YUANZIHEWULI

原子核物理

(第五次核物理会议文集 成都 1982)

原子能出版社

原 子 核 物 理

（第五次核物理会议文集　成都　1982）

原 子 能 出 版 社

内 容 简 介

本文集选编了在第五次全国核物理会议上所作的25篇特邀报告，这些报告对国内外核物理各个重要领域的当前状况与发展趋向作了总结评述。另外还收编了会上交流的283篇成果报告的题目目录。

本书可供有关专业的科学工作者及大专院校的师生参考。

原 子 核 物 理

（第五次核物理会议文集 成都 1982）

原子能出版社出版

（北京2108信箱）

北京市印刷一厂印刷

（北京市西便门）

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

☆

开本787×1092 1/16 ・印张26 3/8・字数620千字

1984年 7月第一版・1984年 7月第一次印刷

印数1—1,700 ・统一书号：15175・539

定价：3.30元

前　　言

中国核物理学会主持召开的第五次全国核物理会议于1982年11月3日至9日在成都举行。出席这次会议的有来自全国科研、教育等战线的核物理工作者及国家科委、科学院、核工业部和情报、出版等部门的领导和代表。这是继1973年在兰州举行的第一次会议，1974年在上海举行的第二次会议，1978年在庐山举行的第三次会议和1980年在兰州举行的第四次会议之后，我国核物理界的一次规模空前的盛会。

这次会议分别在大会和分组会上宣读了25篇特邀报告，它们对国内外核物理各个重要领域的当前状况与发展趋向作了总结评述。这次会议收到的成果报告共283篇，其中的一部分在会议期间以分组报告和张贴报告等多种形式作了交流。这些报告反映了自从上次会议以来，国内在核物理基础研究与应用研究各领域所取得的研究成果与经验。

本文集全文刊登了这次会上所作的总结性评述报告。由于篇幅限制，成果报告只刊登了目录。

目　　录

一、评述报告

1. 原子核结构

2. 原子核反应

3. 核力、少体与中高能核物理

4. 核技术及其应用

二、成果报告目录

等效本征方程与格林函数方法

吴 式 枢

(吉林大学物理系)

一、引 言

格林函数方法是求解多体问题的一个重要而有效的方法。根据格林函数满足的积分方程可以导得多粒子体系的本征方程，由此求得的本征值和本征函数在模型空间的投影都是严格的，而且模型空间可以根据求解问题的需要作适当的选择。它可选为体系态空间的真实子空间，但如果不作切断近似，则这个子空间却仍是无穷维的。大家熟知，应用其它方法[1]已可严格导得维数有限的等效本征方程。能不能由格林函数方法也同样达到这个目的，它有何特点？在本文里我们将先简单介绍 Thouless[2]提出的由积分方程推导本征方程的方法，然后介绍格林函数满足的等效积分方程以及由此导得的等效本征方程[3]。它的模型空间可选为有限维的，且可根据需要恰当选择。它类似于Bloch-Horowitz 方程[4]，但并不相同，主要差别在于它的模型空间已严格顾及了核实的基态关联。令A表示一满壳核的核子数，为了阐明$(A\pm n)$核子体系与n核子体系定态问题的联系，本文最后将以单粒子格林函数为例，较详细地讨论它对$A\pm 1$粒子与一个粒子问题之间提供的联系，最佳单粒子位阱的选择以及用质量算符定义的单粒子位阱的特征。

二、积分方程与本征方程

应用格林函数满足的积分方程推导有关的本征方程的方法相当简单[2]，关键的一步就是应用格林函数的Lehmann表示，而后者可以根据定义很容易求得。为了不致因复杂的符号而掩盖了方法的实质，让我们先考虑单粒子格林函数并只引用断续谱符号。例如，如果既存在断续谱又存在连续谱，则Σn应理解为$\SumInt$(向断续谱求和并向连续谱积分)。此外，我们将只考虑二时格林函数，它实质上只依赖于$t=t_1-t_2$。单粒子格林函数的定义为

$$G_{\alpha\beta}(t=t_1-t_2)=\langle\Psi_0(A)|T\{\xi_\alpha(t_1)\xi^+_\beta(t_2)\}|\Psi_0(A)\rangle \tag{1}$$

其中T为编时算符，$\mathbf{O}(t)=\exp(i\mathbf{H}t)\mathbf{O}\exp(-i\mathbf{H}t)(\hbar\equiv 1)$，$\mathbf{H}$表示原子核的哈密顿量

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{V}-\Sigma_i\mathbf{u}_i \tag{2}$$

$$\mathbf{H}_0=\Sigma_i\mathbf{h}_i=\Sigma_i(\mathbf{t}_i+\mathbf{u}_i) \tag{3}$$

它的定态Schrödinger方程如下:

$$\mathbf{H}|\Psi_n(N)\rangle = E_n(N)|\Psi_n(N)\rangle \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{4}$$

N为核子数,式(2)中的单粒子势$\mathbf{u}$是为计算方便而引进的，与之相应的单粒子Schrödinger方程将记为

$$\mathbf{h}|\alpha\rangle = (\mathbf{t}+\mathbf{u})|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha|\alpha\rangle \tag{5}$$

因为$\mathbf{H}$和$\mathbf{u}$无关[参看(3)式]，所以$\mathbf{u}$可以适当选择，它的最佳选择应最有利于式(4)的求解。关于这个问题将作进一步的介绍。这里我们将允许$\mathbf{u}$是非厄米的，但要求ε_α是实的，而且$\{|\alpha\rangle\}$构成一完备系。显然$\mathbf{H}$应是厄米的(虽然$\mathbf{h}$与$\mathbf{H}_0$均可能是非厄米的)。当$\mathbf{h}$非厄米时，本征态$|\alpha\rangle$将互不正交,为此引进$\{|\bar{\alpha}\rangle\}$，它与$\{|\alpha\rangle\}$构成双正交系:

$$\langle\bar{\beta}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\bar{\beta}\rangle = \delta_{\alpha\beta} \tag{6}$$

态$|\alpha\rangle$与$|\bar{\alpha}\rangle$的产生算符将分别记为ξ^+_α与$\bar{\xi}^+_\alpha$,对于费米子体系它们满足以下反交换关系:

$$\begin{aligned}&\{\bar{\xi}_\alpha,\ \xi^+_\beta\} = \{\bar{\xi}^+_\alpha,\ \xi_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}\\&\{\xi_\alpha,\ \xi_\beta\} = \{\bar{\xi}_\alpha,\ \bar{\xi}_\beta\} = 0\end{aligned} \tag{7}$$

很明显，如果$\{|\alpha\rangle\}$已是正交系，则$|\alpha\rangle = |\bar{\alpha}\rangle$。下面把$|\Psi_0(A)\rangle$简记为$|\Psi_0\rangle$，由式(1)与(7)有

$$\begin{aligned}&G_{\alpha\beta}(t>0) = \langle\Psi_0|\bar{\xi}_\alpha(t_1)\xi^+_\beta(t_2)|\Psi_0\rangle\\&G_{\alpha\beta}(t<0) = -\langle\Psi_0|\xi^+_\beta(t_2)\xi_\alpha(t_1)|\Psi_0\rangle\end{aligned} \tag{8}$$

因为

$$\sum_n|\Psi_n(N)\rangle\langle\Psi_n(N)| = I(N) \tag{9}$$

其中$I(N)$表示N核态空间的单位算符。将式(9)代入式(8)并应用式(4) 可得

$$\begin{aligned}&G_{\alpha\beta}(t>0) = \sum_n\langle\Psi_0|\bar{\xi}_\alpha|\Psi_n(A+1)\rangle\langle\Psi_n(A+1)|\xi^+_\beta|\Psi_0\rangle\, e^{-iE^+_n t}\\&G_{\alpha\beta}(t<0) = -\sum_n\langle\Psi_0|\xi^+_\beta|\Psi_n(A-1)\rangle\langle\Psi_n(A-1)|\bar{\xi}_\alpha|\Psi_0\rangle\, e^{iE^-_n t}\end{aligned} \tag{10}$$

上式中

$$E^\pm_n = E_n(A\pm 1) - E_0(A) \tag{11}$$

由(10)式我们得到$G_{\alpha\beta}(t)$的傅氏变换[1)]或Lehmann表示:

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}(\omega) = -\sum_n\Big\{&\frac{\langle\Psi_0|\bar{\xi}_\alpha|\Psi_n(A+1)\rangle\langle\Psi_n(A+1)|\xi^+_\beta|\Psi_0\rangle}{\omega - E^+_n + i\eta}\\&+\frac{\langle\Psi_0|\xi^+_\beta|\Psi_n(A-1)\rangle\langle\Psi_n(A-1)|\bar{\xi}_\alpha|\Psi_0\rangle}{\omega + E^-_n - i\eta}\Big\}_{\eta\to 0^+}\end{aligned} \tag{12}$$

---

1) 傅氏变换的定义为$G(\omega) = i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}G(t)$

$G_{\alpha\beta}(t)$满足以下积分方程（亦称Dyson方程）[5]：

$$G_{\alpha\beta}(t_1-t_2)=\delta_{\alpha\beta}G_\alpha^0(t_1-t_2)+\iint_{-\infty}^{\infty}d\sigma_1 d\sigma_2 G_\alpha^0(t_1-\sigma_1)$$

$$\times\sum_\gamma[M_{\alpha\gamma}(\sigma_1-\sigma_2)+iu_{\alpha\gamma}\delta(\sigma_1-\sigma_2)]G_{\gamma\beta}(\sigma_2-t_2) \tag{13}$$

其中$M_{\alpha\gamma}$为质量算符，$G_{\alpha\beta}^0(t)=\delta_{\alpha\beta}G_\alpha^0(t)$为$G_{\alpha\beta}(t)$的零级近似，它的表达式如下：

$$G_{\alpha\beta}^0(t=t_1-t_2)=\langle\bar{\phi}_0|T\{\bar{\xi}_\alpha(t_1)\xi_\beta^+(t_2)\}|\phi_0\rangle \tag{14}$$

$$=\delta_{\alpha\beta}[\theta(t_1-t_2)-n_\alpha]$$
$$\exp[-i\varepsilon_\alpha(t_1-t_2)]$$

这里$\theta(t)$表示阶梯函数(即$\theta(t)=1$如$t>0$，$\theta(t)=0$如$t<0$)。$n_\alpha=0$或1，依α为粒子(p)或空穴(h)态而定。此外

$$|\phi_0\rangle=\prod_{\alpha=1}^{A}\xi_\alpha^+|0\rangle,$$

$$|\bar{\phi}_0\rangle=\prod_{\alpha=1}^{A}\bar{\xi}_\alpha^+|0\rangle$$

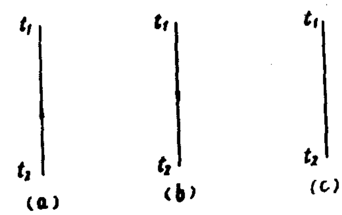

图 1 自由费米子线

(a) 粒子线；(b) 空穴线；(c) 粒子或空穴线。

而$O(t)=\exp(i\mathbf{H}_0t)\mathbf{O}\exp(-i\mathbf{H}_0t)$。根据式(14)我们可用图(1a)表示粒子线，图(1b)表示空穴线；如果一线段没标箭头，则它既可表示粒子线也可表示空穴线，例如图1c。迭代式(13)可以得到$G_{\alpha\beta}(t)$的迭代解。让我们用一粗线段表示$G_{\alpha\beta}(t)$，┈┈×表示u的一次作用，□表示质量算符，式(13)及其迭代解可由图2表示。这说明，质量算符就是不能通过切断一根内线(可为粒子线也可为空穴线)而将图形分为两部分的全部费曼图之和(图3a)，但它不包含于σ_1离开与σ_2进入图形的费米线（即G_α^0与G_β^0)，此外它也不包含u的一次作用(图3b)。注意，理论适用于一般的V[6]，但为了方便，在绘制图（3a）时假定了V只是二体相互作用，即

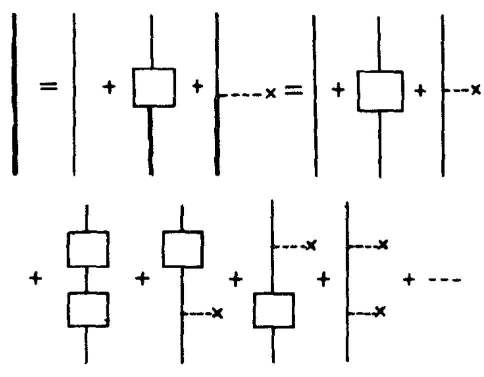

图 2 (13)式及其迭代解

$$\mathbf{V}=\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}V_{\alpha\beta,\gamma\delta}\xi_\alpha^+\xi_\beta^+\bar{\xi}_\delta\bar{\xi}_\gamma$$

其中

$$V_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\langle\bar{\alpha}\bar{\beta}|\mathbf{V}|\gamma\delta\rangle-\langle\bar{\alpha}\bar{\beta}|V|\delta\gamma\rangle$$

另外由上式中交换项引起的交换图在图中没有明显

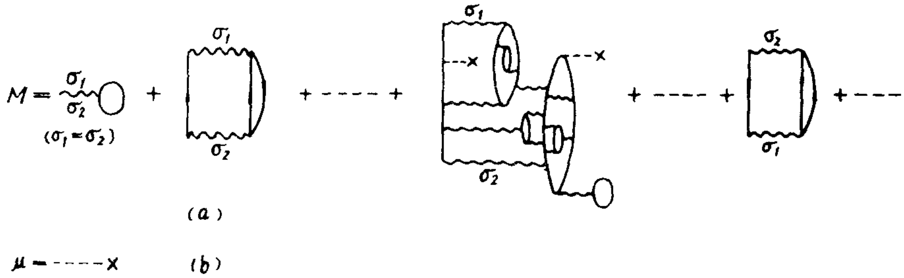

图 3　质量算符(a)与 $\mathbf{u}$ 的一次作用(b)

给出。式(13)的傅氏变换如下：

$$G_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}G_{\alpha}^{0}(\omega)+\sum_{\gamma}G_{\alpha}^{0}(\omega)[u_{\alpha\gamma}-M_{\alpha\gamma}(\omega)]G_{\gamma\beta}(\omega) \tag{15}$$

其中

$$G_{\alpha}^{0}(\omega)=-\left[\frac{1-n_{\alpha}}{\omega-\varepsilon_{\alpha}+i\eta}+\frac{n_{\alpha}}{\omega-\varepsilon_{\alpha}-i\eta}\right]_{\eta\to0^{+}} \tag{16}$$

将式(12)代入式(15)，再以$(\omega-E_{n}^{+}+i\eta)$乘式(15)两边，并取极限$\omega\to E_{n}^{+}-i\eta$及$\eta\to0^{+}$，我们得到

$$\sum_{\gamma}[M_{\alpha\gamma}(E_{n}^{+})+\varepsilon_{\alpha}\delta_{\alpha\gamma}-u_{\alpha\gamma}]\langle\Psi_{0}|\bar{\xi}_{\gamma}|\Psi_{n}(A+1)\rangle$$

$$=E_{n}^{+}\langle\Psi_{0}|\bar{\xi}_{\alpha}|\Psi_{n}(A+1)\rangle \tag{17}$$

同样，如果以（$\omega+E_{n}^{-}-i\eta$）乘式(15)两边并取极限$\omega\to-E_{n}^{-}+i\eta$及$\eta\to0^{+}$，则有

$$\sum_{\gamma}[M_{\alpha\gamma}(-E_{n}^{-})+\varepsilon_{\alpha}\delta_{\alpha\gamma}-u_{\alpha\gamma}]\langle\Psi_{n}(A-1)|\bar{\xi}_{\gamma}|\Psi_{0}\rangle$$

$$=(-E_{n}^{-})\langle\Psi_{n}(A-1)|\bar{\xi}_{\alpha}|\Psi_{0}\rangle \tag{18}$$

注意，式(17)与(18)可以合并为以下本征方程：

$$\sum_{\gamma}[M_{\alpha\gamma}(E_{n})+\varepsilon_{\alpha}\delta_{\alpha\gamma}-u_{\alpha\gamma}]C_{\gamma}(n)$$

$$=E_{n}C_{\alpha}(n) \tag{19}$$

当本征值$E_{n}=E_{n}^{+}=E_{n}(A+1)-E_{0}(A)$时，本征函数$\{C_{\gamma}(n)\}$的物理意义为

$$C_{\gamma}(n)=\langle\Psi_{0}|\bar{\xi}_{\gamma}|\Psi_{n}(A+1)\rangle \tag{20a}$$

即它就是式(4)的严格解$|\Psi_{n}(A+1)\rangle$在模型空间$\{\bar{\xi}_{\gamma}^{+}|\Psi_{0}\rangle\}\equiv M(A+1)$的投影。此外由式(12)我们看到，只要$A+1$核的某一严格本征态在$M(A+1)$中的投影不等于零，则它的本征值$E_{n}(A+1)=E_{0}(A)+E_{n}$和投影分量$C_{\gamma}(n)$（除了一个归一化常数）就可由式(19)求得，反之亦然。同样，如果$E_{n}=-E_{n}^{-}=E_{0}(A)-E_{n}(A-1)$，则

$$C_\gamma(n)=\langle \Psi_n(A-1)|\bar{\xi}_\gamma|\Psi_0\rangle \tag{20b}$$

这时它是$A-1$核的本征态$|\Psi_n(A-1)\rangle$在模型空间$\{\bar{\xi}_\gamma|\Psi_0\rangle\}\equiv M(A-1)$的投影。注意，$(A+1)$核的态空间$S(A+1)\equiv\{\bar{\xi}_\gamma^+|\Psi_0\rangle, \bar{\xi}_\mu^+\bar{\xi}_\nu^+\xi_\rho|\Psi_0\rangle, \cdots\}$，所以$M(A+1)$只是$S(A+1)$的子空间。同样，$M(A-1)$只是$S(A-1)=\{\bar{\xi}_\gamma|\Psi_0\rangle, \bar{\xi}_\mu\bar{\xi}_\nu\xi_\rho^+|\Psi_0\rangle, \cdots\}$的子空间。这说明，应用式(19)求$(A\pm1)$核的一部分严格本征值与投影分量时，我们不需要考虑$(A\pm1)$核的全部态空间，因此式(19)已是等效本征方程，虽然它是无穷维的。上面的讨论也说明，如果态$|\Psi_n(A+1)\rangle$在子空间$M(A+1)$的投影等于零，则由式(19)不能求得与之相应的本征值。为了求得这部分本征态，可以进一步考虑2p-1h格林函数

$$G_{\alpha\beta\gamma,\mu\nu\rho}(t_1-t_2)$$
$$=\langle\Psi_0|T\{\xi_\gamma^+(t_1)\bar{\xi}_\beta(t_1)\bar{\xi}_\alpha(t_1)\xi_\mu^+(t_2)\xi_\nu^+(t_2)\bar{\xi}_\rho(t_2)\}|\Psi_0\rangle$$

以及由它所导得的本征方程等。

式(15)中的脚标α，β，γ遍历式(5)的本征态，因而它是无穷维的。令$\{a\}$表示$\{\alpha\}$的一个子集，$\{\bar{a}\}=\{\alpha\}-\{a\}$表示它的补集。我们看到，即使只想求$\{G_{\alpha\beta}(\omega)\}$的一部分分量$\{G_{ab}(\omega)\}$也必须求解式(15)的全部联立方程。如果能严格建立一个只以$G_{ab}(\omega)$为变量的联立方程，这方程就称为G_{ab}满足的等效积分方程1)[3]。下一节将进一步讨论这个问题以及由此导得的等效本征方程。为了说明上述方法的一般性，让我们再考虑$(A\pm2)$核子体系与2p格林函数，其定义为

$$G(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2;\ t=t_1-t_2)$$
$$=\langle\Psi_0|T\{\bar{\xi}_{\alpha_2}(t_1)\bar{\xi}_{\alpha_1}(t_1)\xi_{\beta_1}^+(t_2)\xi_{\beta_2}^+(t_2)\}|\Psi_0\rangle \tag{21}$$

显然，G相对于交换α_1与α_2或β_1与β_2是反对称的，因此可以约定$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1<\beta_2$。根据式(21)以及

$$\Sigma_n|\Psi_n(A\pm2)\rangle\langle\Psi_n(A\pm2)|=I(A\pm2)$$

容易求得

$$G(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2;\ t>0)=$$
$$\Sigma_n\langle\Psi_0|\bar{\xi}_{\alpha_2}\bar{\xi}_{\alpha_1}|\Psi_n(A+2)\rangle\langle\Psi_n(A+2)|\xi_{\beta_1}^+\xi_{\beta_2}^+|\Psi_0\rangle$$
$$\times\exp[-iE_n^+(t_1-t_2)] \tag{22a}$$
$$G(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2;\ t<0)=$$
$$\Sigma_n\langle\Psi_0|\xi_{\beta_1}^+\xi_{\beta_2}^+|\Psi_n(A-2)\rangle\langle\Psi_n(A-2)|\bar{\xi}_{\alpha_2}\bar{\xi}_\alpha|\Psi_0\rangle$$
$$\times\exp[iE_n^-(t_1-t_2)] \tag{22b}$$

1) 当α等只取分立值时，式(15)仅是一个非齐次联立线性代数方程。但实际上式(15)常含有连续谱，因此Σ应代以$\oint$，故习惯上不加区别地称式(15)为积分方程。

其中

$$E_n^{\pm}=E_n(A\pm 2)-E_0(A) \tag{23}$$

由式(22)有

$$G(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2;\ \omega)=-\sum_n\left\{\frac{\langle\Psi_0|\bar{\xi}_{\alpha_2}\bar{\xi}_{\alpha_1}|\Psi_n(A+2)\rangle\langle\Psi_n(A+2)|\xi^+_{\beta_1}\xi^+_{\beta_2}|\Psi_0\rangle}{\omega-E_n^++i\eta}\right.$$

$$\left.-\frac{\langle\Psi_0|\xi^+_{\beta_1}\xi^+_{\beta_2}|\Psi_n(A-2)\rangle\langle\Psi_n(A-2)|\bar{\xi}_{\alpha_2}\bar{\xi}_{\alpha_1}|\Psi_0\rangle}{\omega+E_n^--i\eta}\right\}_{\eta\to 0^+} \tag{24}$$

这就是2p格林函数的Lehmann表示。$G(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2;\ t)$满足的积分方程可以写为

$$G(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2;\ t_1-t_2)=\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}G^0_{\alpha_1}(t_1-t_2)G^0_{\alpha_2}(t_1-t_2)$$

$$-\sum_{\gamma_1<\gamma_2}\iint_{-\infty}^{\infty}d\sigma_1 d\sigma_2 G^0_{\alpha_1}(t_1-\sigma_1)G^0_{\alpha_2}(t_1-\sigma_1)L_{\alpha_1\alpha_2,\gamma_1\gamma_2}(\sigma_1-\sigma_2)$$

$$\times G(\gamma_1\gamma_2,\ \beta_1\beta_2;\ \sigma_2-t_2) \tag{25}$$

其中$L_{\alpha_1\alpha_2,\gamma_1\gamma_2}$称为不可约顶角函数。迭代式(25)可以得到$G$的迭代级数解。由此可知，$L$就是以下全部费曼图之和，但它不包含$\sigma_1$离开及$\sigma_2$进入图形的费米线。这些图的特点是，每一个图均不能通过在同一水平位置切断两根粒子内线或两根空穴内线而将它分为两部分。简单些也可说，L只应该包含全部这类图（或项），由它按式(25)生成的G的迭代级数应和按摄动理论计算的结果一致。式（25）的傅氏变换如下：

$$G(\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2;\omega)=\delta_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}G^0_{\alpha_1\alpha_2}(\omega)$$

$$+G^0_{\alpha_1\alpha_2}(\omega)\sum_{\gamma_1<\gamma_2}L_{\alpha_1\alpha_2,\gamma_1\gamma_2}(\omega)G(\gamma_1\gamma_2,\ \beta_1\beta_2;\ \omega) \tag{26}$$

$$G^0_{\alpha_1\alpha_2}(\omega)=-\frac{(1-n_{\alpha_1})(1-n_{\alpha_2})}{\omega-\varepsilon_{\alpha_1}-\varepsilon_{\alpha_2}+i\eta}+\frac{n_{\alpha_1}n_{\alpha_2}}{\omega-\varepsilon_{\alpha_1}-\varepsilon_{\alpha_2}-i\eta} \tag{27}$$

将式（24）代入（26），仿照推导式（19）的步骤，以（$\omega-E_n^++i\eta$）乘式（26）的两边，再取极限$\omega\to E_n^+-i\eta$与$\eta\to 0^+$，由此得到下面的本征方程：

$$(\varepsilon_{\alpha_1}+\varepsilon_{\alpha_2}-E_n^+)\langle\Psi_0|\bar{\xi}_{\alpha_2}\bar{\xi}_{\alpha_1}|\Psi_n(A+2)\rangle$$

$$=(1-n_{\alpha_1}-n_{\alpha_2})\sum_{\gamma_1<\gamma_2}L_{\alpha_1\alpha_2,\gamma_1\gamma_2}(E_n^+)\langle\Psi_0|\bar{\xi}_{\gamma_2}\bar{\xi}_{\gamma_1}|\Psi_n(A+2)\rangle$$

同样，如果以（$\omega+E_n^--i\eta$）乘式(26)的两边并取极限$\omega\to-E_n^-+i\eta$及$\eta\to 0^+$，则有

$$(\varepsilon_{\alpha_1}+\varepsilon_{\alpha_2}+E_n^-)\langle\Psi_n(A-2)|\bar{\xi}_{\alpha_2}\bar{\xi}_{\alpha_1}|\Psi_0\rangle$$

$$=(1-n_{\alpha_1}-n_{\alpha_2})\sum_{\gamma_1<\gamma_2}L_{\alpha_1\alpha_2,\gamma_1\gamma_2}(-E_n^-)\langle\Psi_n(A-2)|\bar{\xi}_{\gamma_2}\bar{\xi}_{\gamma_1}|\Psi_0\rangle$$

显然，以上两本征方程可统一写为

$$(\varepsilon_{\alpha_1}+\varepsilon_{\alpha_2}-E_n)C_{\alpha_1\alpha_2}(n)$$

$$=(1-n_{\alpha_1}-n_{\alpha_2})\sum_{\gamma_1<\gamma_2} L_{\alpha_1\alpha_2,\gamma_1\gamma_2}(E_n)C_{\gamma_1\gamma_2}(n) \tag{28}$$

其中本征值与本征矢量的物理意义见上面两本征方程。由式(24)我们还看到，只要（$A+2$）核的某一本征态 $|\Psi_n(A+2)\rangle$ 在模型空间$M(A+2)=\{\bar{\xi}^+_{\gamma_1}\bar{\xi}^+_{\gamma_2}|\Psi_0\rangle\}$的投影不等于零，那么它的各投影分量（除了一归一化常数）以及与之对应的本征值 E_n（$A+2$）$=E_0$（A）$+E^+_n$都可严格由式（28）求得；反之，如果它在$M(A+2)$的投影为零，则由式(28)将得不到关于它的信息。这一注释同样适用于（$A-2$）核，其原因在于M（$A\pm2$）只是($A\pm2$)核的态空间的子空间。这同时说明，式(28)已是等效本征方程，虽然它的维数也是无穷的。

令$\{a_1a_2\}$表示$\{\alpha_1\alpha_2\}$的任一子集，它的补集将记为$\{\bar{a}_1\bar{a}_2\}=\{\alpha_1\alpha_2\}-\{a_1a_2\}$。代替式(26)，能不能严格建立一个只以$\{G(a_1a_2,\ b_1b_2;\ \omega)\}$为未知量的等效积分方程？我们将看到，由此导得的等效本征方程将有以下普遍意义：它的模型空间及其维数可以随我们求解问题的需要而恰当选择。下一节将讨论这个问题。

三、等效积分方程与等效本征方程

本节目的是讨论如何建立等效积分方程以及由此所导得的本征方程。让我们考虑一个一般的二时格林函数，其傅氏变换可写为$G(\alpha_1\cdots\alpha_r,\ \beta_1\cdots\beta_r;\ \omega)$。对指标$\alpha_1\cdots\alpha_r$与$\beta_1\cdots\beta_r$我们都将做以下约定：令$\alpha_{j1}\cdots\alpha_{jm}$ ($1<m\leqslant r$)为$\alpha_1\cdots\alpha_r$的任一子集，P表示$\alpha_{j1}\cdots\alpha_{jm}$的一个置换。如果对任一$P$均有

$$PG(\alpha_1\cdots\alpha_{j1}\cdots\alpha_{jm}\cdots\alpha_r,\ \beta_1\cdots\beta_r;\ \omega)$$
$$=(-1)PG(\alpha_1\cdots\alpha_r,\ \beta_1\cdots\beta_r;\ \omega)$$

则我们将约定，对$\alpha_{j1}\cdots\alpha_{jm}$以及对它的求和都加了以下要求：$\alpha_{j1}<\alpha_{j2}<\cdots<\alpha_{jm}$。同样的约定也适用于$\beta_1\cdots\beta_r$。假定$G$满足以下积分方程：

$$G(\alpha_1\cdots\alpha_r,\ \beta_1\cdots\beta_r;\ \omega)=\delta_{\alpha_1\cdots\alpha_r,\ \beta_1\cdots\beta_r}G^0(\alpha_1\cdots\alpha_r;\ \omega)$$
$$+G^0(\alpha_1\cdots\alpha_r;\ \omega)\sum_{\gamma_1\cdots\gamma_r}L(\alpha_1\cdots\alpha_r,\ \gamma_1\cdots\gamma_r;\ \omega)$$
$$\times G(\gamma_1\cdots\gamma_r,\ \beta_1\cdots\beta_r;\ \omega) \tag{29}$$

让我们将$\{\alpha_1\cdots\alpha_r\}$任意分为两个不相交的子集$\{a_1\cdots a_r\}$与$\{\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r\}$之和，即

$$\{\alpha_1\cdots\alpha_r\}=\{a_1\cdots a_r\}+\{\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r\} \tag{30}$$

令$G_Q(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\ \bar{b}_1\cdots\bar{b}_r;\ \omega)$满足以下积分方程：

$$G_Q(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\ \bar{b}_1\cdots\bar{b}_r;\ \omega)$$
$$=\delta_{\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\ \bar{b}_1\cdots\bar{b}_r}G^0(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r;\ \omega)$$
$$+G^0(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r;\ \omega)\sum_{\bar{c}_1\cdots\bar{c}_r}L(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\bar{c}_1\cdots\bar{c}_r;\ \omega)$$
$$\times G_Q(\bar{c}_1\cdots\bar{c}_r,\ \bar{b}_1\cdots\bar{b}_r;\ \omega) \tag{31}$$

其中指标均只取子集$\{\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r\}$中的值。这节的中心内容就是证明以下引理：

满足式（29）的$G(a_1\cdots a_r,\ b_1\cdots b_r;\ \omega)$亦必满足以下积分方程：

$$\begin{aligned}G(a_1\cdots a_r,\ b_1\cdots b_r;\ \omega) &= \delta_{a_1\cdots a_r,\ b_1\cdots b_r} G^0(a_1\cdots a_r;\ \omega)\\ &+G^0(a_1\cdots a_r;\ \omega)\sum_{c_1\cdots c_r} L^{\mathrm{eff}}(a_1\cdots a_r,\ c_1\cdots c_r;\ \omega)\\ &\times G(c_1\cdots c_r,\ b_1\cdots b_r;\ \omega)\end{aligned}\tag{32}$$

其中等效不可约顶角算符L^{eff}的表达式如下：

$$\begin{aligned}L^{\mathrm{eff}}(a_1\cdots a_r,\ c_1\cdots c_r;\ \omega) &= L(a_1\cdots a_r,\ c_1\cdots c_r;\ \omega)\\ &+\sum_{\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\ \bar{b}_1\cdots\bar{b}_r} L(a_1\cdots a_r,\ \bar{a}_1\cdots\bar{a}_r;\ \omega)\\ &\times G_Q(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\ \bar{b}_1\cdots\bar{b}_r;\ \omega)L(\bar{b}_1\cdots\bar{b}_r,\ c_1\cdots c_r;\ \omega)\end{aligned}\tag{33}$$

注意，式（32）中的指标只取子集$\{a_1\cdots a_r\}$中的值，而且这个子集可以任意选择。自然，如何恰当选择这个子集是一个计算技巧，需要针对具体问题而定。它是核理论计算中一个很熟悉的问题——如何平衡式(32)与(31)的计算以使结果足够精确，而计算又比较简单。很明显，式(32)的未知量只是子集$\{G(a_1\cdots a_r,\ b_1\cdots b_r;\ \omega)\}$，所以它就是所拟求的等效积分方程。

证明：根据式（29）与（30）有

$$\begin{aligned}&G(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\ b_1\cdots b_r;\ \omega)\\ &=G^0(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r;\ \omega)\Big\{\sum_{c_1\cdots c_r} L(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\ c_1\cdots c_r;\ \omega)G(c_1\cdots c_r,\ b_1\cdots b_r;\omega)\\ &+\sum_{\bar{c}_1\cdots\bar{c}_r} L(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\ \bar{c}_1\cdots\bar{c}_r;\ \omega)G(\bar{c}_1\cdots\bar{c}_r,\ b_1\cdots b_r;\ \omega)\Big\}\end{aligned}\tag{34}$$

迭代上式并应用式（31），容易求得

$$\begin{aligned}&G(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\ b_1\cdots b_r;\ \omega)\\ &=\sum_{\bar{b}_1\cdots\bar{b}_r,\ c_1\cdots c_r} G_Q(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\ \bar{b}_1\cdots\bar{b}_r;\ \omega)L(\bar{b}_1\cdots\bar{b}_r,\ c_1\cdots c_r;\omega)\\ &\times G(c_1\cdots c_r,\ b_1\cdots b_r;\ \omega)\end{aligned}\tag{35}$$

另一个直接证明(35)式的途径如下：将式(35)代入式(34)的右边，我们得到

$$\begin{aligned}&G^0(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r;\ \omega)\Big\{\sum_{c_1\cdots c_r} L(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,c_1\cdots c_r;\ \omega)G(c_1\cdots c_r,b_1\cdots b_r;\omega)\\ &+\sum_{c_1\cdots c_r}\sum_{\bar{b}_1\cdots\bar{b}_r,\ c_1\cdots c_r} L(\bar{a}_1\cdots\bar{a}_r,\bar{c}_1\cdots\bar{c}_r;\ \omega)G_Q(\bar{c}_1\cdots\bar{c}_r,\ \bar{b}_1\cdots\bar{b}_r;\ \omega)\end{aligned}$$

$$\times L(\bar b_1\cdots\bar b_r,c_1\cdots c_r;\omega)G(c_1\cdots c_r,b_1\cdots b_r;\omega)\}$$

$$=\sum_{\bar b_1\cdots\bar b_r,c_1\cdots c_r}\{G^0(\bar a_1\cdots\bar a_r;\omega)\delta_{\bar a_1\cdots\bar a_r,\bar b_1\cdots\bar b_r}$$

$$+G^0(\bar a_1\cdots\bar a_r;\omega)\sum_{\bar c_1\cdots\bar c_r}L(\bar a_1\cdots\bar a_r,\bar c_1\cdots\bar c_r;\omega)\times$$

$$G_Q(\bar c_1\cdots\bar c_r,\bar b_1\cdots\bar b_r;\omega)\}$$
$$\times L(\bar b_1\cdots\bar b_r,c_1\cdots c_r;\omega)G(c_1\cdots c_r,b_1\cdots b_r;\omega)$$

$$=\sum_{\bar b_1\cdots\bar b_r,c_1\cdots c_r}G_Q(\bar a_1\cdots\bar a_r,\bar b_1\cdots\bar b_r;\omega)L(\bar b_1\cdots\bar b_r,c_1\cdots c_r;\omega)$$

$$\times G(c_1\cdots c_r,b_1\cdots b_r;\omega) \tag{36}$$

在导得最后一等式时使用了(31)式。式(36)说明，式(35)使(34)恒等成立，因此式(35)成立。另外，由式(29)有

$$G(a_1\cdots a_r,b_1\cdots b_r;\omega)=\delta_{a_1\cdots a_r,b_1\cdots b_r}G^0(a_1\cdots a_r;\omega)$$

$$+G^0(a_1\cdots a_r;\omega)\{\sum_{c_1\cdots c_r}L(a_1\cdots a_r,c_1\cdots c_r;\omega)G(c_1\cdots c_r,b_1\cdots b_r;\omega)$$

$$+\sum_{\bar c_1\cdots\bar c_r}L(a_1\cdots a_r,\bar c_1\cdots\bar c_r;\omega)G(\bar c_1\cdots\bar c_r,b_1\cdots b_r;\omega)\}$$

将式(35)代入上式立即得到

$$G(a_1\cdots a_r,b_1\cdots b_r;\omega)=\delta_{a_1\cdots a_r,b_1\cdots b_r}G^0(a_1\cdots a_r;\omega)$$

$$+G^0(a_1\cdots a_r;\omega)\sum_{c_1\cdots c_r}\{L(a_1\cdots a_r,c_1\cdots c_r;\omega)$$

$$+\sum_{\bar a_1\cdots\bar a_r,\bar b_1\cdots\bar b_r}L(a_1\cdots a_r,\bar a_1\cdots\bar a_r;\omega)G_Q(\bar a_1\cdots\bar a_r,\bar b_1\cdots\bar b_r;\omega)$$

$$\times L(\bar b_1\cdots\bar b_r,c_1\cdots c_r;\omega)\}G(c_1\cdots c_r,b_1\cdots b_r;\omega) \tag{37}$$

这就证明了式(32)与(33)，因此引理证毕。

显然，式(15)与(26)都只是(29)式的特例。根据式(32)与(33)我们立即得到以下结果。

(1) 单粒子格林函数的任一子集$\{G_{ab}(\omega)\}$满足以下等效积分方程：

$$G_{ab}(\omega)=\delta_{ab}G_a^0(\omega)+G_a^0(\omega)\sum_c[u_{ac}-M_{ac}^{eff}(\omega)]G_{cb}(\omega) \tag{38}$$

其中指标a,b,c只取子集$\{a\}$中的值，等效质量算符$M_{ac}^{eff}(\omega)$的表达式如下：

$$M^{\mathrm{eff}}_{ac}(\omega)=M_{ac}(\omega)-\sum_{\bar a\bar b}(M_{a\bar a}(\omega)-u_{a\bar a})$$

$$\times G_Q(\bar a,\bar b;\ \omega)(M_{\bar b c}(\omega)-u_{\bar b c}) \qquad (39)$$

这里$G_Q(\bar a,\ \bar b;\ \omega)$的定义为

$$G_Q(\bar a,\bar b;\ \omega)=\delta_{\bar a\bar b}G^0_{\bar a}(\omega)$$

$$+G^0_{\bar a}(\omega)\sum_{\bar c}[u_{\bar a\bar c}-M_{\bar a\bar c}(\omega)]G_Q(\bar c,\bar b;\ \omega) \qquad (40)$$

指标$\bar a$, $\bar b$, $\bar c$都只取子集$\{\bar a\}=\{\alpha\}-\{a\}$中的值。属于$\{a\}$与$\{\bar a\}$的态将分别称为主动态与被动态。主动态将仍用图 1 表示，被动的粒子与空穴线将分别用带刺的箭头向上与向下的线段表示。图 4 说明了M^{eff}与M的区别，图 4a 表示质量算符M，图 4b 与 4c 均不属于M而属于可约质量算符；虽然图4b也不属于M^{eff}，但不仅 4a 而且 4c 都是M^{eff}的一部分。

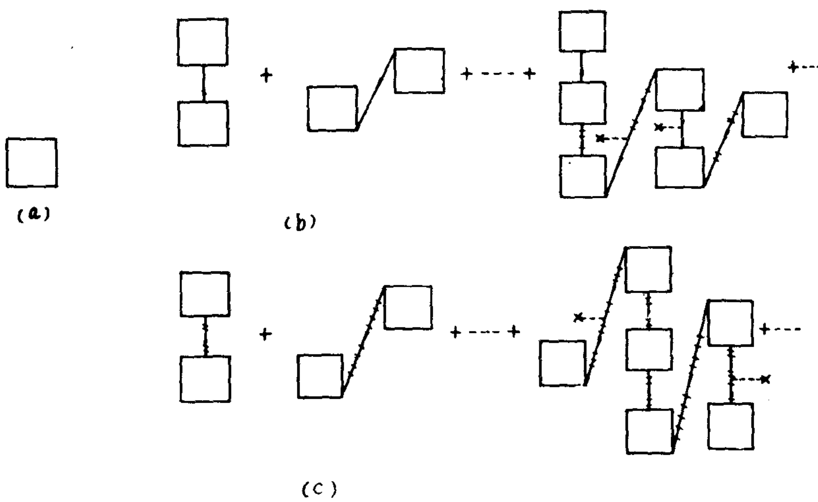

图 4 等效质量算符

(a) 质量算符；(b) 不属于M^{eff}；(c) 属于M^{eff}。

(2) 2p 格林函数的任一子集$\{G(a_1a_2,b_1b_2;\omega)\}$满足的等效积分方程可以写为

$$G(a_1a_2,b_1b_2;\omega)=\delta_{a_1a_2,\ b_1b_2}G^0(a_1a_2;\omega)$$

$$+G^0(a_1a_2;\omega)\sum_{c_1<c_2}L^{\mathrm{eff}}(a_1a_2,c_1c_2;\omega)G(c_1c_2,b_1b_2;\omega) \qquad (41)$$

其中等效顶角算符的表达式如下：

$$L^{\mathrm{eff}}(a_1a_2,c_1c_2;\omega)=L(a_1a_2,c_1c_2;\omega)$$

$$+\sum_{\bar{a}_1<\bar{a}_2,\ \bar{b}_1<\bar{b}_2} L(a_1a_2,\bar{a}_1\bar{a}_2;\omega)G_Q(\bar{a}_1\bar{a}_2,\bar{b}_1\bar{b}_2;\omega)$$

$$\times L(\bar{b}_1\bar{b}_2,c_1c_2;\omega) \tag{42}$$

这里$G_Q(\bar{a}_1\bar{a}_2,\bar{b}_1\bar{b}_2;\omega)$的定义为

$$G_Q(\bar{a}_1\bar{a}_2,\bar{b}_1\bar{b}_2;\omega)=\delta_{\bar{a}_1\bar{a}_2,\bar{b}_1\bar{b}_2}G^0(\bar{a}_1\bar{a}_2;\omega)$$

$$+G^0(\bar{a}_1\bar{a}_2;\omega)\sum_{\bar{c}_1<\bar{c}_2} L(\bar{a}_1\bar{a}_2,\bar{c}_1\bar{c}_2;\omega)$$

$$\times G_Q(\bar{c}_1\bar{c}_2,\bar{b}_1\bar{b}_2;\omega) \tag{43}$$

指标对$(\bar{a}_1\bar{a}_2)$，$(\bar{b}_1\bar{b}_2)$与$(\bar{c}_1\bar{c}_2)$都只取子集$\{\bar{a}_1\bar{a}_2\}$中的值，而式(41)中的(a_1a_2)，(b_1b_2)与(c_1c_2)只取子集$\{a_1a_2\}$中的值。以上两个例子表明了引理的普遍性，其它举例这里就不多述了。

下面让我们讨论等效本征方程。不难看出，前一节阐明的方法这里同样适用。因此，只需写下有关的结果。由式(38)导得的等效本征方程为

$$\sum_b[M^{\text{eff}}_{ab}(E_n)+\varepsilon_a\delta_{ab}-u_{ab}]C_b(n)$$

$$=E_nC_a(n) \tag{44}$$

其中$C_a(n)$的物理意义见(20)式，只需将它里面的γ换为a。因为子集$\{a\}$可以根据需要而选择，当$\{a\}$选为有限集时，式(44)就是有限维的。同样，由式(41)可得

$$(\varepsilon_{a_1}+\varepsilon_{a_2}-E_n)C_{a_1a_2}(n)$$

$$=(1-n_{a_1}-n_{a_2})\sum_{b_1<b_2} L^{\text{eff}}(a_1a_2,b_1b_2;E_n)C_{b_1b_2}(n) \tag{45}$$

其中当$E_n=E_n(A+2)-E_0(A)$时，

$$C_{a_1a_2}(n)=\langle\Psi_0|\bar{\xi}_{a_2}\bar{\xi}_{a_1}|\Psi_n(A+2)\rangle \tag{46a}$$

而当$E_n=-E_{\bar{n}}=E_0(A)-E_n(A-2)$时，

$$C_{a_1a_2}(n)=\langle\Psi_n(A-2)|\bar{\xi}_{a_2}\bar{\xi}_{a_1}|\Psi_0\rangle \tag{46b}$$

注意，因为$\{a_1a_2\}$可以任意选择，它们可以选为一部分粒子对和一部分空穴对之和，也可以只选为一部分粒子对或一部分空穴对。自然，恰当的选择将会减少计算的工作量。让我们用p，q表示粒子态，k，l表示空穴态。例如，为了求^{18}O的低激发态，令p,q表示od-1s壳的粒子态，k,l为op壳的空穴态，我们可选$\{a_1a_2\}=\{p_1p_2\}+\{k_1k_2\}$，也可选$\{a_1a_2\}=\{p_1p_2\}$。但选$\{a_1a_2\}=\{k_1k_2\}$却是不适当的，虽然后者对求$^{14}O$的低激发谱是一个可考虑的选择。不同的选择都可由式(45)得到严格的结果，其原因是因为根据式(42)对不同的$\{a_1a_2\}$，L^{eff}互不相同。$\{a_1a_2\}$小，则L^{eff}将更复杂，所以在实际计算时应考虑二者之间的适当平衡。对以上三种情况，因为$(1-n_{a_1}-n_{a_2})$的取值不