

建筑科学研究报告

REPORT OF BUILDING RESEARCH

1982

No. 14

不均质含水层(双介层质)的引用 补给半径与渗透系数的测定

On the Presumed Radius of Replenishment and Determination of
Permeability Coefficient in Nonhomogeneous Aquifer

中国建筑科学研究院

CHINESE ACADEMY OF BUILDING RESEARCH

提 要

本报告主要阐明双层结构含水层中为测定渗透系数，应如何布置抽水试验，整理分析数据及计算等问题。

文中首先证明在双层介质中与均质含水层一样，也存在着“引用补给半径” R_i ，因而凡涉及抽水井附近的降深计算，仍可应用 R_i 的概念。从而在 R_i 的基础上推导出双层介质降深场的数学表达式。此表达式反映了井周的三维降深和其外围有限范围内的二维降深的分布规律。据此规律，提出了用抽水试验测定和计算各层渗透系数的具体方法，并用“一井多孔抽水试验”的实例作了验证。证明在抽水井附近含水层中可用 R_i 的模型代替确定的数学模型。

目 录

一、前言	(2)
二、井壁条件与 z 无关的二维流	(3)
三、井壁条件与 z 有关的三维流	(6)
四、实例验证	(14)
五、抽水实验应注意的事项和参数计算方法	(19)
参考文献	(21)

On the Presumed Radius of Replenishment and Determination of Permeability Coefficient in Nonhomogeneous Aquifer

Institute of Geotechnical Investigation Chen Yusun

Abstract

This paper describes methods to design pumping test, to analyse data and to determine permeability coefficient in nonhomogeneous aquifer. First, it is verified that there is a "presumed radius of replenishment" R_y in nonhomogeneous aquifer as well as in homogeneous aquifer; therefore, the concept of R_y can still be used for calculation of drawdown in the vicinity of a well. Hence, the mathematical expression of the field of drawdown of multi-aquifer is derived on the basis of R_y . This expression reflects the distribution of three dimensional drawdown at the periphery of the well and two dimensional drawdown within limited extension surrounding the well. According to this expression, method for determining and calculating permeability coefficients of various strata is provided and verified by practical example of "pumping test with several observation holes". It is proved that R_y model can be used, instead of determinate mathematical model, in aquifer nearby the well.

不均质含水层(双介层质)的引用 补给半径与渗透系数的测定

勘察技术研究所 陈雨孙 吴勇强

一、前言

半个世纪以来,地下水动力学有了很大发展。由于应用了数学物理方法,得出了许多新的更为完善的公式,但最早(1856年)提出的裘布衣公式

$$s = \frac{Q}{2\pi kM} \ln \frac{R}{r} \quad (1.1)$$

对描述抽水井附近地层中二维层流的稳定场来说,仍不失为一个普遍适用的基本公式。问题是必须对式中的 R 作出正确的解释。

在工程实践中,由于不存在公式推导的边界条件,即当

$$r = R; \quad s = 0 \quad (1.2)$$

使后人在应用式(1.1)时,对 R 的取值遇到困难。A. Theim(1870)年曾明确提出 R 是从抽水井到水位实际不下降的距离。于是后人将此距离叫做影响半径(本文中记为 R_i),并对它下了如下两个定义:

(1) $R_i = r(s) \mid s = 0$, 于是在无界含水层中 $R_i = \infty$; 在有界含水层中 R_i 是抽水井到边界的距离。而只有在裘布衣模型中恰得 $R_i = R$ 。

(2) $R_i = r(s) \mid s = \varepsilon$, ε 是任意规定的一个小数,例如0.01米或0.001米,则 R_i 将至少是 Q 和 k 的增函数。在实际工作中由于第一种定义无法应用,都采用第二种。并从这定义出发,已发展了一系列求影响半径的公式。

令 $R = R_i(Q, k)$ 的做法,虽已持续了一个多世纪,但因存在着一个无法回避的矛盾,毕竟值得提出来重新探讨。首先,如令 $R = R_i$ 则式(1.1)中的 s 与 Q 无法保持线性关系,即

$$\left(\ln \frac{R_i}{r} \right) / (2\pi kM) \neq \text{const}$$

这不但违背了式(1.1)的要求,也与实践不符。在实际的抽水试验中如地下水直至井壁仍保持二维、层流,则常得 $s \sim Q$ 直线,反之只要 $s \sim Q$ 属线性关系, R 必为常数而不等于 R_i 。

R 不等于 R_i ,在裘布衣的模型中表现得最为明显。不管含水层半径 R 怎样小,总可用一个足够小的 Q 抽水,使 $R_i < R$,或者不管 Q 多大,也总可选一个 R 足够大的模型,使 $R_i < R$,再者,式(1.1)中的 R 与 k 无关,而 R_i 却是 k 的函数,故知两者不能等同。

从表达边界条件的式(1.2)来看,式(1.1)中的 R 固然完全符合影响半径的定义。但如从另一个角度看,它又是反映补给源至井的距离变远,而使补给条件变差,反之则变好。这说明在裘布衣模型中, R 具有双重含意。从存在着别种补给源和补给条件的数学模型中导得的降深场解析式,如将其中的 r 缩小到井边,多可化到式(1.1)的型式,从而又可得出相应的 R

的函数式。这些函数的变量都与补给因素有关^[1]。从而说明从别种模型中导出的R也具有补给的含义。然而不再代表影响半径。因此为区别于式(1.1)中的R, 将其改记为R_r, 并改称引用补给半径。很多实际抽水试验的水文地质条件虽已与裘布衣模型大相径庭, 然而仍可以得到s_w~Q的直线关系的事实, 也正是反映了排水的全过程中补给条件没有发生变化和R_r保持为常数的必然结果。

将R_r取代式(1.1)中的R, 便可把该式从一个圆柱状含水层的简单模型推广应用到其它较为复杂的模型。但其适用范围应只限于抽水井附近, 而应将r限制在如下范围

$$r < \alpha R_r, \quad \alpha < 1 \quad (1.3)$$

这样就为研究抽水井附近稳定降深场提供一个最简便的数学模型。

过去, 用式(1.1)计算k值不准, 从计算上找原因, 主要有三: 即一, 将式(1.1)中的R当作了影响半径, 导致k值是Q的函数的错误结果。二是, 离抽水井稍远处因降深s不再是r的对数函数, 式(1.1)不再适用, 如仍以式(1.1)计算, 常得k值是r的增函数的错误结果。三是, 式(1.1)没有计及井的非完整性, 钻井和洗井过程中对地层的扰动, 滤水管中流速过大和井附近地下水产生紊流等原因引起的附加降深^[2], 因而算得的k值成为Q的减函数。而引用补给半径概念和限制条件(1.3)的提出, 将有助于消除前面两种错误。

在计算水源地的动水位时, 只要地下水资源确有保证, 应用R_r和式(1.1)即可避免使用繁冗的降深计算公式, 并节省为查明含水层的分布及边界补、排条件所必须的普查勘探工作量。

以上是在均质含水层中得出的结论。本文将研究这些结论是否可应用到非均质含水层中去。文中涉及的不均质含水层是指在垂直方向上具有多种岩性和相应的渗透系数的分层组成的含水层。但仅限于讨论最简单的双层结构的含水层, 简称双层介质。如双层介质中井壁的边界条件与z无关时, 则其中水流量属二维的, 又如井壁的边界条件与z有关, 则属三维的, 故应分两种情况研究。

二、井壁条件与z无关的二维流

在双层介质中当用完整井抽水时, 即属这一种情况。本节仍用三种在自然界中常见的补给类型, 即地表水头补给, 通过隔水层的越流补给和地下迳流补给, 说明在双层介质中存在着与均质含水层相同的“引用补给半径”。

1. 常水头补给

(1) 井在中心的圆柱状含水层, 如图1所示的双层介质的裘布衣模式中, 由于井壁上的水力坡度是与z无关的常数, 致使含水层中任一点的水头也与z无关, 从而可以写出任一圆柱断面的两层的流量各为:

$$Q_1 = 2\pi r T_1 \frac{ds}{dr} \quad (2.1)$$

$$Q_2 = 2\pi r T_2 \frac{ds}{dr} \quad (2.2)$$

T₁, T₂分别为两层的导水系数。分离变量, 并积分, 得

$$s = \frac{Q_1}{2\pi T_1} \ln \frac{R}{r} \quad (2.3)$$

$$s = \frac{Q_2}{2\pi T_2} \ln \frac{R}{r} \quad (2.4)$$

将以上两式相除得

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

根据等比定理又得

$$\frac{Q_1 + Q_2}{T_1 + T_2} = \frac{Q_2}{T_2}$$

由抽水量

$$Q = Q_1 + Q_2$$

代入式(2.4)得本问题的解

$$s = \frac{Q}{2\pi(T_1 + T_2)} \ln \frac{R}{r} \quad (2.5)$$

井壁的降深则为

$$s_w = \frac{Q}{2\pi(T_1 + T_2)} \ln \frac{R}{r_w} \quad (2.6)$$

将式(2.5)与式(1.1)相比可知

$$R_y = R \quad (2.7)$$

$$T = T_1 + T_2 \quad (2.8)$$

式(2.7)说明双层介质与均匀介质一样, 其 R_y 等于含水层半径, 而导水系数则为两层之和。

(2) 井不在中心的圆柱状含水层, 如图1中的抽水井偏离了含水层中心, 则按上节同样的理由, 可得^[3]

$$s = \frac{Q}{4\pi(T_1 + T_2)} \ln \left\{ \frac{(x-P)^2 + y^2}{(x-R^2/P)^2 + y^2} \cdot \frac{R^2}{P^2} \right\} \quad (2.9)$$

式中 P 是偏心距, x, y 是含水层中任一点的座标。在井附近由于 $x = P + r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 故当 $r = r_w \ll P$ 时得井壁的降深,

$$s_w = \frac{Q}{2\pi(T_1 + T_2)} \ln \frac{R(1 - P^2/R^2)}{r_w} \quad (2.10)$$

将式(2.10)的对数中的函数式 $R(1 - P^2/R^2)$ 记为 R_y , 即

$$R_y = R(1 - P^2/R^2)$$

故知 R_y 为含水层的半径 R 和井的偏心距 P 的函数, 然而也与含水层的非均质性无关,

(3) 半无界含水层, 式(2.9)中的偏心距 P 又可写为

$$P = R - b$$

b 是井至含水层边界的距离, 使 $R \rightarrow \infty$ 得半无界含水层的降深

$$s = \frac{Q}{2\pi(T_1 + T_2)} \ln \frac{(x-2b)^2 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (2.11)$$

令上式的 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 得井壁降深

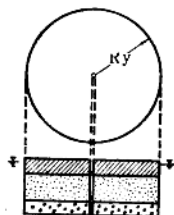


图 1

$$s_w = \frac{Q}{2\pi(T_1 + T_2)} n \frac{2b}{r_w} \quad (2.12)$$

因而得

$$R_w = 2b$$

又与均质的相同。

2. 补给水头不变的越流

由于井壁条件与深度无关，若从含水层中取出任一微柱体(图2)考察其流量平衡时仍得

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + k_0(h_0 - \bar{h})/m_0$$

式中 $\bar{h}$ 是含水层任一点的水头在 z 方向的平均值，与单层介质不同的是

$$q_x = -(T_1 + T_2) \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}$$

$$q_y = -(T_1 + T_2) \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}$$

代入式(2.13)得

$$\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y^2} - \frac{k_0}{m_0(T_1 + T_2)} (\bar{h} - h_0) = 0$$

以 $\bar{s} = h_0 - \bar{h}$

代入上式，并记

$$B^2 = \frac{m_0(T_1 + T_2)}{k_0} \quad (2.14)$$

即得

$$\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial y^2} - \frac{\bar{s}}{B^2} = 0$$

结合边界条件

$$r = r_w, \quad \frac{\partial \bar{s}}{\partial r} = -\frac{Q_1}{2\pi T_1} = -\frac{Q_2}{2\pi T_2}, \quad Q = Q_1 + Q_2$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \bar{s} = 0$$

得解

$$\bar{s} = \frac{Q}{2\pi(T_1 + T_2)} K_0\left(\frac{r}{B}\right) \quad (2.15)$$

在 $r < 0.224B$ 的范围内 $\bar{s}$ 基本上与 z 无关，即 $\bar{s} = s$ ，故当 $r = r_w \rightarrow 0$ ，得

$$s_w = \frac{Q}{2\pi(T_1 + T_2)} \ln \frac{1.12B}{r_w}$$

故得

$$R_r = 1.12B = 1.12 \sqrt{m_0(T_1 + T_2)/k_0} \quad (2.16)$$

式(2.16)说明在双层介质中也存在一个与单层相似的 R_r 。

3. 无界倾斜含水层中的逐流补给

同样,从图2的微体,考察其流量平衡时,仍得

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (2.17)$$

设在x方向有天然逐流,则式中

$$q_x = -(T_1 + T_2) \frac{\partial h}{\partial x} + \left(1 + \frac{Sh}{\mu}\right) (T_1 + T_2) I$$

式中 I 是含水层倾角的正弦或天然水力坡度,

S 为双层介质的混合弹性释水系数,亦即

$$S = \frac{S_1 M_1 + S_2 M_2}{M_1 + M_2}$$

由于y方向无天然逐流,故

$$q_y = -(T_1 + T_2) \frac{\partial h}{\partial y}$$

代入式(2.17)得定解问题

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} - \frac{SI}{\eta} \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

$$r = r_w \rightarrow 0, \quad \frac{\partial s}{\partial r} = -\frac{Q_1}{2\pi T_1 r_w} = -\frac{Q_2}{2\pi T_2 r_w},$$

$$Q_1 + Q_2 = Q, \quad r \rightarrow \infty, \quad s = 0$$

其解为

$$s = \frac{Q}{2\pi(T_1 + T_2)} e^{SIx/2} K_0\left(\frac{2r}{SI/\mu}\right) \quad (2.18)$$

及井壁的

$$s_w = \frac{Q}{2\pi(T_1 + T_2)} \ln \frac{2.25\mu/SI}{r_w} \quad (2.19)$$

故得

$$R_r = 2.25\mu/SI$$

上式说明在双层介质中也存在一个与单层相似的 R_r 。

以上用三种补给条件五个数学模型证明,双层介质中也存在着与单层相似的 R_r 。因此在双层介质中,涉及到井附近的 s 场时仍可应用“引用补给半径”的概念,即不管实际含水层的形状,边界条件,补、排关系,可用图1所示的半径为 R_r 的圆柱状含水层代替实际的含水层,并将 $s \sim \lg r$ 的函数关系限制在式(1.3)的范围内使用。

三、井壁条件与 z 有关的三维流

当用非完整井抽水时,井壁的降深随 z 而异,从而在井附近含水层中存在一个附加的三

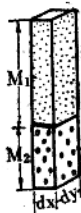


图 2

维降深场。但三维降深场的半径远小于 R ，且对 R 值也无影响，故可在承认双层介质中存在“引用补给半径”的基础上，研究此三维降深场。

设在图1所示的含水层中，有一个非完整井抽水，并达到稳定。

其微分方程为

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

具有如下性质

$$T = T_1 = k_1 M_1, \quad 0 < z < M_1$$

$$T = T_2 = k_2 M_2, \quad M_1 < z < M$$

的含水层中边界条件为

$$z = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

$$z = M, \quad \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

$$r = R, \quad s = 0 \quad (3.4)$$

$$r = r_w, \quad d_1 < z < d_2, \quad \frac{\partial s}{\partial r} = - \frac{Q}{2\pi r_w (k_1 l_1 + k_2 l_2)} \quad (3.5)$$

$$0 < z < d_1, \quad \frac{\partial s}{\partial r} = 0 \quad (3.6)$$

$$d_2 < z < M, \quad \frac{\partial s}{\partial r} = 0 \quad (3.7)$$

界面相容条件为

$$z = M_1, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s \Big|_{z = M_1 - \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s \Big|_{z = M_1 + \epsilon} \quad (3.8)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} k_1 \frac{\partial s}{\partial z} \Big|_{z = M_1 - \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} k_2 \frac{\partial s}{\partial z} \Big|_{z = M_1 + \epsilon} \quad (3.9)$$

式(3.5)假定沿滤管长度 l 的水平方向上的水力坡度是相等且与 z 无关， l_1 为滤水管在第一层的长度， l_2 为在第二层中的长度，因此 $d_2 - d_1 = l = l_1 + l_2$ 。式(3.8)，(3.9)中的 ϵ 是一无穷小数，因而该两式说明在第一、二层的界面上，降深和垂向的水力坡度各相等。

用分离变量法解式(3.1)~(3.9)，即令

$$s(r, z) = R(r) \cdot Z(z) \quad (3.10)$$

代入式(3.1)得

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = c^2 \quad (3.11)$$

c 是任意常数，但为使本问题得非零解， c 必须为下列方程的本征值，或为零。即

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -c^2 Z \quad (3.12)$$

$$z = 0, \quad \frac{dZ}{dz} = 0 \quad (3.13)$$

$$z = M, \quad \frac{dZ}{dz} = 0 \quad (3.14)$$

$$z = M_1, \quad Z \Big|_{z=M_1-\varepsilon} = Z \Big|_{z=M_1+\varepsilon} \quad (3.15)$$

$$k_1 \frac{dZ}{dz} \Big|_{z=M_1-\varepsilon} = k_2 \frac{dZ}{dz} \Big|_{z=M_1+\varepsilon} \quad (3.16)$$

及

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - c^2 R = 0 \quad (3.17)$$

$$r = R, \quad R = 0 \quad (3.18)$$

$$r = r_*, \quad d_1 < z < d_2, \quad \frac{ds}{dr} = -\frac{Q}{2\pi r_* (k_1 l_1 + k_2 l_2)} \quad (3.19)$$

$$0 < z < d_1, \quad \frac{ds}{dr} = 0 \quad (3.20)$$

$$d_2 < z \leq M, \quad \frac{ds}{dr} = 0 \quad (3.21)$$

在解边值问题(3.12)~(3.16)之前, 为了消除不均质界面上—阶导数的间断性, 先对 z 作如下的几何变换:

$$\begin{cases} z = k_1 \zeta, & 0 \leq z \leq M_1 \\ z = k_2 \zeta, & M_1 \leq z \leq M \end{cases} \quad (3.22)$$

于是当 z 变化于 $[0, M]$, ζ 变化于 $[\frac{M_1}{k_1}, \frac{M_2}{k_2}]$,

因

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dZ}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{dZ}{d\zeta}$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{1}{k_1} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dZ}{d\zeta} \right) \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{k_1^2} \frac{d^2 Z}{d\zeta^2}$$

得

$$\frac{dZ}{dz} = \begin{cases} \frac{1}{k_1} \frac{dZ}{d\zeta} \\ \frac{1}{k_2} \frac{dZ}{d\zeta} \end{cases}, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} = \begin{cases} \frac{1}{k_1^2} \frac{d^2 Z}{d\zeta^2}, & 0 \leq z < M_1 \\ \frac{1}{k_2^2} \frac{d^2 Z}{d\zeta^2}, & M_1 < z \leq M \end{cases}$$

从而边值问题(3.12)~(3.16)可改写为

$$\frac{d^2 Z}{d\zeta^2} = -c^2 k^2 Z, \quad k = \begin{cases} k_1, & 0 \leq \zeta \leq M_1/k_1 \\ k_2, & M_1/k_1 < \zeta \leq \bar{M} = M_1/k_1 + M_2/k_2 \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\zeta = 0, \quad \frac{dZ}{d\zeta} = 0 \quad (3.24)$$

$$\zeta = \bar{M}, \quad \frac{dZ}{d\zeta} = 0 \quad (3.25)$$

$$\zeta = M_1/k_1, \quad Z \Big|_{\zeta = (M_1/k_1) - \varepsilon} = Z \Big|_{\zeta = (M_1/k_1) + \varepsilon} \quad (3.26)$$

$$\frac{dZ}{d\zeta} \Big|_{\zeta = (M_1/k_1) - \varepsilon} = \frac{dZ}{d\zeta} \Big|_{\zeta = (M_1/k_1) + \varepsilon} \quad (3.27)$$

从式(3.27)可以看出经过变换后界面上一阶导数已变为连续, 但从式(3.23)又知二阶导数在界面处仍为间断。但式(3.23)在形式上属 Sturm-Liouville 型方程^[4], 在找到合适的本征值后, 仍可求得满足边界和界面条件的非零解, 亦即找到相应于每个本征值的本征函数。这些本征函数按权因子 k^2 在区间 $[0, M_1/k_1 + M_2/k_2]$ 两两相交, 并构成函数空间的完备系, 因此可用这些函数将边界条件(3.5), (3.6), (3.7)展开成广义傅里叶级数^[5]

式(3.23)表示在界面 $\zeta = M_1/k_1$ 处, 解的二阶导数不连续, 因此所得的解在被此界面分开的两个小区间内必不相同, 各记为 Z_1, Z_2 , 但有了界面条件(3.26), (3.27)的约束, Z_1, Z_2 也必为唯一确定的式(3.23)的解, 可写为

$$Z_1 = a \cos(ck_1 \zeta) + b \sin(ck_1 \zeta); \quad 0 \leq \zeta \leq M_1/k_1 \quad (3.28)$$

$$Z_2 = a' \cos(ck_2 \zeta) + b' \sin(ck_2 \zeta); \quad M_1/k_1 < \zeta \leq \bar{M} \quad (3.29)$$

由式(3.24)得

$$b = 0$$

故式(3.28)变为

$$Z_1 = a \cos(ck_1 \zeta) \quad (3.30)$$

由式(3.25), 从式(3.29)得

$$\frac{dZ}{d\zeta} \Big|_{\zeta = \bar{M}} = -a' ck_2 \sin(ck_2 \bar{M}) + b' ck_2 \cos(ck_2 \bar{M}) = 0$$

解之得

$$b' = \frac{a' \sin(ck_2 \bar{M})}{\cos(ck_2 \bar{M})}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= a' \left[\cos(ck_2 \zeta) + \frac{\sin(ck_2 \bar{M})}{\cos(ck_2 \bar{M})} \sin(ck_2 \zeta) \right] \\ &= \frac{a'}{\cos(ck_2 \bar{M})} \cdot \cos[ck_2 (\bar{M} - \zeta)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

将式(3.30), (3.31)代入(3.15), (3.16)得

$$\left. \begin{aligned} a \cos(cM_1) - \frac{a'}{\cos(ck_2 \bar{M})} \cos(cM_2) &= 0 \\ a k_1 \sin(cM_1) + \frac{a' c k_2}{\cos(ck_2 \bar{M})} \sin(cM_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

为得非零解，须使式(3.32)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \cos(cM_1) & -\frac{\cos(cM_2)}{\cos(ck_2 \bar{M})} \\ ck_1 \sin(cM_1) & \frac{ck_2 \sin(cM_2)}{\cos(c\bar{M})} \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\frac{\sin(cM_2)}{\cos(cM_2)} + \frac{k_1 \sin(cM_1)}{k_2 \cos(cM_1)} = 0 \quad (3.33)$$

或

$$\operatorname{tg}(cM_2) + \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg}(cM_1) = 0$$

解之得本征值 C_r , $r = 1, 2, 3, \dots$

由式(3.31)又知

$$a' = \frac{a \cos(cM_1)}{\cos M_2} \cos(c\bar{M})$$

代入式(3.30)，再将式(3.29)，(3.30)中的 c 换以 C_r 即得本征函数

$$Z_1 = a \cos(C_r k_1 \xi) \quad 0 < \xi < M_1/k_1 \quad (3.34)$$

$$Z_2 = \frac{a \cos(C_r M_1)}{\cos(C_r M_2)} \cos[C_r k_2 (\bar{M} - \xi)] \quad M_1/k_1 < \xi \leq \bar{M} \quad (3.35)$$

再解边值问题(3.17)——(3.21)，式(3.17)的解为

$$R = A' I_0(C_r r) + B' K_0(C_r r) \quad (3.36)$$

据式(3.18)知

$$A' = -B' \frac{K_0(C_r R_r)}{I_0(C_r R_r)}$$

代入式(3.36)得

$$R = B' \left[K_0(C_r r) - \frac{K_0(C_r R_r)}{I_0(C_r R_r)} I_0(C_r r) \right]$$

在实际问题中，由于 $C_r > \frac{\pi}{M}$, $R_r > 5M$ 即 $C_r R_r > 5\pi$,

故

$$K_0(C_r R_r) < 10^{-4}$$

而

$$\frac{I_0(C_r r)}{I_0(C_r R_r)} \leq 1$$

又因在实际问题中, 欲求s的范围 $r < R$, 故

$$\frac{K_0(C_r R_r)}{I_0(C_r R_r)} I_0(C_r r) \approx 0$$

故可将式(3.36)简化为

$$R = B' K_0(C_r r) \quad (3.37)$$

将式(3.37)及(3.34), (3.35)代入式(3.10)并记两个系数的乘积为

$$B' a = B_r$$

则得方程(3.1)并符合式(3.2), (3.3), (3.4), (3.8)及(3.9)的解

$$s(r, \zeta) = B_r K_0(C_r r) \cos(C_r k_1 \zeta); \quad 0 \leq \zeta < M_1/k_1$$

$$s(r, \zeta) = B_r \frac{\cos(C_r M_1)}{\cos(C_r M_2)} K_0(C_r r) \cos C_r (\bar{M} - \zeta); \quad M_1/k_1 < \zeta < \bar{M}$$

由于本征值 C_r 有无穷多个, 与其相应的解也有无穷多个, 它们的线性迭加的和仍是本问题的解, 故得

$$s(r, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} B_p K_0(C_p r) \cos(C_p k_1 \zeta); \quad 0 \leq \zeta < M_1/k_1 \quad (3.38)$$

$$s(r, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} B_p \frac{\cos(C_p M_1)}{\cos(C_p M_2)} K_0(C_p r) \cos[C_p k_2 (\bar{M} - \zeta)]; \quad M_1/k_1 < \zeta < \bar{M} \quad (3.39)$$

又当 $c=0$ 从式(3.11)得

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (3.40)$$

及

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} = 0 \quad (3.41)$$

根据实际情况, 式(3.40)不可能是 z 的线性函数, 故必得

$$Z = \beta = \text{Const} \quad (3.42)$$

式(3.41)的解为

$$R = \beta_1' \ln r + \beta_2' \quad (3.43)$$

将式(3.42), (3.43)代入式(3.10), 并记 $\beta_1' \beta = \beta_1$, $\beta_2' \beta = \beta_2$

得

$$\beta_2 = -\beta_1 \ln R,$$

故第二个解为

$$s = -\beta_1 \ln \frac{R}{r} \quad (3.44)$$

将 β_1 改记为 $B_0/2$ ，并将式(3.44)与式(3.38)或(3.39)相加得

$$s_1 = \frac{B_0}{2} \ln \frac{R_f}{r} + \sum_{p=1}^{\infty} B_p K_0(C_p r) \cos(C_p z); \quad 0 < \zeta < M_1/k_1 \quad (3.45)$$

$$s_2 = \frac{B_0}{2} \ln \frac{R_f}{r} + \sum_{p=1}^{\infty} B_p \frac{\cos(C_p M_1)}{\cos(C_p M_2)} K_0(C_p r) \cdot \cos[C_p k_2(\bar{M} - \zeta)]; \quad M_1/k_1 < \zeta \leq \bar{M} \quad (3.46)$$

为确定以上两式的系数 B_0, B_p 对 s 取 r 的偏导数:

$$\left. \frac{\partial s_1}{\partial r} \right|_{r=r_*} = -\frac{B_0}{2} \cdot \frac{1}{r_*} - \sum_{p=1}^{\infty} B_p C_p K_1(C_p r_*) \cdot \cos(C_p k_1 \zeta) \quad (3.47)$$

$$\left. \frac{\partial s_2}{\partial r} \right|_{r=r_*} = -\frac{B_0}{2} \cdot \frac{1}{r_*} - \sum_{p=1}^{\infty} B_p C_p \frac{\cos(C_p M_1)}{\cos(C_p M_2)} \cdot K_1(C_p r_*) \cos[C_p k_2(\bar{M} - \zeta)] \quad (3.48)$$

代入边界条件(3.5), (3.6), (3.7)并记

$$b_0 = \frac{B_0}{r_*} \quad (3.49)$$

$$b_p = B_p C_p K_1(C_p r_*) \quad (3.50)$$

$$\gamma = \frac{Q}{2\pi r_* (k_1 l_1 + k_2 l_2)} \quad (3.51)$$

得两个付里哀级数

$$\frac{b_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \cos C_p k_1 \zeta = \begin{cases} 0, & 0 \leq \zeta < d_1/k_1 \\ \gamma, & d_1/k_1 < \zeta \leq M_1/k_1 \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\frac{b_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \frac{\cos(C_p M_1)}{\cos(C_p M_2)} \cos[C_p k_2(\bar{M} - \zeta)] = \begin{cases} \gamma, & M_1/k_1 < \zeta < d_2/k_2 \\ 0, & d_2/k_2 < \zeta \leq \bar{M} \end{cases} \quad (3.53)$$

根据本征函数按 k^2 成正交, 可以求出以上两式的系数 b_0, b_p , 即对(3.52), (3.53)两式各乘以 k_1^2, k_2^2 , 然后在各自的区间积分得

$$\frac{k_1^2 b_0}{2} \int_0^{M_1/k_1} d\zeta + k_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} b_p \int_0^{M_1/k_1} \cos(C_p k_1 \zeta) d\zeta = \int_{d_1/k_1}^{M_1/k_1} \gamma d\zeta$$

或

$$\frac{k_1 M_1 b_0}{2} + k_1 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p}{C_p} \sin(C_p M_1) = \gamma k_1 l_1 \quad (3.54a)$$

及

$$\frac{k_2^2 b_0}{2} \int_{M_1/k_1}^{\bar{M}} d\zeta + k_2^2 \sum_{p=1}^{\infty} b_p \frac{\cos(C_p M_1)}{\cos(C_p M_2)} \int_{C_p M_1}^{C_p M} \cos C_p k_2(\bar{M} - \zeta) d\zeta = k_2^2 \int_{M_1/k_1}^{d_2/k_2} \gamma d\zeta$$

或

$$\frac{k_2 M_2 b_0}{2} + k_2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p}{C_p} \frac{\cos(C_p M_1)}{\cos(C_p M_2)} \sin C_p M_2 = \gamma k_2 l_1 \quad (3.54b)$$

式(3.53), (3.54)相加, 由式(3.33)得

$$b_0 = \frac{2\gamma(k_1 l_1 + k_2 l_2)}{k_1 M_1 + k_2 M_2}$$

将式(3.51)代入上式得

$$B_0 = \frac{Q}{(k_1 M_1 + k_2 M_2)} \quad (3.55)$$

再对式(3.52)乘以 $k_1^2 \cos(C_1 k_1 \zeta)$ 在区间 $[0, M_1/k_1]$ 积分, 得

$$\begin{aligned} k_1^2 b_0 \int_0^{M_1/k_1} \cos(C_1 k_1 \zeta) d\zeta + k_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} b_p \int_0^{M_1/k_1} \cos(C_p k_1 \zeta) \cdot \cos(C_1 k_1 \zeta) d\zeta \\ = k_1^2 \int_{d_1/k_1}^{M_1/k_1} \gamma \cos(C_1 k_1 \zeta) d\zeta \end{aligned}$$

或

$$\frac{k_1 b_0}{2C_1} \sin(C_1 M_1) + \frac{k_1 b_1}{2C_1} [C_1 M_1 + \frac{1}{2} \sin(C_1 M_1)] = \frac{k_1 \gamma}{C_1} [\sin(C_1 M_1) - \sin(C_1 d_1)] \quad (3.56)$$

对式(3.53)乘以 $k_2^2 \frac{\cos(C_1 M_1)}{\cos(C_1 M_2)} \cos[C_1 k_2 (\bar{M} - \zeta)]$, 然后在区间 $[M_1/k_1, \bar{M}]$ 积分, 得

$$\begin{aligned} \frac{k_2^2 b_0}{2} \cdot \frac{\cos(C_1 M_1)}{\cos(C_1 M_2)} \int_{M_1/k_1}^{\bar{M}} \cos[C_1 k_2 (\bar{M} - \zeta)] d\zeta \\ + k_2^2 \sum_{p=1}^{\infty} b_p \cdot \frac{\cos(C_p M_1)}{\cos(C_p M_2)} \frac{\cos(C_1 M_1)}{\cos(C_1 M_2)} \int_{M_1/k_1}^{\bar{M}} \cos[C_1 k_2 (\bar{M} - \zeta)] \cdot \cos[C_p k_2 (\bar{M} - \zeta)] d\zeta \\ = k_2^2 \gamma \frac{\cos(C_1 M_1)}{\cos(C_1 M_2)} \int_{M_1/k_1}^{d_2/k_2} \cos[C_1 k_2 (\bar{M} - \zeta)] d\zeta \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \frac{k_2 b_0}{2C_1} \cdot \frac{\cos(C_1 M_1)}{\cos(C_1 M_2)} \cdot \sin(C_1 M_2) + \frac{k_2 b_1}{2C_1} \left(\frac{\cos C_1 M_1}{\cos C_1 M_2} \right)^2 \cdot [C_1 M_2 \\ + \frac{1}{2} \sin(2C_1 M_2)] = \frac{k_2 \gamma}{C_1} \cdot \frac{\cos C_1 M_1}{\cos C_1 M_2} \cdot \{\sin C_1 M_2 - \sin[C_1 (\bar{M} - d_2)]\} \end{aligned} \quad (3.57)$$

式(3.57)与(3.56)相加并将足标q改写为p, 并由于式(3.33)得

$$b_r = 2\gamma\beta,$$

其中

$$\beta_r = - \frac{\frac{k_1}{k_2} \sin(C, d_1) + \frac{\cos(C, M_1)}{\cos(C, M_2)} \cdot \sin C_r (M - d_2)}{C_r \left[\frac{k_1}{k_2} M_1 + \left(\frac{\cos C_r M_1}{\cos C_r M_2} \right)^2 M_2 \right]} \quad (3.59)$$

将式(3.50), (3.51)代入(3.58)得

$$B_r = \frac{Q}{\pi r_* (k_1 l_1 + k_2 l_2)} \cdot \frac{1}{C_r K_1(C_r r_*)} \beta_r \quad (3.60)$$

将式(3.55), (3.60)代入式(3.45), (3.46), 然后再按(3.22)的变换式将式中的 ζ 变为 z , 即得

$$s = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R_r}{r} + \frac{Q}{\pi r_* (k_1 l_1 + k_2 l_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \beta_r \cdot \frac{K_0(C_r r)}{C_r K_1(C_r r_*)} \cdot \cos(C_r z) \quad (3.61)$$

$$0 < z < M_1$$

$$s = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R_r}{r} + \frac{Q}{\pi r_* (k_1 l_1 + k_2 l_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \beta_r \cdot \frac{K_0(C_r r)}{C_r K_1(C_r r_*)} \cdot \cos[C_r (M - z)] \quad (3.62)$$

$$M_1 < z < M_2$$

式中: $T \neq k_1 M_1 + k_2 M_2$

(3.63)

β_r 见式(3.59)。式(3.61)及(3.62)系由第一项的二维流降深及第二项的三维流降深组成, 而三维降深分布的范围系受因子 $K_0(C_r r)$ 控制, 故其分布范围是有限的。两式的适用范围同式(1.3)。

四、实例验证

由式(3.61), (3.62)及(3.59)组成的解是否正确? 用一个实例验证如下。该实例是冶金部武汉勘察公司50年代在武汉市青山镇为武钢供水源地做的一个“多孔抽水试验”。各孔位于沿长江南岸分布的含水层中, 含水层的宽度达6.2公里, 长度远大于宽度, 但未查明, 地面标高为24.55米。含水层属承压性, 岩性不均, 上部为粉细砂, 厚约22~25米; 下部为中砂含卵石, 厚约8米, 总厚约30米。长江对含水层的补给条件也未查明。在这种情况下要建立一个确定的数学模型来反求参数是困难的, 但是如应用“引用补给半径”则任务不难完成。

抽水孔(主孔)直径为0.406米, 滤水管长为10.97米, 管顶和管底各距层底11.07米及0.1米孔两侧平行长江共布置了10个观察孔, 其至主孔的距离见表1及图3。

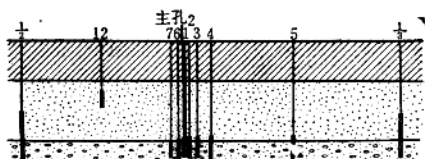


图 3

表1

		主 孔 右 侧					主 孔 左 侧					
孔 号		1	2	3	4	5	1/3	6	7	12	1/2	
距离r(米)		0.75	10	25	50	200	400	10	25	150	300	
降 深 S (米)	第 一 次 抽 水	实 测 值	0.93	0.57	0.48	0.41	0.28	0.19	0.53	0.47	0.24	0.24
		计 算 值	0.88	0.59	0.49	0.43	0.31	0.25	/	/	/	/
	第 二 次 抽 水	实 测 值	2.07	1.34	1.15	1.01	0.71	0.54	1.22	1.13	0.66	0.68
		计 算 值	2.07	1.38	1.17	1.02	0.74	0.55	/	/	/	/
	第 三 次 抽 水	实 测 值	3.79	2.47	2.11	1.87	1.36	1.06	2.26	2.08	1.25	1.30
		计 算 值	3.82	2.35	2.15	1.88	1.36	1.03	/	/	/	/

抽水进行了三次, 每次的流量及主孔的降深见表2, 观察孔的降深则见表1。

表2

静止水位标高 (米)	动水位标高 (米)	降 深 s_e (米)	涌 水 量 Q (吨/日)	S_e/Q
23.09	21.91	1.78	780	2.282×10^{-3}
	19.83	3.86	1667	2.315×10^{-3}
	18.89	7.10	3070	2.312×10^{-3}

将主孔左侧的观察孔及其降深放在半对数纸上得不到较规则的曲线, 其原因, 由于抽水时间已相隔太久, 无法查明, 故只好弃而不用。但用了右侧观测孔数据则可得如图4所示的三条规则的 $s \sim \lg r$ 曲线。图4表明, 有显著影响的三维降深约只出现在 $r \approx 10$ 米的范围内。

在图4绘制 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 三种流量的 $s \sim \lg r$ 曲线的二维直线段时, 对于实测值作了一定选择, 由于主孔和1号观察孔肯定在三维流区, 故不选。1/3号观察孔, 因距主孔较远, 地层可能有变化, 故也不选。主要依靠2, 3, 4, 5号4个观察孔。其中 Q_2 与 Q_3 的 $s \sim \lg r$ 直线段在 $s=0$ 轴交于一点求得 $R_e = 7500$ 米, 虽 Q_1 的直线段交的不够理想, 但基本上接近该值。

根据降落漏斗二维流区的这三条 $s \sim \lg r$ 直线, 可算出双层介质的 T ; 将式(3.61)及(3.62)的二维流降深项改写为

$$s = \frac{2.3Q}{2\pi T} \lg R_e - \frac{2.3Q}{2\pi T} \lg r$$

这是一个变量为 $\lg r$ 的直线式, 其斜率为 $\frac{2.3Q}{2\pi T}$, 因此可按直线点斜式算得

$$T = \frac{2.3Q}{2\pi} \cdot \frac{\lg r_2 - \lg r_1}{s_1 - s_2} \quad (4.1)$$

式中 (s_1, r_1) , (s_2, r_2) 为 $s \sim \lg r$ 直线段上任意两点。