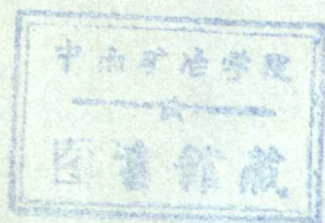


450965

新编初等几何学

钟未文 编



开 明 书 店

編輯大意

- 一、本書依據部頒初級中學課程標準，並參考業經審定之幾何課本編輯而成，內容包括幾何的重要的理論和各種類題供升學、進修、複習之用。
- 二、本書對於定義，定理，系，解題要點及例題，習題等等，一經序編列，並均將圖形排列於每頁下欄，使學者隨時互相參證，易於瞭解。審定課本中有辭義不一，形同名異者，本書悉一併敘列，學者讀此，有同時修習數種課本之樂。
- 三、根據編者多年教學之實際經驗，深知學者僅憑文字，未易瞭解題意或圖形，每有愈學愈難愈不明之苦；蓋幾何學乃鍛鍊思考能力之學科，故遽然索解，形同緣木求魚。本書針對此病，循序拔進，由文字而思考圖形，由圖形而印證思考，解題時自有得心應手事半功倍之妙。
- 四、本書習題，分A B兩組，由淺入深，由簡入繁，且於較費思考者均予提示，所有答案，亦均附列於下欄，學者先理解A組，進而研究B組，則易於助長學力，一切難題，不難迎刃。習題中較難者附有※號。
- 五、本書編印倉促，訛誤難免，尚祈高明賜正。

新編初等幾何學

目 錄

第一章 緒 論	1
第一節 基礎定義	1
第二節 幾何常用記號	3
第三節 公理及公法	4
第四節 幾何問題的分別及解法	6
第五節 基本圖形作法	7
第六節 實驗幾何與理解幾何	9
第七節 證法大要	11
第二章 直線形	21
第一節 角與邊	21
習題 2-1A	26
習題 2-1B	27
第二節 三角形(一)	29
習題 2-2A	36
習題 2-2B	37
第三節 垂線平行線	40
習題 2-3A	46
習題 2-3B	47
第四節 三角形(二)	49
習題 2-4A	53
習題 2-4B	57
第五節 不等線段與不等角	60
習題 2-5A	67

	習題 2-5B	69
第六節	四邊形	74
	習題 2-6A	80
	習題 2-6B	84
第七節	多角形	89
	習題 2-7A	93
	習題 2-7B	94
第八節	三角形的五心	96
	習題 2-8A	105
	習題 2-8B	107
第九節	直線形作圖題	109
	習題 2-9A	111
	習題 2-9B	115
	習題 2-9C	122
第三章	圓	126
第一節	基礎定理及弦、弧、圓心角的關係	126
	習題 3-1A	131
	習題 3-1B	133
第二節	切線及二圓關係	135
	習題 3-2A	141
	習題 3-2B	142
第三節	用弧量角及共圓點	145
	習題 3-3A	160
	習題 3-3B	165
第四節	關於圓的作圖	170
	習題 3-4A	176
	習題 3-4B	177
第四章	比例及相似形	180
第一節	比例定理及比例線段	180

習題 4-1A	185
習題 4-1B	186
第二節 相似形	190
習題 4-2A	195
習題 4-2B	197
第三節 比例的應用	199
習題 4-3A	204
習題 4-3B	205
第四節 畢氏定理及其推廣	211
習題 4-4A	221
習題 4-4B	224
第五節 作圖題	227
習題 4-5A	233
習題 4-5B	235
第五章 面 積	238
第一節 直線形的面積	238
習題 5-1A	246
習題 5-1B	247
第二節 面積比	250
習題 5-2A	256
習題 5-2B	257
第三節 作圖題	262
習題 5-3A	273
習題 5-3B	274
第六章 正多角形、圓及簡易立體的度量	250
第一節 正多角形	277
習題 6-1A	286
習題 6-1B	286

第二節 圓的度量.....	289
習題 6-2A.....	296
習題 6-2B.....	298
第三節 作圖題.....	300
習題 6-3A.....	305
習題 6-3B.....	305
第四節 簡易立體的面積及體積.....	307
習題 6-4A.....	314
習題 6-4B.....	316
(附) 測驗題.....	317
甲：是非題 100題.....	317
乙：選擇題 100題.....	321
丙：填充題 100題.....	328

第一章 緒 論

第一節 基礎定義

幾何學是研究空間有限部分之形狀、大小、位置的科學。幾何學所研究的不外點、線、面、體四種，這叫做幾何學的原素。但是什麼叫做點、線、面、體呢？我們必須在研究各種形狀以前，先要把這些幾何學上的名詞，用語言，文句來確定他的意義，使與別的名詞的意義不相混，這種說明名稱意義的文句，叫做**定義**。此地先提出幾個基礎上的普通用語定義，至於直線形、圓、比例等各部門中所用的定義，在各節中分別列出以便研習。

1. **立體(體)**：如鉛筆，粉筆匣子，黑板等實物，只就他佔據空間的有限部分，研究他的形狀、大小、位置、而不問他的實質，都叫做**立體**，簡稱**體**。體有位置，有形狀，有長度，有寬度，有厚度。

2. **面**：立體與空間的界面叫做**面**。面有位置、形狀、長度、寬度，但沒有厚度。面可分平面，曲面兩種。

(1) **平面**——平坦的面，如桌面。

(2) **曲面**——凸凹不平的面，如球面。

3. **線**：面的界限和面與面的相交處叫做**線**。線有位置，有形狀，有長度，沒有寬度，沒有厚度。線可分為下列數種：

線	直線	無限直線(直線)
		有限直線(線段，線分)
		半直線(射線)
	曲線	
折線		

(1) **直線**。取一線的一部分，任意放在他部分上，使所取部分上兩點與他部分上兩點相合，而能完全重合的，這種線，叫做**直線**。幾何學中所說的直線是左右兩方可以無限延長的，亦即直線的長度是無限度的。故有時特別指

稱為無限直線。

直線的記號可在直線的兩端各記一個大楷英文字母或在線上寫一個小楷英文字母以表示，如圖 1-1，讀做直線 AB ，或直線 l 。

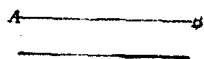


圖 1-1

(2) 半直線。在直線上取一點，分直線為兩部分，每一部分叫做半直線，又稱為射線。如圖 1-2， OX ， OY 各是半直線。

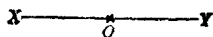


圖 1-2

(3) 線段(線分)。在直線上取二點則此二點間的一段，叫做線段或叫做線分。有人特別指稱為有限直線。如圖 1-3， AB 或線段 a 。

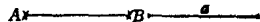


圖 1-3

(4) 折線。用許多方向不同的線段連結所成的線，叫做折線。如圖 1-4， $ABCDE$ 便是。

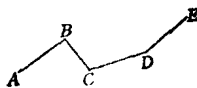


圖 1-4

(5) 曲線。線的方向處處不同的，即彎曲的線叫做曲線。平面幾何中所討論的曲線，只有圓周和圓弧兩種。

4. 點：線的界限或線與線的相交處叫做點。點只有位置，沒有形狀，大小，寬度，厚度等。因此無論連結若干點，都不能成線。點的記法有兩種，均用一個大楷的英文字母記在旁邊如圖 1-5，讀為點 A ，點 B 等。

5. 圓：一條封閉的平面曲線上任意點都與其中一定點等距離時，這個有限平面叫做圓，這個曲線叫做圓周，這個一定點叫做圓心。圓周上一點與圓心的距離叫做半徑。記圓用 $\odot$ 的記號，這個記號後面加



圖 1-5

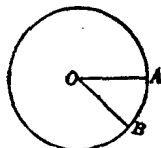


圖 1-6

記表示圓心的字母。如圖 1-6， $\odot O$ ，讀作圓 O 或 O 圓， OA ， OB 各是半徑。

6. 弧：圓周的一部分叫做圓弧，簡稱弧。如上圖，記為 $\widehat{AB}$ ，讀做弧 AB 或 AB 弧。

7. 平面幾何學：研究平面圖形的形狀，大小，和位置的科學叫做平面幾何學。

8. 立體幾何學：研究立體圖形的形狀，大小，和位置的科學叫做立體

幾何學。

9. 公理：凡爲人們所習知，極其明顯，無須證明的真理，叫做公理。公理分爲兩種：數學各門中都能通用的，叫做普通公理，只能適用於幾何學中的公理，叫做幾何公理。

10. 定理及系：用定義及公理做根據，推斷出來的結論，叫做定理。由一個定理直接推斷出來的定理，叫做這個定理的系。已經證實的定理及系都可用做推斷新定理的根據。

11. 定理的假設，終結：凡是定理，都由下列兩部分組成；一爲假設，即爲已知的各項條件；一爲終結（結論），即爲由假設產生的必然的結果。

例如「三角形內角的和等於二直角」這定理中，「三角形內角的和」是假設，「等於二直角」是終結。

12. 定理的證明：任何一個定理，從假設到終結，都不是憑空達到的，中間必須依據假設，定義，公理或已經證實過的定理逐步推斷，直至終結成立，這中間的過程叫做證明。

13. 逆定理：將一定理的假設做終結，終結做假設所成的定理叫做前定理的逆定理。一定理的逆定理未必成立，必須經證實後方可應用。

第二節 幾何常用記號

記 號	意 義	記 號	意 義	記 號	意 義
//	平行	□	矩形(長方形)	□	正方形
⊥	垂直	s	諸線平行	⊕	諸正方形
⊥⊥	平行且垂直	s	諸線垂直	⊙	圓
~	差	s	相似	⊙	諸圓
=	相等	≅或≡	全等	>	大於
≠	不相等	≡	漸等	<	小於
∠	角	△	諸角	⋈	不大於
∠R或R	直角	△R	諸直角	⋈	不小於
∠或rt.∠	直角	st.△	諸平角	∴	因爲
st.∠	平角	△	諸三角形	∴	所以
△	三角形	rt.△	諸直角三角形	⌒	弧
rt.△	直角三角形	□	諸平行四邊形	∠	度數等於
□	平行四邊形	□	諸長方形	:	比

第三節 公理及公法

1. 普通公理：(下面 a, b, c, d, l, m, n 等都代表各一種量)

(1) 等量加法公理 等量加等量其和相等。

如 $a=b, c=d$, 則 $a+c=b+d$.

(2) 等量減法公理 等量減等量, 其差相等。

如 $a=b, c=d$, 則 $a-c=b-d$.

(3) 等量乘法公理 等量的同倍量相等。

如 $a=b, c=d$, 則 $ma=mb$ 或 $ac=bd$.

(4) 等量除法公理 等量的同分量相等。

如 $a=b, c=d$, 則 $\frac{a}{m}=\frac{b}{m}$ 或 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

(5) 等量代換公理 一量可用其等量代換之。

如 $a=b, b=c$, 則 $a=c$

或 $l>m, m=n$, 則 $l>n$.

(6) 二量關係公理 二量關係只有下列三種, 且一種成立則其餘兩種就不能成立。

如 $a>b, a<b, a=b$.

(7) 三量比較公理 甲量大於乙量, 乙量大於丙量則甲量大於丙量。

如 $a>b, b>c$, 則 $a>c$.

(8) 不等量加等量公理 不等量加等量其和不等, 原來大者, 其和仍大。

如 $a>b, c=d$, 則 $a+c>b+d$.

(9) 等量加不等量公理 等量加不等量其和不等, 加大量者, 其和較大。

如 $a=b, c>d$, 則 $a+c>b+d$.

(10) 不等量相加公理 不等量相加, 大者加大者, 其和仍大。

如 $a>b, c>d$, 則 $a+c>b+d$.

(11) 不等量減等量公理 不等量減等量, 其差不等, 原來大者其差仍

大。

如 $a > b$, $c = d$, 則 $a - c > b - d$.

(12) **等量減不等量公理** 等量減不等量其差不等, 減去大量者其差反小。

如 $a = b$, $c > d$, 則 $a - c < b - d$.

(13) **等數乘不等量公理** 等數(大於零)乘不等量其積不等, 原來大者仍大。

如 $a > b$, $m = n > 0$, 則 $am > bn$.

(14) **不等數乘等量公理** 不等數乘等量, 其積不等, 乘數大者其積大。

如 $a > b$, $m = n$, 則 $am > bn$.

(15) **等量除不等量公理** 等數(大於零)除不等量, 其商不等, 原來大者仍大。

如 $a > b$, $m = n > 0$, 則 $\frac{a}{m} > \frac{b}{n}$.

(16) **不等數除等量公理** 不等數(大於零)除等量, 其商不等, 除數大者其商反小。

如 $a = b$, $m > n > 0$, 則 $\frac{a}{m} < \frac{b}{n}$.

(17) **全量公理** 全量等於分量的總和而大於任一分量。

如全量 a 分為 b, c, d 等分量, 則

$a = b + c + d$ 且 $a > b$, $a > c$, $a > d$.

註 如 $a = b$, $b = c$, 則 $a = c$ 此公理又叫做等量遞等公理。

2. 幾何公理:

(1) **移形公理** 幾何圖形可變更其位置而不改變其形狀和大小。

(2) **直線確定公理** 過兩點只有一直線。

(3) **兩點距離公理** 兩點間的最短距離是連結兩點的線段。

(4) **直線交點公理** 兩直線相交只有一個交點。

(5) **平角公理** 凡平角都相等。

(6) **直角公理** 凡直角都相等。

(7) **全等公理** 兩形重疊, 處處相合則兩形全等。

- (8) **角的平分線公理** 一角的平分線有一無二。
 (9) **二線關係公理** 同一平面上的二直線，不平行則相交，不相交則平行。
 (10) **等圓等徑公理** 同圓或等圓的半徑相等。
 (11) **直徑分圓公理** 直徑分圓為兩個等半圓。
 (12) **平行線公理** 過一直線外的一點，與此直線平行的直線，有一無二。

3. **公法**：人人已知，可作作圖基礎的作法叫做公法，有下列三種。

- (1) **畫直線公法** 過兩點可作一直線。
 (2) **延長直線公法** 凡直線，線段可任意延長。
 (3) **畫圓公法** 用任何一點做圓心，任意長做半徑，可作一圓。

第四節 幾何問題的分別及解法

幾何問題有證明題，作圖題，計算題等。

1. **證明題**：如「等腰三角形兩腰上的高相等」依定理構成的形式可分為假設，終結，而要求敘述假設至終結間的證明手續者。在平面幾何中，證明題佔大多數。解證明題的步驟，繪製圖形後，分寫〔假設〕（或寫已知），〔終結〕（或寫求證），〔證明〕三段。證明方法亦不只一種，將於本章第七節說明。

2. **作圖題**：如「已知二邊及夾角求作三角形」，提出已知條件，要求作出指定的圖形者。解作圖題的步驟分為〔已知〕，〔求作〕〔分析〕〔作法〕〔證明〕〔討論〕六段，簡易作圖題，可免〔分析〕，又確有一解且僅有一解者可免予討論，詳在第二章第九節。

3. **計算題**：如「已知直角三角形的斜邊長 10 公分，面積 24 平方公分，求兩股的長」，自已知條件中要求出未知量者。解此類問題可分為〔已知〕〔求解〕〔解〕的步驟，應用公理定義，定理以及各種計算方法求解。本書未另列章節，在所應用定義、定理的各章節中提及時，有關計算問題均含編在內。

此外軌跡問題的解法又稍不同。因目前教育部所頒初中課程標準已將軌跡刪除，故本書未加列入。

尚有測驗題：如「是非」「填充」「選擇」「問答」等題，均熟習各章內容後。

問題可隨意變化提出，且解法亦可適應。

特別要注意的一點是，因幾何為研究圖形的位置，大小，形狀的科學，故圖形非常重要。無論解證明題，作圖題，計算題，應畫切實合於所命問題的圖形，否則往往徒勞而不得解，若能畫切合所需的圖形，則解題實得事半功倍的效果。

第五節 基本圖形作法

因幾何問題需要自瞭解圖形入手，無論定理的證明或求解簡易問題均需畫出圖形，始能着手研究，故此地先敘述幾種初步圖形的作法以便應用，(證明均略)。幾何作圖，規定只可用(1)圓規(2)無刻度的直尺兩種儀器。圓規又叫做兩腳規，用來畫圓(或弧)，截取等長線段等。直尺是用來畫直線，實際應用時可用三角板來代替。

1. 作一線段等於定長線段

〔已知〕 線段 l 。

〔求作〕 與 l 相等的一線段。

〔作法〕 (1) 作半直線 OA 。

(2) O 為圓心， l 長為半徑畫弧與 OA 交點為 C 則 OC 就是所求的線段。

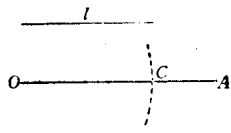


圖 1-7

2. 作已知線段的垂直平分線

〔已知〕 線段 AB 。

〔求作〕 AB 的垂直平分線。

〔作法〕 (1) 以 A, B 各為圓心，大於 $\frac{1}{2}AB$ 的同長半徑畫兩弧，交點為 C, D 。

(2) 連結 CD 則 CD 即為所求。

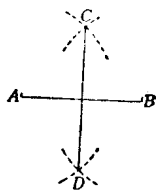


圖 1-8

註 平分線段的方法亦即本題， CD 與 AB 的交點即為 AB 的中點。

3. 作一角等於已知角

〔已知〕 $\angle ABC$

〔求作〕 等於 $\angle ABC$ 的一角。

〔作法〕 (1) 以 B 為圓心，適當的任意長為半徑畫弧交 BA, BC 於 D ,

E 兩點。

(2) 作半直徑 $B'C$

(3) 以 B' 為圓心, BE 長為半徑畫弧與 $B'C$ 交點為 E'

(4) 以 E' 為圓心, DE 長為半徑畫弧與前弧交點為 D'

(5) 連結 $B'D'$ 則 $\angle D'B'E'$ 即為所求。

4. 過定直線上的一點作垂線

〔已知〕 直線 AB 及 AB 上一點 C 。

〔求作〕 過 C 而垂直於 AB 的直線。

〔作法〕 (1) 以 C 為圓心, 適當的長為半徑畫弧與 CA, CB 的交點為 D, E 兩點。

(2) 以 D, E 各為圓心, 大於 $\frac{1}{2}DE$ 的任意長為半徑畫兩弧, 得交點為 F 。

(3) 連結 CF 則 CF 即為所求。

5. 過定直線外的一點作垂線

〔已知〕 直線 AB 及 AB 外的一點 C 。

〔求作〕 過 C 而垂直於 AB 的直線。

〔作法〕 (1) 以 C 為圓心, 適當的長為半徑, 畫弧交 AB 於 D, E 兩點。

(2) 以 D, E 各為圓心, 用大於 $\frac{1}{2}DE$ 的任意長為半徑畫兩弧, 交點為 F 。

(3) 連結 CF 則 CF 即為所求。

註 (1) 如要過直線段的一端作垂線, 可將此線段延長後依照第 4 題的作法作之

(2) 在證明題, 平常用三角板的直角邊畫垂線, 以便證明。

6. 作已知角的平分線

〔已知〕 $\angle BAC$

〔求作〕 $\angle BAC$ 的平分線。

〔作法〕 (1) 以 A 為圓心, 任意長為半徑畫弧交 AB, AC 於 D, E 兩點。

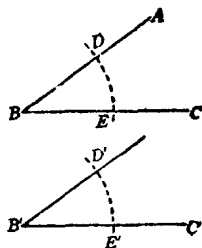


圖 1-9

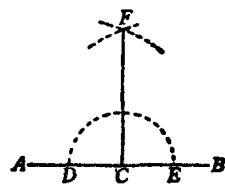


圖 1-10

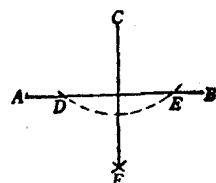


圖 1-11

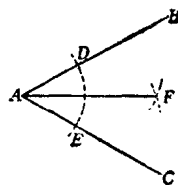


圖 1-12

(2) 以 D, E 各為圓心，大於 $\frac{1}{2}DE$ 的任意長為半徑畫兩弧，得交點為 F 。

(3) 連結 AF 則 AF 即為所求。

7. 過已知點作一直線平行於定直線

〔已知〕 直線 AB 及 AB 外一點 P 。

〔求作〕 過 P ，與 AB 平行的直線。

〔作法〕 (1) 過 P 任作一直線 PQ 交 AB 於 Q 。

(2) 用 P 做頂點 PQ 做一邊作 $\angle CPQ = \angle BQP$ 並令 CP 與 BQ 分居 PQ 的兩旁則 CP 即為所求。

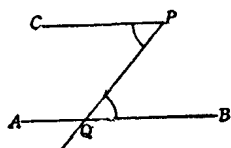


圖 1-13

註 解證明題時，平行線常用三角板密接於直尺，然後按住直尺，移動三角板畫直線可得。

8. 分已知線段為三等分

〔已知〕 線段 AB 。

〔求作〕 三等分 AB 。

〔作法〕 (1) 過 A 任作一半直線 AX ，與 AB 成適當的角。

(2) 自 A 在 AC 上截取 $AC = CD = DE$ 。

(3) 連 BE 。

(4) 過 C, D 各作 EB 的平行線交 AB 於 F, G 。則 F, G 就是 AB 的三等分點。

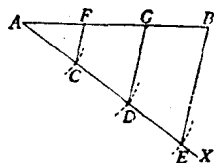


圖 1-14

註 此法可適用於線段的任意等分。

第六節 實驗幾何與理解幾何

在初級幾何中，研究圖形的性質，常用下列兩種方法：

1. 實驗法 實行剪裁圖形疊合，或用儀器直接度量圖形，來決定一個定理正確的方法，叫做實驗法，簡稱實驗，也叫實驗幾何。例如「等腰三角形，等邊所對的角相等」（這為等腰三角形性質定理），要研究這個定理是否正確，可用如下的方法實驗。

(1) 任作一線段 AB ，用 A, B 各做圓心，大於 $\frac{1}{2}AB$ 的同長半徑畫兩弧，相交於 C ，連結 AC, BC 得等腰 $\triangle ABC$ 。

(2) 用量角器量兩腰 AC, BC 所對角， $\angle B, \angle A$ ，看是否相等，如果相等則本定理即為正確。

(3) 又依 C 與 AB 的中點 M 對摺，左右兩部分是否完全疊合，如果完全疊合則 $\angle A = \angle B$ 即為正確。

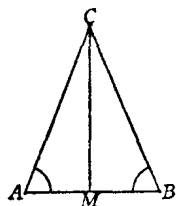


圖 1-15

(4) 又再變更腰的長短任意作幾個等腰三角形照法實驗，結果是否一樣，如果都是一樣，則本定理就確實成立了。

但這種實驗有三個缺點：

① 人的感官不足為憑，容易錯誤。如右圖兩線段 a, b ，實際是相等的，但因兩端加附不同方向的箭頭，使我們看得好像感覺 a 比 b 長，這種感覺都是錯誤的，但人人都難免。

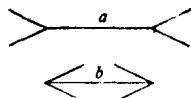


圖 1-16

② 量法只能得近似值，而不能得到絕對準確的值，有下列幾個原因。

a. 儀器本身不準確。如尺，量角器上的刻度不均勻，圓規上的螺旋鬆弛等，都直接影響量法的準確性。

b. 受外界的影響。例如儀器因溫度的昇降而發生脹縮作用。

c. 儀器性能的限制。例如尺的刻度只能刻到公分或公釐，量角器只能刻到度，故精密的程度有限制。

d. 同一儀器在同樣的環境中，因使用的技術和感官的敏銳情形不一，往往量的結果不一樣。

③ 特例不能視為普遍性。特例只能啓示我們獲得普通性，但不能用來證實普通性的正確。因為有很多特例是正確的，但普通性是不正確的。

由上面所述的情形可知用實驗法來決定定理的正確性，是不十分可靠的，只是將抽象的事理，變為較具體化，使增加瞭解及記憶。本書在以後各章節中均不採用此種方法來證明，但初學的人，自動用實驗方法着手以助瞭解，也很有用。

2. 證明法 用定義，公理及已經證實的定理逐步由假設推理到終結

的方法，叫做**證明法**，簡稱爲**證明**，也叫做**理解幾何**。用證明的方法，來決定定理的正確是十分可靠的，實爲幾何的重要目標。

第七節 證法大要

幾何證明題的解法，在前面已經簡述，茲再將其步驟詳述如下：

(1) **畫出正確圖形** 一個定理或問題所需要的圖形，按照題中所說的關係，力求準確畫出。因不準確的圖形，往往導致錯誤的想法，致使證明發生困難。又圖形按照題意，要畫普通性的圖形，不要畫特殊性的圖形，以免產生特例。

(2) **寫出【假設】** (已知)，即題中的已知事項。

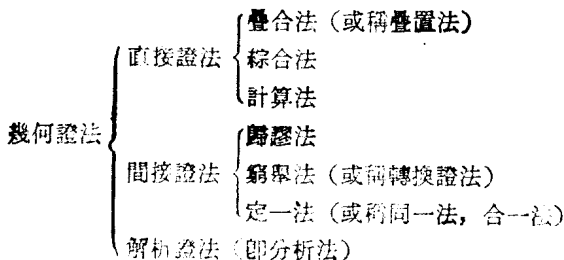
(3) **寫出【求證】** 即題中要求證明的事項，亦即定理的終結。

(4) **寫出【證明】** 根據已知，定義，公理及已經證實過的定理，有順序的自假設至終結逐步寫出。

證明時所用記號，應與所畫圖形一致，寫已知，求證時也是一樣。

又有時只根據題意所畫的圖形，證明時不能敘出所以然的道理，需要加添輔助線以作證明的幫助。輔助線的畫法，種類，在證明開始時應先記述。

證明的方法不只一種，在初中課本中出現的方法大別可分爲直接證法，間接證法，解析證法等。**直接證法**是根據假設，引用公理，定義，已經證實的定理直接推演至終結。**間接證法**是因直接較難證明，以逆推，反推，旁證而得到證實。又由問題結論而探索其原因以發現其證法的，叫做**解析證法**。各證法中，由其推論的方法不同，又另有名稱分別，表列如下：



茲將各種證法舉例敘述。