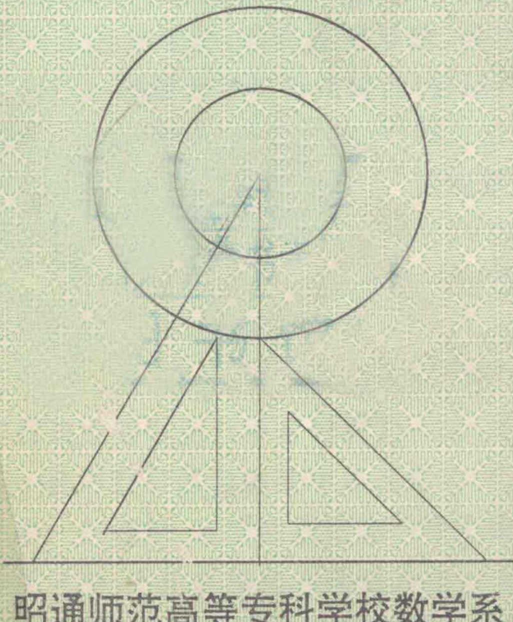
解题研究

中学数学

解题的基本思想策略和方法

（上册）

饶克勇　　编著



昭通师范高等专科学校数学系

序

昭通师专数学系副教授饶克勇编著的书《中学数学解题的基本思想、策略和方法》有以下特色：以辩证唯物主义观点和方法为立足点，全面系统地阐述了数学思维、中学数学解题的基本思想、策略和方法。其中，解题的思想和策略是揭示面对数学题，如何根据问题的特征展开思路，抓住主要矛盾，寻找解题的突破口和方法。解题方法集传统经典、近现代方法于一书，如分析法、综合法、系统方法、模型方法、数学美的方法、辩证思维方法等。特别值得一提的是，书的最后两章内容是：中学数学教科书中部分内容功能的发掘，有三个内容：(一)揭示教科书中一些基础知识的本质联系。如《五心：三角形心灵的窗口》，首先探求三角形五心的共性，以此为基础把三角形在几何、代数、三角中反映出的性质几乎全部融为一体。(二)揭示教科书中一些内容所隐含的数学思想和方法。(三)揭示教科书中一些例题、习题的联系和一题多解。

通观全书，不论从思想还是从方法上来看都有新意，是站在高观点上揭示中学数学解题的规律，是师

范院校数学系学生和中学数学教师值得一读的书，是一本有价值的中学数学教学参考书。

全书共 9 章，约 25 万字，每章后有习题，并附有解答。

昭通师专副教授　邓淙　花浓生

1995 年 9 月

本书的诞生首先要感谢昭通师专领导的大力帮助和支持，感谢数学系学术小组的审阅，感谢邓淙和花浓生两位副教授为本书作序，感谢数学系各位老师、教务处有关同志的大力支持和昭通师专学报印刷所全体同志的辛勤工作。吴文良老师在本书的微机排版过程中，提出不少建设性意见，并精心绘制了大量插图，使本书更为成熟，对本书作出了很大贡献，在此一并致谢！

书中疏漏错谬难免，望读者批评指正。

饶克勇

1995 年 10 月

目 录

第一章　数学思维方法

思维活动是借助于一定的思维方法而展开的，正确的思维方法常常是成功的思维活动的先导，没有正确的思维方法，就不可能进行有效的思维活动。

数学思维是人脑对数学对象的本质属性与内在联系的问题，作出概括的反映过程，数学思维方法则是人们对数学对象的内在联系的能动反映。思维方法是对思维内容进行加工的方式、手段和程序，具有思维规则和工具的作用。思维方法不是静态的，而是一种动态的思维能力因素，只有在对思维对象进行加工时，才能作为工具和能力表现出来，思维方法也是针对思维目的而言的工具，离开一定的思维目的，思维方法便失去了工具性，思维方法是主客观的统一体，从思维方法发生的机制看，思维方法并不是人们头脑中固有的，而是实践方法长期内化以及知识运用的结果。从知识的运用发生的思维方法看，人们的实践活动不仅遵循自然法则，而且具有自发调节的能动性，因而在实践方法的基础上形成的思维方法是自然法则和人的能动性相结合的产物。知识是思维的结果，蕴含着实践方法和过去思维的成果，知识的运用也反映人们的主观能动性，因此思维方法是主客观的统一体。

因为思维内容决定思维方法，而数学思维内容的复杂性就决定了数学思维方法的多层次性。按思维水平的程度大致分为：数学基本方法，数学思维方法和数学思想方法。其中逻辑思维方法、形象思维方法、直觉思维方法和辩证思维方法是数学中的最基本的思维方法。是各种数学综合思维方法的基础。

§1.1 数学基本方法

数学基本方法是能概括可操作的通法，即与知识并行同生，可用简捷步骤给予概括，通过反复操作就能掌握，并且运用面较广的数学方法。其中常用的基本方法有：代入法、消元法、待定系数法、换元法、配方法、三角法、割补法、公式法、坐标法、反证法……这些方法是数学中的通法，是从知识提炼出来的，适用范围广，学习掌握这些方法，是学生适应日常生活、参加生产和进一步学习所必须的，是培养能力，提高素质所必须的。

§1.2 数学思维方法

一、逻辑思维方法

逻辑思维方法是对数学概念、判断和推理进行加工改造，以形成新的概念、判断和推理的方法。数学逻辑思维方法有：

1、分析与综合方法

分析与综合是事物的整体与部分关系的反映，从整体到部分是分析，从部分到整体是综合。分析法是把数学对象分解为各个部分、环节、要素，从而认识它们在整体中的性质的思维方法，分析法包括横向分析和纵向分析，所有数学对象都有系统与过程两种状态，系统是横向表现，过程是纵向表现。系统分析是把事物从横向系统上分解为相互并存的各种要素和部分，从它们的内容联系和外部表现上把握事物；过程分析是把事物分解为前后相继的阶段和环节，从事物的运动变化中把握其规律。

综合方法，是把数学对象的各个方面、要素、环节有机地

结合成整体，从而认识它们整体性的思维方法，把事物的各个要素作横向联合，使之成为一个诸要素并存的事物系统是系统综合；把事物的诸环节作横向结合，使之成为前后相继的过程则是过程综合。

分析与综合方法是相互依存的，互相补充并相互转化的。分析的作用，是通过事物的现象认识事物的本质；综合的作用，则是把事物的本质联系起来认识事物的整体。人们的思维活动总是沿着从现象到本质的方向发展的，实现认识过程的这个飞跃以分析为主，而当达到了对事物的本质认识以后，再去说明原有现象却是以综合为主。当已有的认识与新事实发生矛盾时，又将转入新的分析，人们的思维正是在分析与综合的反复转化中发展的。因此，只有把分析与综合结合起来，才能达到对数学对象的全面认识。

2、比较与划分法

比较法是客观事物的统一性与多样性的辩证关系的反映。有统一性，才有客观事物的“同”，有多样性才有客观事物的“异”。

比较，是确定数学对象之间同异的思维方法，比较一般是对事物的本质属性的比较。比较方法有异中求同、同中求异、同异综合比较等等。比较离不开对事物的分析与综合，因此比较是建立在分析与综合基础上的思维方法。

划分，是根据同异点把数学对象区分为不同种类的思维方法。为了明确事物的外延，人们总是在比较的基础上，以事物的本质或关系为准则，对事物作出分类，所以比较是划分的前提，划分是比较的结果。

比较方法能辨别事物的异同，有助于对事物作出划分；比

较有利于分析的深入，为分析的发展创造了条件；比较有助于归纳，有助于探明事物发展的原因。

划分方法具有整理知识的作用，使杂乱的知识条理化，形成一定的数学知识结构，划分有利于把握事物的规律并预测事物的发展。

3、归纳与演绎方法

事物的一般与个别的关系，是归纳与演绎的原型。归纳是从个别事实达到一般结论的思维方法，它分为完全归纳法和不完全归纳法。演绎则是从一般原理导出个别性结论的思维方法。

在数学中，完全归纳法和演绎法作为必真推理，是数学论证和表述的方法，不完全归纳法属于似真推理，其结论具有或然性，但个性中含有共性，特殊中孕育着一般，因而它依然是扩充知识，发现真理的重要思维方法，在数学创造中有着巨大的作用。

归纳与演绎既有区别又有联系，归纳是演绎的基础，归纳的结论需要通过演绎方法论证或修正，归纳丰富和检验了演绎，演绎又指导和补充了归纳。在一定意义上，数学思维的过程就是归纳与演绎的辩证统一过程。

4、抽象与具体的方法

抽象与具体的方法是从具体到抽象的方法和从抽象到具体的方法，通过对事物的分析、比较和概括，抽象出事物的本质属性，并用概念、原理等形式固定下来，就是抽象方法。通过分析，把事物分解为各个部分，然后抽取各个本质属性，这就是抽象方法的要点。具体方法则是通过综合，把事物各个方面的本质属性联系起来，以形成对事物整体认识的思维方法。这

里的“具体”并不是常义下客观的现实事物，而是思维中对事物的具体认识，是事物属性的多样性的统一。

例如，利用抽象方法，人们从大量客观存在的平行四边形中舍弃了它们的位置、大小、颜色等非本质属性，抽象出对边平行且相等，对角相等邻角相补等本质特征，从而形成平行四边形概念。再利用具体方法，把抽象出来的各种本质属性组合起来，就形成对平行四边形的具体认识，这个平行四边形已不是客观世界中哪个特定的平行四边形，而是综合了各种本质属性的理想化的平行四边行。

运用抽象方法，人们可以撇开事物的非本质属性，从各方面认识事物的本质；运用具体方法，则进一步把各种抽象结果组织起来，从而达到对事物完整、具体、科学的认识。相对于具体而言，抽象只是对事物孤立的、片面的认识；相对于抽象而言，具体才是对事物联系的、全面的认识。离开具体的抽象是僵死的，离开抽象，则具体无法形成。因此，抽象与具体是辩证的统一。

上述各种逻辑思维方法在内涵上虽然各不相同，但它们都具抽象性和逻辑推演性的特征。逻辑思维方法的抽象性，是指它的非形象性，它们加工的对象不是事物的具体形象，而是各种抽象的意识观念，它的基本形式是概念、判断和推理。数学逻辑思维方法就是对数学概念、判断和推理的思维程序和格式。逻辑思维方法的这种抽象性，表明它不是对事物直接加工的方法。正因如此，逻辑思维方法才具有更强的能动性和主动性，成为数学中最重要和最基本的思维方法。逻辑思维方法的推演性，是指它遵循严格的逻辑规律，运用又必须是循序渐进的，这种推演性是一种强大的逻辑力量，既保证了思维活动

科学地发展，从而发现新问题，形成新知识，又提高了思维的准确性，因而成为逻辑思维方法区别其它方法的重要特征。

二、形象思维方法

数学中的形象思维方法就是对数学形象进行加工，并形成新的数学形象的方式程序，它是数学基本思维方法之一。

1、联想方法

联想是由一种事物想到另一种事物，即由此及彼的思维方法。联想的特点，在于通过形象的彼此联结而达到对事物的认识，在形象思维中，对表象的形象加工一般采取两种方式，一种是把各种表象形象通过分解重组以形成新的复合形象。另一种并不破坏原来的形象，而是把几种表象形象连结起来形成形象链，这后一种加工方式就是联想方法。

客观事物之间存在的种种联系，反映在人们的思维中就形成了主观形态上的事物联系，它使人们能够达到对事物由此及彼的认识和把握，这是联想法的基础，但是各种联想法(接近联想、对比联想、关系联想等等)对事物的关系的反映都带有主观色彩，具有猜测性和随意性，因此不仅需要把联想建立在雄厚的知识经验基础上，而且还要用其它思维方法对联想的结果作出补充和修正，特别需要指出，只有加强逻辑思维方法在联想中的主导作用，才能提高联想结果的可靠性。虽然如此，联想仍不失为形象思维的基本方法，没有联想甚至不可能有形象思维活动。这是因为，记忆为形象思维提供背景材料，而材料的提取往往需要联想这个环节。正是在这个意义上，联想也是一种重要的思维能力及方法。

例 1　已知

$$\begin{vmatrix} \sin A & \cos A & 1 \\ \sin B & \cos B & 1 \\ \sin C & \cos C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

判断 $\triangle ABC$ 的形状。

分析：把 $(\sin A, \cos A)$，$(\sin B, \cos B)$，$(\sin C, \cos C)$ 看作三个点 M, N, P，由已知联想并判断 $\triangle MNP$ 的面积为零，因而 M、N、P 三点共线。由 M, N, P 三点坐标的形式，联想到圆 $x^2 + y^2 = 1$，确认 M, N, P 三点都在圆上，由此得解法。

解：设 $M(\sin A, \cos A)$，$N(\sin B, \cos B)$，$P(\sin C, \cos C)$，由已知行列式为 0，即 $\triangle MNP$ 的面积为 0，所以 M, N, P 三点在直线 l 上。

因为 M, N, P 都在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上，而直线 l 与圆至多只有两个交点，所以 M, N, P 至少有两点重合，从而有 $A = B$，或 $B = C$，或 $C = A$，或 $A = B = C$.

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形或等边三角形。

另解：由 $\begin{vmatrix} \sin A & \cos A & 1 \\ \sin B & \cos B & 1 \\ \sin C & \cos C & 1 \end{vmatrix} = 0$，得

$$\sin A \cos B + \sin B \cos C + \sin C \cos A - \cos B \sin C - \\ - \cos C \sin A - \cos A \sin B = 0,$$

$$\sin (A - B) + \sin (B - C) + \sin (C - A) = 0,$$

$$2\sin \frac{A - C}{2} \cos \frac{A + C - 2B}{2} + 2\sin \frac{C - A}{2} \cos \frac{C - A}{2} = 0.$$

$$2\sin \frac{A - C}{2} \left[\cos \frac{A + C - 2B}{2} - \cos \frac{C - A}{2}\right] = 0,$$

$$-4\sin \frac{A - C}{2} \sin \frac{C - B}{2} \sin \frac{B - A}{2} = 0,$$

$\therefore \sin\dfrac{A-C}{2}=0$,或 $\sin\dfrac{C-B}{2}=0$,或 $\sin\dfrac{B-A}{2}=0$.

由此得,$A=C$,或 $B=C$,或 $A=B$,或 $A=B=C$.

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形或等边三角形。

2、想象方法

想象是在原有形象的基础上经过加工改造形成新形象的思维方法,新颖性和创造性是想象方法的根本特征。

数学中的思维方法,主要是再造性想象和创造性想象。再造性想象是以数学语言、符号和解析式为依据,以有关记忆的形象材料为基础形成的形象的方法,这里生成的新形象,并非完全创造,但其中含着主体的知识与理解能力的作用。因此又有创造的成分。

创造性想象是依据主体面临的思维任务和目的,独立地创造出新形的方法,这里进行的是形象的创造,产生出未曾存在着的新形象。创造性想象的这种开创性的特征往往导致数学的创造。

联想与想象是不同的思维方式,联想是通过对原有形象的勾连,从事物的联系中把握事物,是对原有形象的简单利用,想象是通过对原有形象的分解,选择与重组,运用新的形象去把握事物,是对原有形象的加工和改造,然而它们又是相互联系的,一方面,联想在想象中表现得十分活跃,丰富的想象离不开丰富的联想;另一方面,仅仅依据联想方法还不能完成思维任务,往往要把联想推向想象,因此联想是前奏,想象是归宿,只有把联想与想象结合起来,才能有效地展开形象思维活动。

例 2　已知 $x^2+y^2+2x<0$,求证:

$$x^2+y^2+6x+8>0.$$

分析与证法　把(x,y)想象为动点P，则由已知条件联想点P在圆$x^2+y^2+2x+1=1$（即$(x+1)^2+y^2=1$）的内部。欲证结论，则只需证明P点在圆$x^2+y^2+6x+9=1$（即$(x+3)^2+y^2=1$）的外部。这样只需证明两圆不相交。

设$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2+2x<0\}=\{(x,y)\mid(x+1)^2+y^2<1\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2+6x+8>0\}=\{(x,y)\mid(x+3)^2+y^2>1\}$.

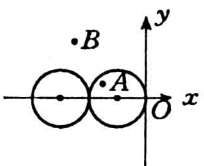


图1.1

由图1.1可知，A是以$(-1,0)$为圆心，1为半径的圆的内部；B是以$(-3,0)$为圆心，以1为半径的圆的外部。因为两圆相切于$(-2,0)$点，故$A\subset B$. 当$(x,y)\in A$时，必有$(x,y)\in B$，即当$x^2+y^2+2x<0$时，有$x^2+y^2+6x+8>0$.

4、逻辑思维方法与形象思维方法的关系

从思维内容看，逻辑思维方法与形象思维方法是两种不同的方法。思维方法是对思维内容实行加工的程序及格式，不同的思维内容必然导致不同的思维方法。一般说来，对数学形象的加工需要用联想和想象等形象思维方法，对数学的概念、判断和推理进行加工，则需要用分析、综合、归纳、演绎等逻辑思维方法。

逻辑思维方法与形象思维方法不仅有区别，而且又是互相联系、互相补充的。一方面，逻辑思维方法具有抽象性，但并非没有形象的因素，抽象只是对形象的加工和分离，是形象基础上的抽象；另一方面，形象思维的结果具有猜测性，需要逻辑思维方法的补充和修正。在现代数学思维中，形象思维方法

是基础，逻辑思维方法是主导，二者密切结合，相互渗透。没有逻辑思维方法的参与，形象思维方法是肤浅的，缺乏能动性；没有形象思维方法的参与，逻辑思维方法则是贫乏的，呆板的。一般说来，在数学思维方法中形象思维方法的作用在于引用思维材料和形成认识的雏型，逻辑思维方法的作用则是指导和修正形象思维的进程，加深认识，并达成思维的结果。

从思维方法的角度看，数学中的数形结合方法就是逻辑思维方法指导下的形象思维方法。数形结合的过程，是在数学概念、判断、推理的指导下，运用联想和想象方法展开的思维过程。数形结合在数学中有巨大的作用，是一种富有成效的数学综合思维方法。

例 3　设 $\theta \in R, m > 0$. 求证：

$$(\sqrt{2}\cos\theta - m)^2 + (\sqrt{2}\sin\theta - \frac{9}{m})^2 \geqslant 8.$$

分析与证明　由结论的形式，联想到两点间的距离，为此作换元处理，令 $m = x,\ y = \frac{9}{m}$，则 $xy = 9$，得 $(\sqrt{2}\cos\theta - m)^2 + (\sqrt{2}\sin\theta - \frac{9}{m})^2 = (\sqrt{2}\cos\theta - x)^2 + (\sqrt{2}\sin\theta - y)^2$.

逻辑思维方法：欲证结论，只须证明：

$$\sqrt{(\sqrt{2}\cos\theta - x)^2 + (\sqrt{2}\sin\theta - y)^2} \geqslant 2\sqrt{2}. \quad (1)$$

形象思维方法：(1) 式左端是以坐标系原点为圆心，以 $\sqrt{2}$ 为半径的圆上动点 $A(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$ 与双曲线 $xy = 9(x > 0)$ 上的动点 $P(x,y)$ 之间的距离。

逻辑思维方法：欲证(1) 式，只需证明 $|PA| \geqslant 2\sqrt{2}$.

形象思维方法与逻辑思维方法：如图 1.2，显然当 P，A 两点位于直线 $y=x$ 上时，即 P，A 的坐标分别为(3,3) 和(1,1) 时，$|PA|$ 最小，这时 $|PA|=2\sqrt{2}$，故结论成立。

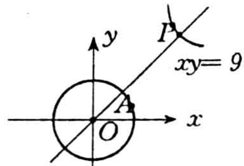


图1. 2

归纳猜测法包含于归纳演绎法中，它是由部分特例共性猜想该类对象一般性。

例 4　设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2$，$b_1=2$，$b_2=1$，从第三项起，每一项都是它前两项的和。这两个数列中含有多少个相同的数？

分析与解法　先考虑这两个数列的前几项：

$\{a_n\}$：1，2，3，5，8，13，…；

$\{b_n\}$：2，1，3，4，7，11，….

可见，$a_1=b_2$，$a_2=b_1$，$a_3=b_3$；且 $a_3<b_4<a_4$，$a_4<b_5<a_5$，$a_5<b_6<a_6$. 猜想一般性：

$$a_{n-1}<b_n<a_n \tag{1}$$

猜想的证明　当 $n=4,5$ 时，(1) 式成立。

假设 $n=k+1$，k 时，(1) 式成立，即

$$a_{k-1}<b_k<a_k,$$

$$a_k<b_{k+1}<a_{k+1}.$$

两式相加，得

$$a_{k-1}+a_k<b_k+b_{k+1}<a_k+a_{k+1}.$$

$$\because a_{k-1}+a_k=a_{k+1},$$

$$b_k+b_{k+1}=b_{k+2},$$

$$a_k+a_{k+1}=a_{k+2},$$

$$\therefore a_{k+1} < b_{k+2} < a_{k+2}.$$

从上述证明可知，对于 $n \geqslant 4$ 时，不等式(1) 都成立。故数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 从第 4 项起彼此没有相同的数，它们所含的数只有 1,2,3 三个相同。

例 5 (类比猜测法 $\subset$ 联想法 $\in$ 直觉思维) 设函数 $f(x)$ 对于非零常数 m 和任意实数 x 满足

$$f(x+m)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}, \tag{1}$$

证明 $f(x)$ 是周期函数。

分析与证明　要证明 $f(x)$ 是周期函数，关键是找出它的周期。

由(1) 式联想到三角函数等式：$\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$，它的周期 $T=\pi=4\cdot\frac{\pi}{4}$。由此产生猜想：$f(x)$ 的周期 $T=4m$.

证明猜想：

$$\begin{aligned}
f(x+4m) &= f[(x+3m)+m)] \\
&= [1+f(x+3m)]/[1-f(x+3m)] \\
&= \frac{1+\dfrac{1+f(x+2m)}{1-f(x+2m)}}{1-\dfrac{1+f(x+2m)}{1-f(x+2m)}} \\
&= \frac{2}{1-f(x+2m)}\Bigg/\frac{-2f(x+2m)}{1-f(x+2m)} \\
&= -\frac{1}{f(x+2m)}
\end{aligned}$$

而
$$f(x+2m)=\frac{1+f(x+m)}{1-f(x+m)}$$