由此可見，s′—$22_1'$ 就是綫段 S—XXⅡ 的眞实大小，而 $22_1'$—7′ 就是素綫 S—X 上另一段 X—XXⅡ 的眞实大小。从扇形的頂点 S 截取素綫截出部份的实長，或从点Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ……截取素綫留下部份的眞实大小，那末我們就求得了截頂圓錐側表面的展开图。

如果在側表面的展开图旁边添作圓錐的底圓及断面橢圓，这个橢圓在图 407 上是用改变投影法求得的，那末就得到了截頂圓錐表面的完整展开图。

§51.　曲面立体被一般位置平面所截而得的断面

現在讓我們轉到曲面立体被一般位置平面截断而得的断面。我們从所研究的曲面立体为多面体（稜柱或稜錐）的情形开始。

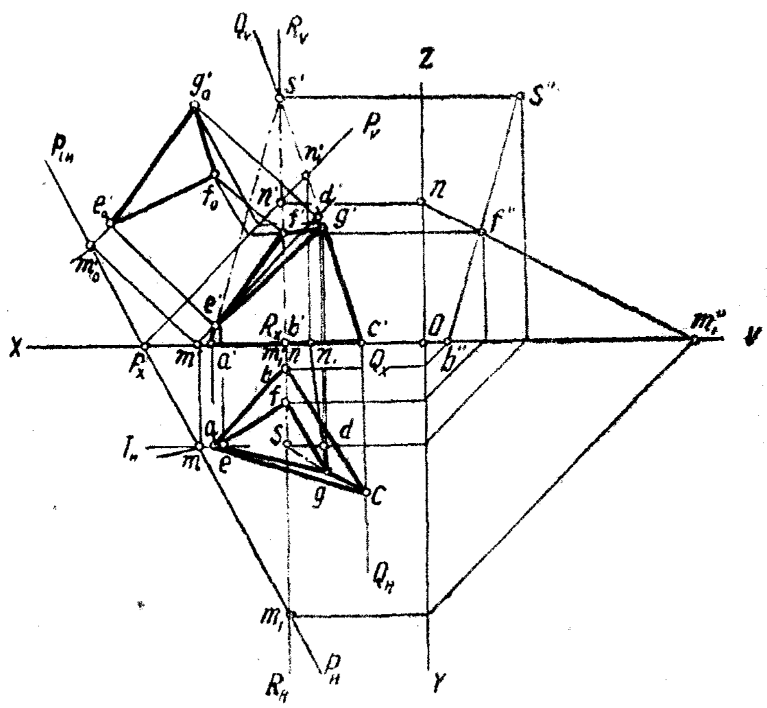

图 408

例1、于图408，已知底面在平面H的一三稜錐SABC被一般位置平面P截断。稜錐的稜綫AS平行于平面V，稜綫BS平行于平面W，稜綫CS系一般位置的直綫。

我們来求出稜錐SABC的側稜綫与平面P的交点。

通过稜綫AS引縱面平行面T，此縱面平行面T与稜錐沿稜綫AS相交，而与平面P則沿縱面平行綫相交。稜綫AS与縱面平行綫的交点E就是稜綫AS与平面P的交点。

利用側面平行面R，这个平面R与稜錐沿稜綫BS相交，而与平面P則沿直綫M_1N相交，我們来求出稜綫BS与平面P的交点。因为稜綫BS与直綫M_1N的投影重合，所以我們作出他們的側面投影$b''s''$及$m''n''$，这兩直綫的交点就是稜綫BS与平面P的交点的側面投影f''。根据側面投影我們再求出点F的橫面投影f和縱面投影f'。

为了要确定稜綫CS与平面P的交点，我們通过稜綫CS引縱面投射面Q。縱面跡綫P_V与Q_V的交点就是平面P与Q的交綫的縱面跡点N_1（n_1,n_1'），橫面跡綫P_H与Q_H不相交于图紙內；因此，为了決定平面的交綫上的第二点，取縱面平行面T，此平行面T与平面P和Q沿縱面平行綫相交，并給出平面P与Q的交綫上的第二点D（d,d'）。

稜綫CS与直綫N_1D相交于点G（g,g'），此点G即为所求之交点。

現在用直綫把求得的点e,f,g与e',f',g'連接起来，我們就得到了一三角形EFG；此三角形就是稜錐被平面P截断而得的断面。

断面三角形的眞实大小是利用將平面P重合于平面V的方法求得的。

利用改变投影面法，可以把曲面立体被一般位置平面截断而

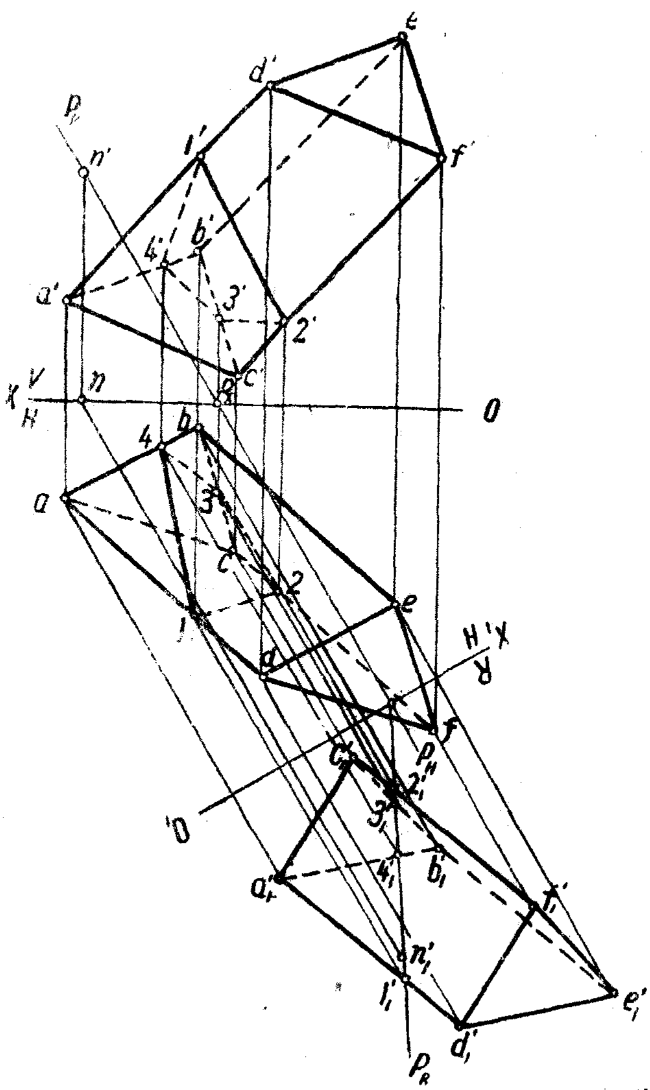

图 409

得的断面問題引导到前面曾研究过的最簡單的情形，卽截平面是一投射面的情形。

例2.設已知在空間任意位置的一稜柱及跡綫在同一直綫上的平面P。欲求出稜柱被平面P截断而得的断面图形（图409）。

我們用既垂直于平面P，又垂直于平面H的平面R（$R_H \perp P_H$）来代替平面V。作出稜柱在平面R上的投影及跡綫P_R，此跡綫P_R我們是用跡綫集合点及平面P上的横面平行綫的縱面跡点的新的縱面投影来决定的。平面P在RH体系中变成了縱面投射面。跡綫P_R与$a_1'd_1'$和$c_1'f_1'$的交点$1_1'$和$2_1'$以及P_R与稜柱底面的边$b_1'c_1'$和$a_1'b_1'$的交点$3_1'$和$4_1'$都屬于断面图形在RH体系中的縱面投影。把这些点轉移到原来的已知投影上，我們就得到所求的图形——稜柱被平面P截断而得的断面——的横面投影1－2－3－4和縱面投影$1'$—$2'$—$3'$—$4'$。

在图410上作出了图409上的稜柱的側表面的展开图。稜柱的稜面都是平行四边形（在截頂稜柱的情形下它們都是梯形）。为了作出这些稜面的眞实大小，必須知道不論是稜柱的稜綫長度或者是稜綫間的距离。

应用旋轉法，我們把稜柱旋轉到对面V最有利的位置。这时稜柱的稜綫將投影到平平面V上沒有变形。繞通过点B并垂直于平面H的軸將稜柱所有元素旋轉角度α。

为了确定稜綫間的距离，我們作垂直于稜綫的一縱面投射面Q，这个平面Q給出稜柱的正断面——三角形KLM（它的横面投影在图上沒有作出）。將平面Q重合于平面H，我們就求得了断面三角形重合后的位置$k_0l_0m_0$。稜柱的諸稜面与平面Q的交綫都垂直于稜綫；因此，重合后的三角形$k_0l_0m_0$的边就是稜綫間距离的眞实大小。就根据这一点，可以說：在展开图上断面三角形的边因为是稜綫的垂綫，所以位于垂直于稜綫的同一直綫上。

取相等且平行于$c_1'f_1'$的直綫CF，并把点m_1'移到此直綫上的点M。然后，在垂直于CF的Q_v延長綫上，截取稜柱稜綫間的距离：

$$ML=m_0l_0,\ LK=l_0k_0 \text{及} KM=k_0m_0$$

通过点L，K和M引直綫平行于CF，并把点a_1'和b_1'，c_1'和d_1'，e_1'和f_1'移到在这些直綫上的点A和B，C和D，e和F。

图形CABCFEDF就是稜柱側表面的展开图。

例3.我們以一三角形Ⅰ—Ⅱ—Ⅲ平面来截断一軸傾斜于平面H和V的稜錐SABC，并作出稜錐連同断面綫的展开图（图411）。

我們利用改变投影面法来作出稜錐被三角形平面截断所得的断面綫。为此，在平面Ⅰ—Ⅱ—Ⅲ上引横面平行綫M—Ⅲ。

取新的軸O_1X_1垂直于m—3，并作稜錐及三角形平面的新的縱面投影，此三角形平面投影成一直綫，也就是說变成了縱面投射面。把求得的断面图形的縱面投影d_1'，e_1'和f_1'轉移到原来的已知投影上。三角形平面的边Ⅱ—Ⅲ与断面三角形的边DE及FE

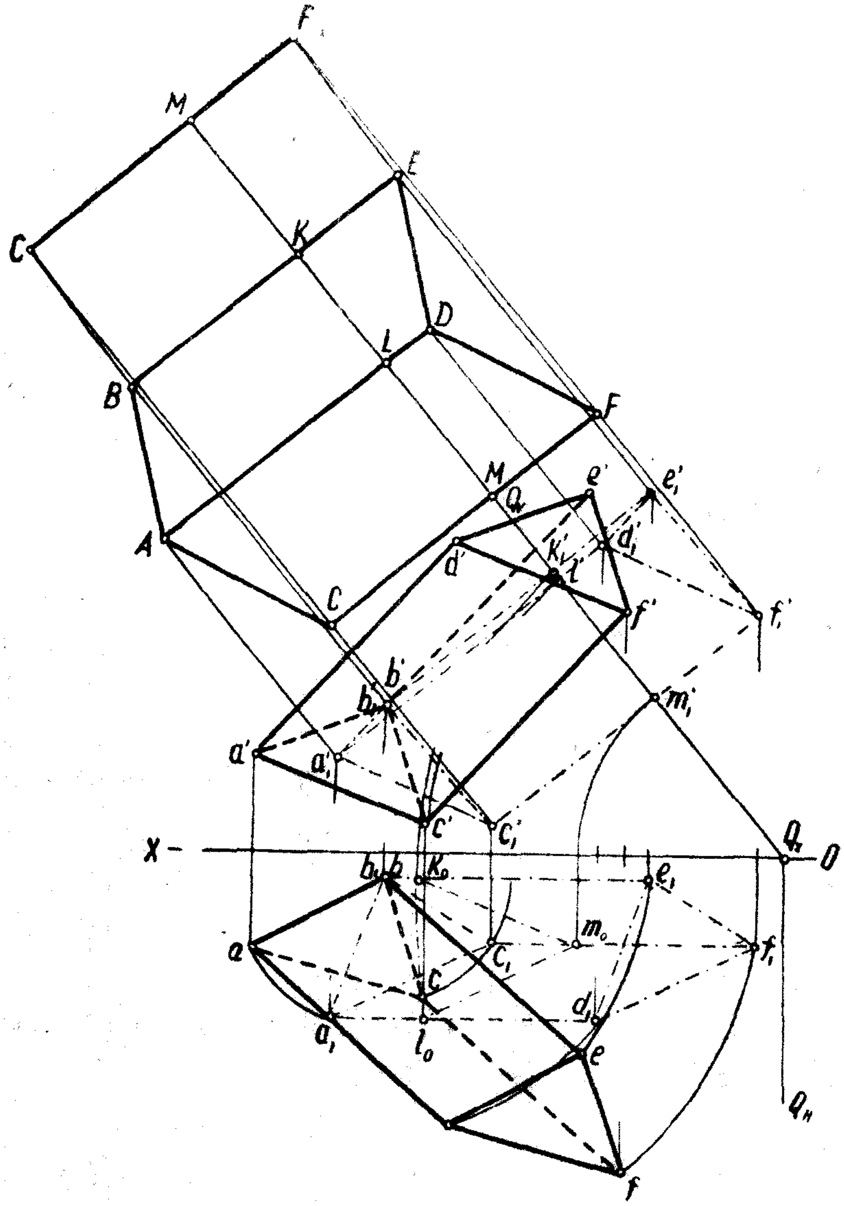

图 410

相交，决定了点K及L，即边Ⅱ—Ⅲ与稜錐的稜面SBC和SAC的交点。由此可見，断面綫是一折綫KDFL。

为了作出稜錐側表面的展开图，必須知道稜錐的所有三条稜綫的眞实大小；稜錐底面的边在平面H上，投影成眞实大小，因为稜錐的底面是在平面H上的。

我們把稜錐所有的稜綫繞垂直于平面H并通过頂点S的軸旋轉到平行于平面V的位置。

取稜綫SB的眞实大小作为稜錐的展开图的基綫，依照稜面在稜錐上排列的次序，作三角形SBA，SAC和SCB。每个三角形都是根据三条已知的边作出的。例如，在三