

S.M.P.

中學數學教程

第2冊

Q634.6
881
2

S 017015

英國 S.M.P. 中學數學教程

THE SCHOOL MATHEMATICS PROJECT

BOOK 2



S9000216

教程中，受英商門...

石景宜 先生贈書
年 月 日

九章出版社 出版
製作·發行：學英文化事業有限公司

英國 S.M.P. 中學數學教程

●(中文版第二冊)●

出版者：九章出版社

製作·發行：學英文化事業有限公司

地址：羅斯福路四段52巷6號

電話：(02)3946693

印刷者：九章打字印刷行

出版日期：中華民國72年10月

定價：普及版700元整

郵政劃撥：578690 學英文化公司帳戶

英國 S.M.P. 數學計劃

當 S.M.P. 於 1961 年創立時，其主要任務是設計一套新的中學數學教程（根據 GCE 及 CSE 課程），反映現代數學之特性及應用，以比傳統的課程更適用。

現在這個任務已達成了。S.M.P. 課本第 1~5 冊為達成“S.M.P. O-級會考”的五年課程，第 3, 4, 5 冊也是達成“O-級會考”的三年課程（早期的各 T 冊及 T4 冊現已作廢）。高等數學課本第 1~4 冊為達成“S.M.P.-A-級會考”的課程且 S.M.P. 進階數學系列的 5 本小冊子包涵了“A-級會考”各章節的資料。修訂的高等數學課本第一冊改為增訂高等數學第 1~2 冊。O-級 S.M.P. 補充數學教材有二冊。所有有關 S.M.P.·GCE 會考的資料可向各校甄試委員會索取。

第 A-H 冊課本是為非 GCE 系統而設計的，它詳述 O-級系列前幾冊的數學課程內容。許多 CSE 甄試委員會列入考試範圍。事實上，這系列的課本非常廣泛地被各級綜合學校使用，並且，這七本書之後還有第 X、Y 及 Z 冊，它提供了達成“S.M.P. O-級會考”的課程。將 S.M.P. 第 A、B、C、D 冊課本中資料變通處理成 S.M.P. 卡片 I 及 II。

各系列的課本都發行有教師手冊。S.M.P. 另印行有各種其它的課本，歡迎教師每年向康橋大學出版部，Bentley House, 200 Euston Road, London NW12DB 免費索取，目錄備索。同樣的，各級教師若需協助或有寶貴意見，敬請示教 S.M.P. 執行小組，Westfield College, Hampstead, London NW 37 ST。本小組備有各種年報及教案、進度表等，歡迎索閱。

在完成頭十年的工作後，建立了 S.M.P. 將繼續進行數學課程研究的穩固磐石。其工作報告由 Bryan Thwaites 編撰成 S.M.P. 十年回顧一書。S.M.P. 的作者羣中，來自 40 多所學校及大學的數學家，將繼續參與這工作並設計新的課程。但是，S.M.P. 將來的成績，仍同往常一樣，有賴於所有的教師及學生共同在課堂上惠予協助。我們誠摯地歡迎讀者給予 S.M.P. 批評指教。

第二冊 序言

第1冊的序說明了編寫 S.M.P. 教程的計劃（事實上，教材就是按這計劃編成的）；原定計劃中是要把這一般中學的教材編成四冊的。但當我們獲得了許多來自各種學校的寶貴意見後，發覺計劃需稍作修改；經過一番研討之後，我們認為把教材編成五冊是同時適應各種不同類型學校的最佳折衷辦法。因此，S.M.P. 初級教程將被安排成學生在11歲時由第1冊開始讀，然後接看的各年分別讀第2，3，4，5冊，以達到初級水準的形態。此外，引導學生準備參加初級文憑考試的「S.M.P. 附加數學」的教程時編入附加數學教材中。

在全世界數學課程大綱的改革聲中，有兩個特別引起大家興趣的問題。其中第一個就是有關幾何的教法問題。近七十年來歐幾里得對幾何的影響力漸走下坡，但却仍然少有競爭者來填補這空缺。這期間時常有人想將變換幾何納入中學課程中；最近，這建議又重新引起大家的興趣。變換幾何題材之所以能為大家所接納，是由於當它嘗試由各方面去着手探討，並且用遍及由高度抽象以至廣泛直觀的方法來處理時，所涵蘊的數學價值。在 S.M.P. 教程中，變換幾何出現得很早，所以它的處理方法是傾向於直觀的。S.M.P. 教程在第1冊中關於對稱的一章探討了變換幾何的一些概念。然而，讀者可在第2冊中開始正式的研究變換。在第5章，我們會遇到兩種保持距離與形狀的映射，就是鏡射與旋轉；而第7章利用向量這強有力的概念介紹了平移。放大是一種保持形狀，但不保持大小的變換，討論這種變換的一章產生了許多傳統上由討論相似三角形所導出的結果。拓撲學一章談及一些不保持形狀，亦不保持大小，但却仍然非常有趣的變換。在這階段中，這部分教材的用意只是在培養幾何直觀的能力；變換的代數表示式將延遲到後面的幾冊中才會出現。

稍為常見的兩個單元是畢氏定理與立體體積的探討。這兩章

的精神和第1冊中討論面積的一章關係非常密切：認識體積的概念是非常重要的件事，它應該比學習公式還要優先。有關立體的一章不僅介紹了簡單的幾何畫法，還包括了更有趣的建造多面體模型的工作。

第二個問題涉及代數的教法。培養青少年的演算技巧固然不可或缺，但更為重要的是讓他們明白在演算時到底是在做甚麼。從一方面來說，機械式的訓練是需要的；但從另一方面來說，學生們應學得如何去解簡單的方程式和掌握有關括號的問題。對操作能力需求的程度與嘗試去解釋基本概念的方法是各人見解的問題，老師們大概會對S.M.P. 在第4, 8, 11與13章所提供的看法發生興趣。我們在第1冊中曾談及簡單的數字圖案；在這裏，我們又重拾這個論題，來討論稍為複雜的圖案，尤其是巴斯卡三角形，費波那奇級數與有限及無限小數。

中學數學的其中一個教學目標是授與學生有關離開學校後所最常遇到的問題的知識。除了基本的算術以外，沒有別的題材能比簡單統計的介紹更有實用價值了。我們的目的是說明如何收集，陳列與解釋資料。不僅如此，我們還希望趁此培養學生的判斷能力，使他們能敏捷地應付在我們所處的充滿統計與假統計的環境中的挑戰。

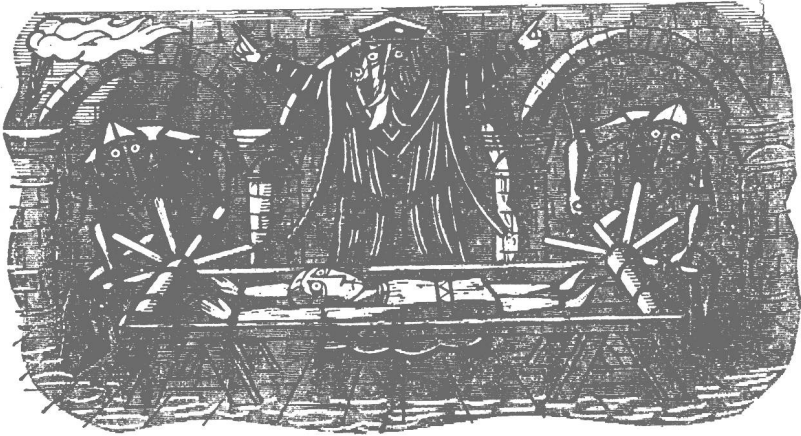
第2冊開始介紹三角。不同於一般傳統教材以直角三角形及比作出發點的探討法，本書以投影和放大作為研究的基礎。我們之所以這樣處理是希望這部分與變換及向量的部分能較緊密地銜接。在這裏，我們並不打算介紹三角函數表；甚至在本書中，我們也不會介紹對數表。事實上，我們選擇了計算尺作為計算的輔助工具。對青少年們來說，計算尺實質上遠比對數表來得有趣，何況它還能提供其他的益處——不僅是指要了解它和利用它都比較節省時間。

正如第1冊一樣，習題的解答並不附印在書後，而收在對學生用的課本逐章作了詮釋的教師指引手冊中。

目 錄

1 拓樸	1
2 統計	25
3 相似與放大	51
4 次序與括號	70
複 習 題	82
5 鏡射與旋轉	91
6 數字圖形	118
7 平移與向量	139
複 習 題	168
8 關係和函數	177
9 計算尺	199
10 立體	221
11 比與比例	241
複 習 題	266
12 三角	275
13 方程式與不等式	291
14 畢氏定理	311
謎 題	329
複 習 題	335

1 拓 樸



Stretch him out longer....

WILLIAM SHAKESPEARE, *King Lear*

1. 拓樸地圖

圖 1 是倫敦西端一部分的街道圖，地下鐵路車站以●表示，而鐵路則以 \times 表示。

圖 2 是僅表示同一地區的地下鐵路的路線圖。不同的路線用不同的形式表出。（譯者按：爲了方便起見，站名都用簡寫）。

試盡可能回答下列問題。你會發現其中有一些問題只可在圖 1 中找出答案，把這類答案記上 A ；有些只能在圖 2 中找出答案，把它記上 B ；有些從兩圖都可找出答案，把它記上 E 。在你回答剩下的其他問題之前，你還需要知道些甚麼嗎？

- (a) 如果你想自 OC 站經由直接路線至 H 站，你會經過多少個車站？
- (b) 由 P 站至 TC 站的兩條路線中，那一條較短？

- (c) S 站的前一站和後一站是甚麼站？
- (d) 舉出是起點或終點的站名。
- (e) 如果火車的速度是 50 km/h ，而在每一站都停留 1 分鐘，那麼由 CC 站至 OC 站要多久？
- (f) 畫出自 TC 站至 OC 站而牽涉到全部四條路線的走法。
- (g) 由 S 站至 H 站需要換車嗎？
- (h) 那兩站距離最近？
- (i) 在地下鐵路的那些部分，可以乘車向(i)北方，(ii)西南方走？

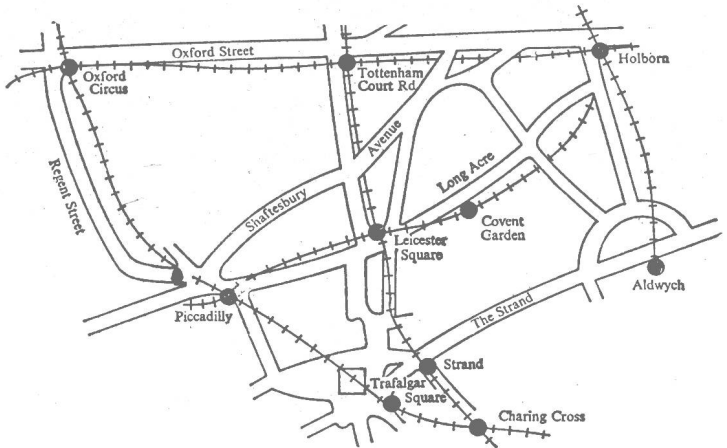


圖 1 倫敦西端的部份街道圖

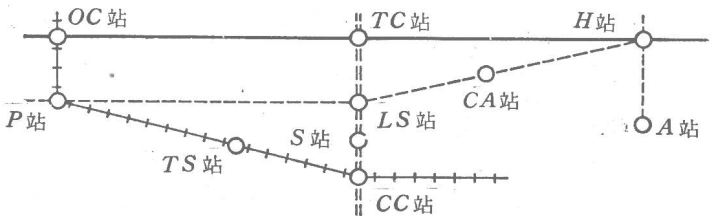


圖 2 倫敦地下鐵路圖

討論這兩個地圖的主要相異點，並說明為何地下鐵路圖要用這種方式繪製。

所謂拓樸地圖只表示出國家、地域、鐵路或建築物等的主要特色，而毫不理會任何長短的比例，也不表示任何路線是直的或是彎曲的。要明白這究竟是怎麼一回事的最好方法就是想像將一個正確的地圖畫在一塊非常薄的橡膠膜上。而這橡膠膜的彈性非常好，你想把它扭曲或拉成多長都可以，但不要把它撕開或把其中兩部分黏貼在一起。再說得清楚一點，就是你只要有用地扭曲它，使得彎曲的地方變直，或將複雜的曲線變得較為簡單。圖2的地下鐵路圖其實已比一個拓樸地圖表現出更多的資料；例如，它已把不同的路線表示出來。

圖3顯示出畫在一塊長方形橡膠膜的不規則曲線，被拉成圓形的情形。在圖中橡膠膜的邊最後變成不規則，其實並不一定會這樣。

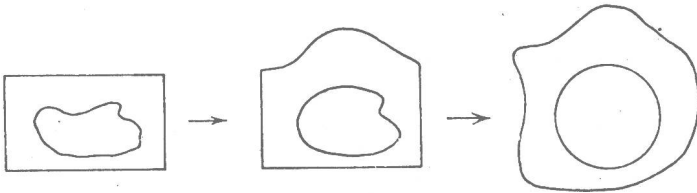


圖3

拓樸學有時候被稱為橡膠膜幾何學。它的主要內容是討論點，線和它們所構成的圖形。不過它當然不是幾何學；因為你可以將距離，曲率和角度等隨心所欲地扭曲。

習題A

1 圖4是一個著名的國際航空路線的拓樸地圖。你想這是那一個地圖？

若利用圖中的航線，你要怎樣才能由蒙特里爾到倫敦？你能不能指出由羅馬至倫敦與由奈洛比至約翰尼斯堡的距離何者較遠？再設計一些問題（如果可能的話，試由這地圖回答這些問題）。

2 圖5顯示了義大利的「腳跟」部份的主要公路，公路的幹線用粗黑線表示。試作這些幹線的拓樸地圖，並將連接曼都利亞、加拉多尼和拉察的路線繪成一圓。

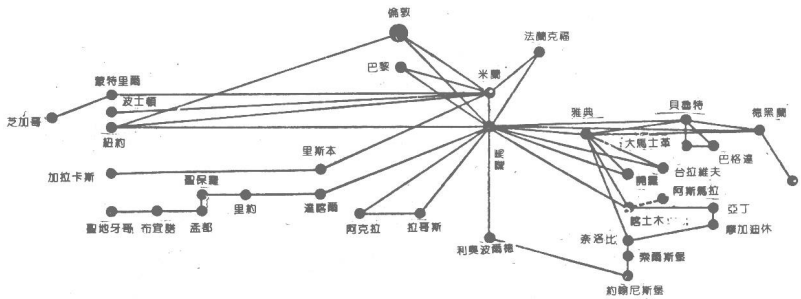


圖 4

標出這幾個市鎮的名稱，並標出布林底希 (Brindisi)，麥山雅 (Mesagne)，聖維多 (S. Vito)，納多 (Nardò)，加利波利 (Gallipoli)，馬爾葉 (Máglie) 及奧特蘭多 (Otranto)。試由你所繪的地圖描述當你由奧特蘭多出發，經拉察，加拉多尼及曼都利亞至布林底希旅行時，如果只走幹線的話，應如何轉接。地圖上那一個重要的點沒有名字？



圖 5

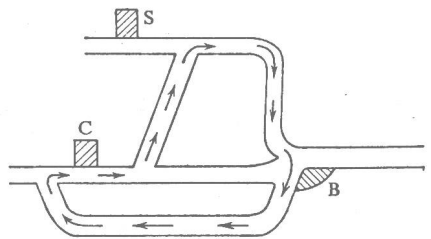


圖 6

3 圖 6 是一個街道圖的一部分，試將這地圖重新繪出，使圖中的環狀單行道 (如箭頭所示) 成爲一圓。在新地圖上標出公共汽車站 (B)，電影院 (C) 及學校 (S)，並指出由學校乘車至(a)公共汽車站，及(b)電影院的有向路線。你是否由這兩地圖都可同樣容易地找出答案

？你不能用那一類的指引來指示路線？

4. 繪製你所就讀的學校的拓樸略圖。在這地圖上畫出由學校正門至校長辦公室的路線，並列出一個方向指示表，使得任何一位初次到校的人都明白要怎樣走才能找到校長。

5. 圖 7 是一個道路系統的拓樸地圖，圖中共有多少(a)十字路口，(b)三叉路口？如果以 p 表示的那一段路實際上是由西南至東北向的一條直路，以 q 表示的是一段大約是南北向的彎路，而以 r 表示的是東西向的直路，你想這地圖實際上應該是甚麼樣子的？試繪出你想像中的地圖。

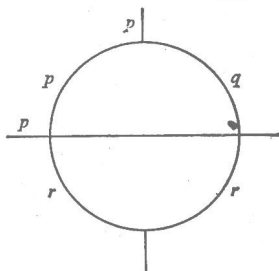


圖 7

6. 一種表示家族中成員之間的關係的略圖被稱為家族樹狀圖。試在百科全書中找出一個家族樹狀圖，或許你自己畫一個也可以。試盡可能回答下列的問題：

(a) 試寫出兩個序對 (x, y) 使其關係為「 y 是 x 的祖父」。

(b) 每個父親在他的長子出生時，年齡各是幾歲？

(c) 有多少對 (x, y) 的關係是「為表兄弟姊妹」？

(d) 這樹狀圖能不能使你對某一特定年份中，有那些人是仍然生存這問題一目了然？

(e) 如果不能，你能否提供一個處理這問題的有效方法？

(f) 請你的生物老師拿一個遺傳圖給你看。這是不是一個家族樹狀圖？家族樹狀圖是不是一個拓樸圖形？

7. 設

$$A = \{(x, y): x > 0\};$$

$$B = \{(x, y): y > 0\};$$

$$C = \{(x, y): x + y < 4\};$$

$$D = \{(x, y): x + y > 4\}.$$

試繪一圖，並在表示 $A \cap B \cap D$ 的區域畫上斜線，求三整數 p, q, r 使 (p, q) 為 $A \cap B \cap C$ 中之點且 (r, q) 為 $A \cap B \cap D$ 中之點。如果由各不同角度對你的方格紙拍照， (p, q) 和 (r, q) 看起來是否仍

然屬於原來的集合？你能不能將你的紙扭曲（不能撕開，也不能將兩點黏貼在一起）使 (p, q) 是 $A \cap B \cap D$ 上的點？

8. 在圖 8 中， A, B, C, D 及 E 表示燈泡， p, q, r 表示開關，而 S 為一雙向開關。試對下列各情形，寫出（如果可能的話）各開關的情況：

- (a) A, B 亮， C, D 及 E 不亮；
- (b) C, E 及 B 亮， A, D 不亮；
- (c) A, B, C 及 D 亮， E 不亮。

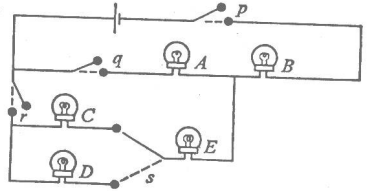


圖 8

其中有沒有一些開關是多餘的？如果把電線彎成別的形狀，會不會使答案改變？試討論如何用由二元符號（例如 0 與 1）組成的簡單密碼表出那些燈和開關是開着的，那些是關着的。

2. 拓樸不變性

到目前為止，大家一定都已注意到由一個拓樸地圖中，可以找出或不可以找出答案的是那些類別的問題了。下列那些是「拓樸問題」？

- (a) 有多遠？
- (b) 在線上的那兩點之間？
- (c) 角度為何？
- (d) 有多少線通過這點？
- (e) 向北或向南？（仔細想一想！）

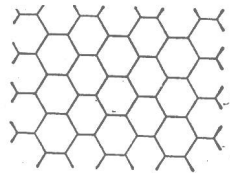


圖 9

圖 9 所示為一塊鐵絲網。假如在不可剪開或接合的限制之下，我們隨意地把它扭轉和彎曲。最後它的形狀可能會完全改觀，甚至根本不是平的，但無論如何，你總可以舉出一些不管在原来的狀況或扭曲後都仍然成立的敘述。試討論可以有那些敘述滿足這性質，也想想看有那些性質是原來具有的，而扭曲後却不成立的。

我們把扭曲和拉長（但不包括切開和接合）稱為拓樸變換（*topological transformations*）。經過拓樸變換後仍然成立的性質稱

爲不變性 (*invariant*) (因爲它們沒有改變) 。

前面所舉的地下鐵路圖是由街道圖中的鐵路路線經過一個拓樸變換所得到的結果。我們可由它看出在下車以前要先經過多少站，因爲在路線中各站的次序是不變的，但我們不能由它看出來到下一站的距離是多少，因爲站與站間的距離並不是不變的。

下面所列出的是一些我們曾經遇到過的不變的性質，我們把變換後的點或線，也就是由原來的點或線經過扭曲或拉長後所變成的點或線用加上一撇的英文字母來表示。

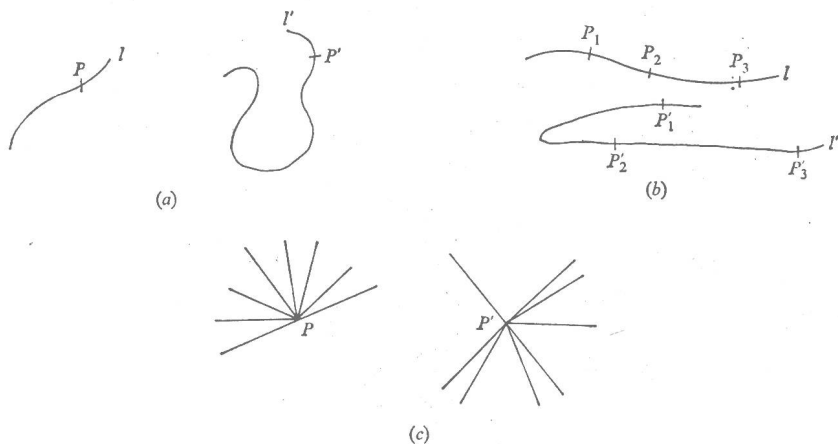


圖 10

(a) 若點 p 在線 l 上，則點 p' 在線 l' 上。

(b) 若 P_1, P_2, P_3, \dots 依次在線 l 上，則 P'_1, P'_2, P'_3, \dots 依次在線 l' 上。

(c) 若有 n 條半線集中於 P 點，則亦有 n 條半線集中於 P' 點。(若共有 n 條路線可由 P 點出發，則稱 n 條半線集中於 P 點，例如在圖 10 (c) 中，即有 8 條半線集中於 P 點。) 其中有兩種情形需要特別提出來討論。一端點 P 經拓樸變換後變成一端點 P' ；所謂端點是指只有一半線由這點出發。一個角點，比方說正方形的一頂點，在經過拓樸

變換後可能變平滑了而成爲曲線上的一點；不過這時我們仍可把它看成是有兩半線由它出發。

3. 拓樸變換

讓我們稍爲仔細地考慮我們曾經好幾次提到的一個要求，就是這「橡膠膜」不能被撕開和黏貼在一起的問題。

如果我們允許這橡膠膜被撕開的話，那麼在同一線上的兩點在被撕開後就會分在兩條不同的線上，這事實就違背了拓樸地圖所應具有的性質。在某些較高深的研究中，我們會允許這橡膠膜被撕開，並且重新黏貼在一起，但我們現在只討論在這不能撕開的原則下的情形，這「不能撕開」的另一種說法就是這變換是連續（*continuous*）的。當街道圖中的火車 P 向着 A 站前進時，它經過變換後的 P' 也在變換後的地圖中向着 A' 站前進，而且一起到達。

橡膠膜之所以不能摺疊和黏貼在一起，是因爲這樣會把原來的兩點變成變換後圖形中的一點，那麼不在某一線上的一點經變換後就會在這線的像上。比方說 OC 站經變換後可在由 P 站至 H 站的鐵路上，所以我們一定要把這種情形除掉。

習題 B

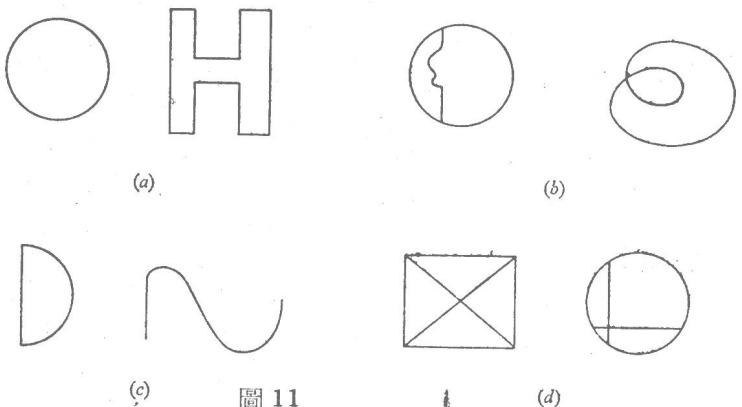


圖 11

1 指出圖 11 的各對圖形中，有那些前面的曲線可由拓樸變換映成後面的曲線。

2 圖 12 的各對圖案中，那些是等價的（即由其中一個可經拓樸變換映成另一個）？如果你認為那一對是等價的，請將後面的一圖案抄下來，並在其上標出由 A 經變換後的像 A' 的可能位置。如果 A' 的可能位置不止一個，請把全部都標出來。

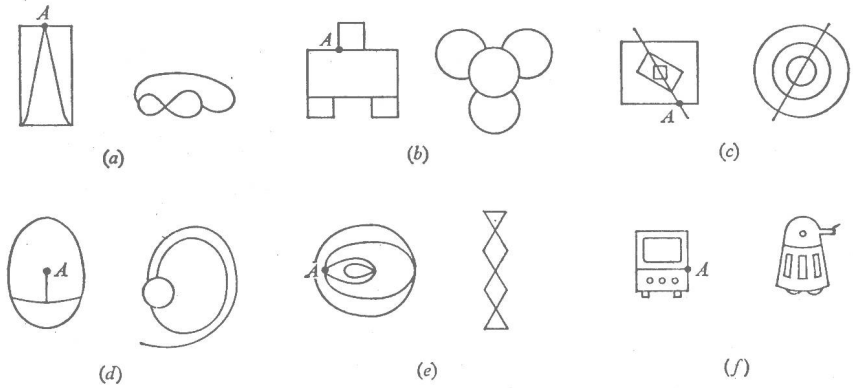


圖 12

3 指出圖 13 的各曲線中，有那些是互相等價的。

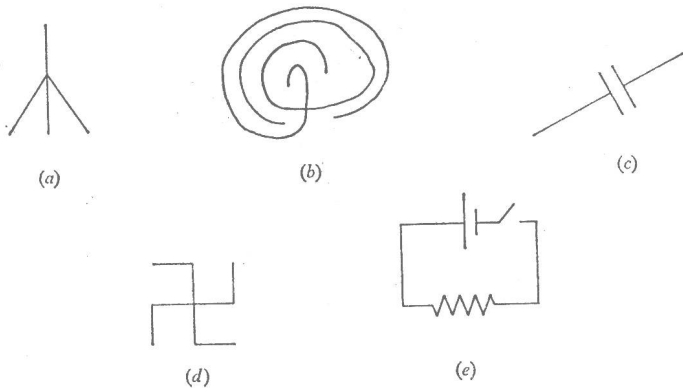


圖 13

4. 你能把一隻甲蟲轉換成甚麼東西？甲蟲的原圖和兩種變換後圖形的例子如圖 14 所示。試再找出一些例子。

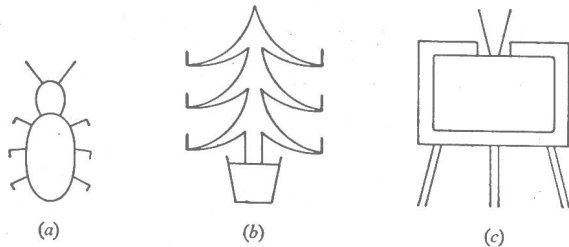


圖 14

5. 簡單封閉曲線 (Simple closed curves)

可由拓樸變換映成一圓的圖形稱爲一簡單封閉曲線。

下列何者爲簡單封閉曲線：

- (a) 等邊三角形；
- (b) 英文字母 L ；
- (c) 六邊形；
- (d) 代表無窮大的符號（如果不知道它是甚麼，請去查一下）；
- (e) 英文字母 P ？

6. 在數學的語言中，要定義出內部和外部並不是一件很容易的事。圖 15 顯示了一簡單封閉曲線及三點 X ， Y 和 Z ，其中那兩點在曲線的內部？試討論之以給出內部的定義，並找出一個有效的判別方法。

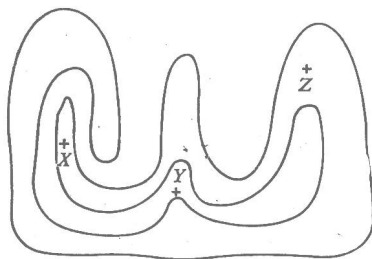


圖 15