

数学模型及其在飞机设计 与制造中的应用译文集 (二)



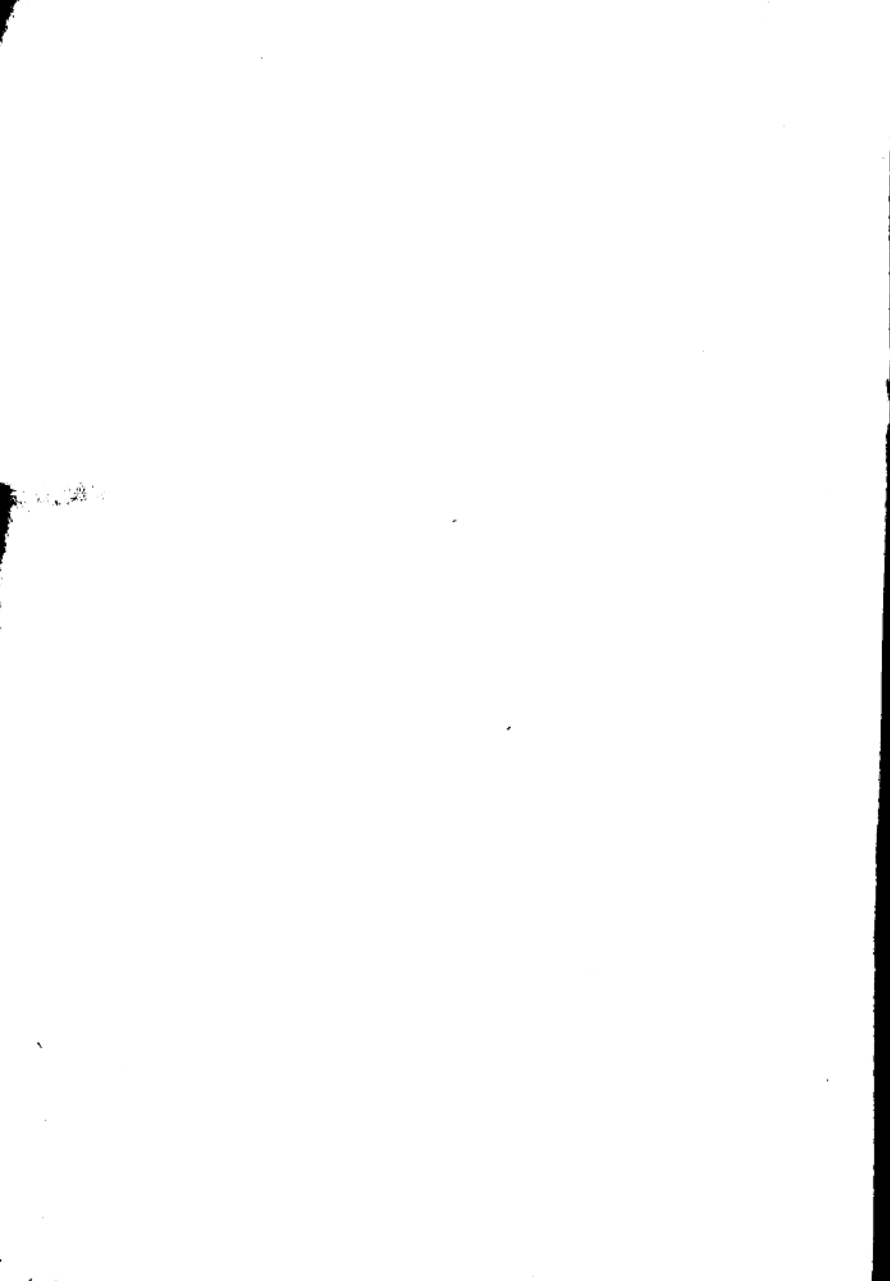
国 外 航 空 编 辑 部

1 9 7 5 年 1 2 月

数学模型及其在飞机设计
与制造中的应用译文集
(二)

目 录

用计算机确定飞机外形.....	3
曲线的圆弧逼近法.....	12
曲线与曲面的合成及其光顺拟合理论.....	17
CONSURF (二次曲面程序).....	25



用计算机确定飞机外形

摘 要

用电子计算机确定飞机部件外形的二次曲线法业已创立。该方法可根据与作图法相同的初步草图和输入数据,迅速计算出描述完整三维表面的纵向基准线和横向外形。输出数据广泛用于制造实体模型和设计构件。

本文介绍了这种方法的数学基础,并系统地阐述了产生三维表面的方法,亦讨论了设计最佳化,构件设计及补充数据的应用。

附录给出了计算机通用程序和一个典型设计实例。

随着飞机尺寸的不断增大,确定部件外形的二次曲线作图法变得越来越不方便。现代飞机的特点是,在很小的空间内,安装构件的数量增多,故要求更精确地定义边界。同时,由于工时费用提高,故在制造过程中应尽量减少手工劳动。

鉴于上述特点,采用不绘制全尺寸打样图而直接提供任意位置和区间的精确数学座标的方法,是颇有利的。而作为近代的重要工程工具的电子计算机可提供这种可能性。

外形定义

三维外形表面可用投影于三个互相垂直的平面内的线段来定义。通常,用侧视图和水平视图定义纵向线或基准线,用垂直于纵轴的第三个平面定义与基准线相交的横截面外形或外形。图1和图2定义的那些外形线是目前实际中广泛采用的。

由于这些线的变率都是一次的,或是直线函数,所以用二次方程定义这些线,可以确保三维表面的连续性。

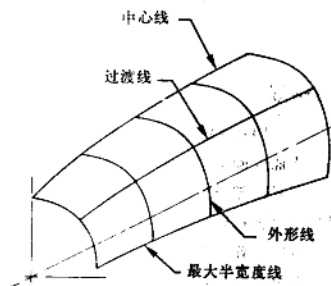


图1 三维表面

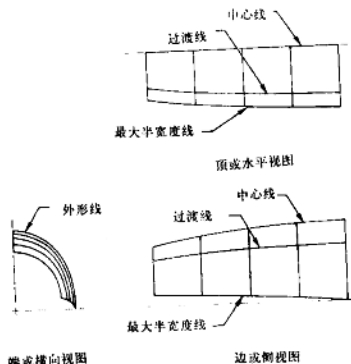


图2 表面的三面图

方程推导

圆锥曲线的二次方程是:

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0 \quad (1)$$

用 F' 除方程(1), 再减 1, 得

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = -1 \quad (2)$$

$$A = \frac{A'}{F'}, B = \frac{B'}{F'}, \dots,$$

对方程(2)微分, 并合并同类项, 可得曲线上任一点的斜率:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E} \quad (3)$$

对于一条特定的曲线, 为了确定方程(2)的系数, 需要五项输入数据。它们是曲线两端点的 X , Y 座标值及其斜率 (dy/dx) 和中间一点 (过渡点 Shoulder point) 的 X , Y 座标值, (见图 3)。将这三个点的 X , Y 座标值代入方程(2), 将端点斜率及其 X , Y 值代入方程(3), 就得到有五个未知数的五个线性方程。联立这五个方程, 即可求出由上述输入数据描述的曲线方程的系数。此方程可用来按 X , Y 增量计算出绘制曲线所需的座标值。

输入数据与以前作图法用的数据相同。

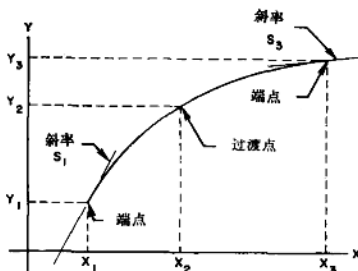


图 3 确定输入数据

三维表面的构成

为了确定一个三维表面, 把基准线或纵向线在侧视图和水平视图上的投影作为输入数据。因此, 三维方向上的每一条线, 均可用两条二次曲线确定。图 1 所示的表面, 要用六个二次方程确定其基准线。直线是二次曲线的极限形式, 需要时, 可以计算。

输入数据可按缩比草图确定。图上的曲线可借助目视达到光滑, 亦可按参考文献[1]中的作图法迅速画出。曲线上的过渡点可取在任一方便位置, 多数情况下, 往往取在表面内侧避开某一极限处, 如取在发动机罩内的螺旋桨调节器上。若为负值, 应注意输入负的斜率。

计算六个二次曲线方程, 获得确定表面基准线的座标值, 作为确定所求外形方程的输入数据。由于所定义的最大半宽度线 and 对称表面的中心线是表面的极限边界, 这些位置上的外形斜率一般都平行于一个轴, 故斜率为零或为无穷大。为保证表面的连续性, 外形过渡点必须取在过渡线 (Shoulder line) 上。

较大的构件外形如发动机罩, 通常由四块曲面组成, 每两块曲面有一条公共中心线和最大半宽度线。因而, 每一封闭外形由四段组成, 连接点处的座标值和斜率相等。

计算机程序的编制

附录 A 中列出的通用计算机程序是按 IBM-360 系列编制的。为了求出方程的五个系数, 采用矩阵法解五个联立方程, 然后, 用方程计算用于绘图, 构件设计和其它输入数据的座标值。

由于 X 和 Y 的平方项的小系数交互影响, 故要求精度提高一倍。计算中, 为避免 X , Y 值趋于零, 平移曲线 (先加 100 随后再减去)。对负值趋于 -100 的飞机, 平移值还应加大。

附录 B 列出并定义了实例的输入和输出数据, 系数确定之后, 再用三个输入点的 X 、 Y 座标计算方程。若所得值近于 -1, 则说明计算出的系数是正确的。

沿 X 、 Y 轴取等增量, 代入方程计算, 因为大多数外形的一端趋于垂直 Y 轴, 故很长的一段不能用 X 增量计算, 而必须用 Y 增量计算。 X 、 Y 增量均从点 1 (x_1 , y_1) 处开始, 如点 1 处值大于点 3 处值, 则增量是负值。

每一个增量经计算得到两个输出值, 因为任一圆锥曲线与一直线相交于两点 (切线除外)。与输入数据比较, 就能容易地判别出数据的无效列。按二次曲线计算的直线, 两数据列是相等的。

当输入的斜率值为无穷大时, 用形式所允许的斜率最大值 (不考虑符号), 就能得到足够的精度。目前, 专用程序主要用于外形, 其一端斜率为 dy/dx , 而另一端斜率为 dx/dy , 两端点斜率输入为零。

由几个小段组成的复合表面

通常, 飞机的主要部件 (如中部为直线段的机身) 的外形基准线, 其全长不能用一个二次方程来定义。若分段数最少, 可以获得具有一定连续性的, 由二次方程定义的复合表面, 其相连的两段二次曲线在接点处的斜率必须相等。保证使接点处曲率 (为基本方程的一阶和二阶导数的函数) 相等的方法已经建立。这样可防止任何不连续现象 (见参考文献 2)。每一段外形根据要求及其与内部构件的间隙而定。因此, 每一段都具有独立的曲线。由于外形开始是按实践经验确定的初步草图确定的, 只要开始就保持曲线的光滑, 即使不考虑曲率匹配亦能得到满意的结果。这样, 就不必将表面的所有基准线用相同的横截面切割。

主要构件的每一个封闭外形, 要用四条以上的线段定义, 比如与非二次曲线定义的机身相匹配的机头就是这样。对辅助构件, 如进气道或整流包皮的设计, 要求外形段的端点与相连构件间光滑过渡。通常, 在上述情况下, 每一外形段端点的斜率与座标轴不平行,

等于零或无穷大。从一段外形向另一段外形过渡时,沿纵向要注意使斜率不变,或缓慢、均匀地变化。

外形初步确定后的更改

基准线和外形座标确定以后,通常以大区间、小比例画出这些点,以满足外形设计要求。对重要的内部构件,其间隙按自身座标计算,多数情况下,需要更改。为达到所要求结果,通常需要移动过渡点或改变基准线的斜率。输入数据的修正,与其有关的基准线的座标值需要重新计算,之后,更改外形输入数据,并重新计算外形座标值。这样得到的结果,比作图法快得多。用这种方法对多变量进行计算和比较,最后得到最佳设计。

构件设计

部件精确的外形确定以后,按照计算的座标值设计结构件和操纵件。对某些特殊部位,如铰链位置或纵向隔框等,需要特殊的外形数据。对某些小的区域,如铰链位置和进气道,需要用非常小的增量定义,其外形座标沿纵向小区间内,用 X 、 Y 向小增量计算。附加隔框凸缘外形易于计算,这就简化了模具的制造。

对于纵向隔框类另件,需要纵切面。沿纵向以适当间隔,用 X 、 Y 向增量计算外形,求出所求纵切面的座标。斜框的外形也能确定,即首先计算斜平面与纵向位置的交点,然后,计算交点处横切面外形。用横切面外形的 X 、 Y 向增量计算交点处斜平面外形座标。实例见附录B。

斜率公式的应用

凸缘斜角或与其它部件的交点,常要求在一特定位置上的斜率值。计算机输出包含有建立特定曲线方程的系数。若将这些系数加上所求点的 X 、 Y 座标值代入方程(3),即可求出该点的斜率值。

计算机应用效果

计算机可快速计算二次曲线座标值,计算精确度为0.0381毫米。用小增量可使任一尺寸范围达到这个精度。用数学座标设计的构件要比用作图法为好,因为它的协调精度高。一种带微调的 X 、 Y 绘图机能高精度地绘制样机及构件的外形,因能用小增量确定座标值,所以,最后绘出的图形不会出现样条曲线的摆动。在以后的设计阶段,若要更精确地定义表面,就能很快地确定输入数据并计算出座标值。

在初步设计阶段,通过对各种变量的计算和比较,获得最佳方案。在绘制1:1的打样图以前,就可精确地验证座标数据、间隙、内部容积及其它重要因素。

结 论

1. 二次方程可用来定义飞机外形的二维曲线,三维曲线用投影于互相垂直的两平面内的两条曲线来定义。

2. 确定一条特定的二次曲线需要5个输入数据,即两端点和过渡点的 X 、 Y 座标值,

及两端点斜率。

3. 求得的基准线或纵向线的座标值作为确定横截面外形的输入数据。

4. 主要部件的基准线可由几条二次曲线组成，相连二次曲线在公共点上的斜率值相等。

5. 特定外形数据，根据预先计算出的基准线来确定，座标值用辅助切平面或小区间求得。

6. 使用计算机的优点是，节省时间、精度高、设计最佳和能精确地提供构件设计用的数学数据。


```

X = X + XI
GO TO (48,49), N1
48 IF (X3-X) 70,70,52
49 IF (X-X3) 70,70,52
70 IF (ITYP) 71,30,71
71 X1Y= X1 - 100
Y1Y= Y1 - 100
X2Y= X2 - 100
Y2Y= Y2 - 100
X3Y= X3 - 100
Y3Y= Y3 - 100
WRITE(3,8) X1Y,Y1Y,B1,X2Y,Y2Y,X3Y,Y3Y,B3,A,B,C,D,E
IF (YI) 75,53,46
45 N1 = 1
GO TO 55
46 N1 = 2
55 Y = Y1 + YI
43 G=C*Y**2+B*Y+1.0
H=B*Y+D
IF(A) B1,B2,B1
B2 XA=-C/H

```

```

XB=0.0
GO TO 90
51 XA=(-H+SQRT(ABS(H**2-4.0*A*C)))/(2.0*A)
XB=(-H-SQRT(ABS(H**2-4.0*A*C)))/(2.0*A)
90 YX = Y - 100
XAX = XA - 100
YBX = XB - 100
YX = YX + .0005
XAX = XAX + .0005
YBX = YBX + .0005
WRITE (3,7) YX,XAX,YBX
Y = Y + YI
GO TO (44,47), N1
44 IF (Y-Y3) 30,30,43
47 IF (Y3-Y) 30,30,43
114 WRITE (3,5)
GO TO 30
53 WRITE (3,3)
GO TO 30
11 CALL EXIT
END

```

附 录 B

计算机辅助设计实例

为一个现有机身设计一个机头，根据样型要求，绘制全机初步草图。新机头的外形如图4所示。在水平投影面上，上、下过渡线是重合的。为了简单，本例仅计算下部四分之一外形。

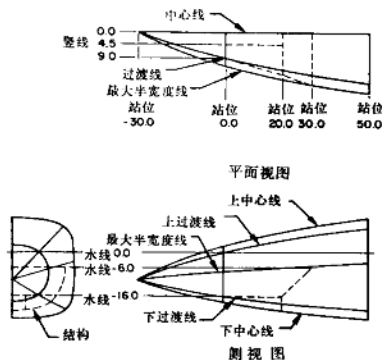


图 4 机头设计

新机头向前延伸到-30.0站位，行李舱从0.0站位到20.0站位，地板位于水线-16.0处。为了避开前轮收放机构，在20.0站位斜着向上，在30.0站位与水线-6.0相交的斜

框。为放置手提包，行李舱前部下端宽度为 457 毫米，位于竖线 4.5 处的纵向隔框用来支撑地板。

表 1 列出了基准线的输入数据，全部基准线在 -30.0 站位汇交于一点，结构设计时此处应有一适当半径。基准线上的过渡点取在对行李舱有宽度要求的 0.0 站位，行李舱的宽度要求是由过渡线在水线 -16.0 与竖线 9.00 处的过渡点来满足。为了简便，全部基准线的过渡点均取在同一站位上。为了保证与座舱切面协调，基准线后端点的位置与斜率与旧机头相同。在顶视图中，中心线是直线，且平行于飞机轴线，故不提供输入数据。表 2 列出了基准线的输出数据，表中第一部分是计算机实际输出的数据。为了简单，后面仅列出了 0.0 到 30.0 站位曲线的输出数据。

表 1——基准线输入数据

名称	X_1	Y_1	S_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3	S_3	X_1
侧视图									
最大半宽度线	-30.0	-10.0	0.114	0.0	-7.1	50.0	-4.0	0.052	5.0
下过渡线	-30.0	-10.0	-0.268	0.0	-16.0	50.0	-21.2	-0.070	5.0
下中心线	-30.0	-10.0	-0.384	0.0	-18.0	50.0	-24.1	-0.087	5.0
顶视图									
最大半宽度线	-30.0	0.0	0.577	0.0	11.9	90.0	21.5	0.140	5.0
过渡线	-30.0	0.0	0.404	0.0	9.0	50.0	18.2	0.132	5.0

表 2——基准线输出数据

最大半宽度线 侧视图									
-30.00000	-10.00000	0.11400	0.0	-7.10000	50.00000	-4.00000	0.05230		
0.000000000	-0.00007600	0.00013696	0.00229387	-0.02344400					
-1.000000									
-1.000000									
-1.000000									
—验证数				系数		输入数据			
(	-25.000,	-5.0999	-9.443)						
(	-20.000,	-4.6769	-8.912)						
(	-15.000,	-4.2239	-8.414)						
(	-10.000,	-3.7359	-7.948)						
(	-5.000,	-3.2259	-7.500)						
(	0.000,	-2.6819	-7.099)						
(	5.000,	-2.1119	-6.717)						
(	10.000,	-1.5149	-6.359)						
(	15.000,	-0.9049	-6.029)						
(	20.000,	-0.2749	-5.698)						
(	25.000,	0.3719	-5.391)						
(	30.000,	1.0259	-5.096)						
(	35.000,	1.6959	-4.819)						
(	40.000,	2.3719	-4.534)						
(	45.000,	3.0539	-4.264)						
站位			无效数据		水线				
下中心线 侧视图									
站位	水线			站位	竖线			站位	竖线
0.000	-18.000			0.000	11.901			0.000	9.000
5.000	-18.850			5.000	13.214			5.000	10.167
10.000	-19.638			10.000	14.415			10.000	11.271
15.000	-20.344			15.000	15.520			15.000	12.319
20.000	-20.999			20.000	16.544			20.000	13.312
25.000	-21.602			25.000	17.498			25.000	14.253
30.000	-22.164			30.000	18.391			30.000	15.144
最大半宽度线 顶视图									
过渡线 顶视图									

表 3 列出了 0.0 站位和行李舱地板，纵向隔框及斜框等外形的输入数据。输入数据 X 、 Y 取自表 2 中的输出数据 Y 。点 1 的斜率为 0.0，点 3 的斜率为无穷大或 999,999。为了

表3——外形输入数据

名称	X_1	Y_1	S	X_2	Y_2	X_3	Y_3	S_1	XI	YI	I
站位											
0.0	0.0	-18.0	0.0	9.0	-10.0	11.901	-7.1	999.999	2.0	2.0	01
0.0	0.0	-18.0	0.0	9.0	-10.0	11.901	-7.1	999.999	4.5		
10.0	0.0	-19.638	0.0	11.271	-17.383	14.425	-6.358	999.999	4.5	3.638	01
20.0	0.0	-20.999	0.0	13.312	-18.563	16.544	-5.648	999.999	4.5	4.999	01
25.0	0.0	-21.002	0.0	14.253	-19.088	17.498	-5.391	999.999	20.0	10.002	01
30.0	0.0	-22.104	0.0	15.144	-19.576	18.391	-5.096	999.999	20.0	16.104	01

方便, 0.0站位外形 X, Y 增量取50.8毫米。为了能求出纵向隔框的座标值, 行李舱地板及纵向隔框外形的 X 增量取114.3毫米。为了求出行李舱地板的座标值, Y 增量是由底部中心线到水线-16.0处的垂直距离而定的。斜框在25.0站位与-11.0水线相交, 在30.0站位与-6.0水线相交, 取这些交点的垂直距离为 Y 增量。为避免计算不必要的数, 计算机程序所需的 X 增量取50.8毫米。所算外形的 Y 增量为负值, 因为点1的值小于点3的值, I 值0.1是计算机计算 Y 增量的标号。表4列出了上述各量的输出数据。

表4——外形输出数据

外形——站位0.0		地板和纵向隔框	
竖线	水线	站位0.0	
2.000	-17.952	竖线	水线
4.000	-17.777	4.500	-17.705
6.000	-17.396	9.000	-15.999
8.000	-16.940		
10.000	-15.012		
水线	竖线	站位10.0	
-16.000	8.999	竖线	水线
-14.000	10.061	4.500	-19.467
-12.000	11.407	9.000	-18.597
-10.000	11.756	13.500	-14.072
-8.000	11.889	水线	竖线
		-16.000	12.557
		-12.362	13.952
		-8.724	14.361
斜隔框			
站位25.0		站位20.0	
水线	竖线	竖线	水线
-11.000	17.296	4.500	-20.859
		9.000	-20.367
		13.500	-18.404
站位30.0		水线	竖线
水线	竖线	-16.000	15.211
-6.000	15.387	-11.001	16.330
		-6.002	16.544

张金钟译自 SAE 700202

王谨、杨奇光 校

曲线的圆弧逼近法

序 言

本文论述了由曲线组成的二维图形的再构造和数据处理。

文献〔1〕中提出的,用相连的直线段描述曲线的几种方法,在保持曲线光滑性方面是不成功的。文献〔2〕中,有用圆弧光滑地连结给定各点的另一种方法。对于曲线的逼近过程,用这种方法非常简单,但有时却造成曲线不应有的摆动。

本文介绍了一种最佳型值法,以防止用圆弧逼近原始曲线时出现的摆动现象。假定所论述的曲线是以 X 的显函数(如 $y=f(x)$)给出的。

摆动原因

文献〔2〕介绍的方法是:假设每段圆弧两端点的切线与相邻段切线相同,因此,曲线的逼近外形立刻由初始的切线和型值点所确定。

每一段逼近外形相对原始曲线的偏差,逐段累积起来,其结果造成如图1所示的摆动现象。如果原始曲线的曲率是单调减少的,摆动现象就更加显著,参见图2(a)。

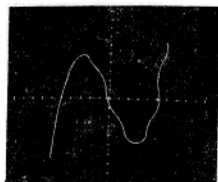


图1 圆弧逼近,逐段的偏差累积所造成的摆动

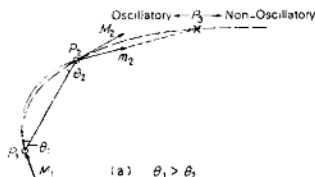


图2 用圆弧逼近曲线的型值法

设原始曲线的初始切线为 M_1 ,第一段圆弧两个端点分别为 P_1 和 P_2 ,那么,问题是怎样选择第二段圆弧的下一个端点 P_3 。假定 M_2 和 m_2 分别为原始曲线和逼近曲线在 P_2 点的切线,则后者 m_2 直接由 $\widehat{P_1P_2}$ 圆弧确定。为了简化起见,按照连接的顺序,把圆弧两端点的切线分别叫做引入切线和引出切线。按照这个观点,我们选择 P_3 的位置,使弦线 $\overline{P_2P_3}$ 转到 m_2 的外侧,这样,逼近曲线的曲率符号与原始曲线的相反,摆动开始。

如果原始曲线的曲率,如图2(b)所示的那样单调增大,我们就能很容易地选择 P_3 的位置,使弦线转到 m_2 的内侧,因为 m_2 在 M_2 的外侧。但是,必须注意,在下一个 P_3P_4 段就会发生与上述情况相似的情形。不管怎样选择 P_3 , m_3 总是向内转动太多,摆动开始。

基于这些考虑,在不引起摆动的前提下,从原始曲线上逐次选择合适的点是很困难的。

防止摆动的型值算法

现在,我们采用的方法是:把原始曲线作为逼近曲线的初始型值点链,二次型值点插于初始型值点之间。

可以证明,存在一个Q点(二次型值点)可以避免在原始曲线 P_1, P_2 点间产生摆动。图3示出Q点的最佳位置。

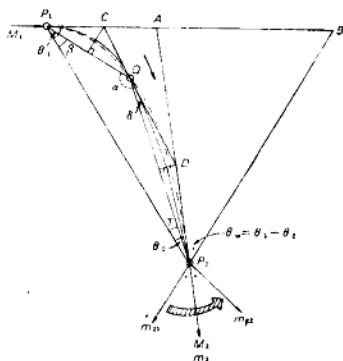


图3 二次型值点可防止曲线摆动($Q_1 > Q_2$)

首先,列出Q和 m_2 的关系式,假设原始曲线在 P_1P_2 段内至少一阶和二阶导数连续,而且是凸曲线,这些条件对于初始型值点是并非强加的特殊要求,因此, Q_1 大于 Q_2 ,且

$$0 < Q_2 < Q < -\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

($Q_2 > Q_1$ 的情况以后会提到)

图3中切线 M_1, M_2 以及 $n_1 (= \overline{P_1Q})$ 和 $n_2 (= \overline{QP_2})$ 为:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \tan Q_1 & n_1 &= \tan \beta \\ M_2 &= -\tan Q_2 & n_2 &= -\tan \gamma \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

使用符号 M_1, n_1 和 n_2, m_2 的表达式为:

$$m_2 = \frac{-2(n_2 - n_1)(n_1 n_2 + 1) + M_1 \{ (n_1 - n_2)^2 - (n_1 n_2 + 1)^2 \}}{(n_1 - n_2)^2 - (n_1 n_2 + 1)^2 + 2M_1(n_2 - n_1)(n_1 n_2 + 1)} \quad (3)$$

其中,若令 $\alpha = \angle P_1QP_2$,显然 α 在 $P_1 \angle Q \angle P_2$ 的开区间上是连续函数,根据 $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$ 得

$$\tan \alpha = -\tan(\beta + \gamma) = \frac{n_2 - n_1}{1 + n_1 n_2} \quad (4)$$

利用下列不等式: $\pi/2 < \pi - Q_1 < \alpha < \pi - Q_2 < \pi$ 可以证明 $\tan \alpha (< 0)$ 在 P_1P_2 区间内是

连续函数。(5)

上述不等式是由 Q 和 α 的关系推导出来的, 通过不等式 (5), 可以用 $\tan \alpha$ 作为变量表示 m_2 :

$$m_2 = \frac{-2 \tan \alpha + M_1 (\tan^2 \alpha - 1)}{\tan^2 \alpha - 1 + 2 M_1 \tan \alpha} \quad (6)$$

这里, 假如引进一个新的变量 $t = (\tan \alpha - 1 / \tan \alpha)$, 则得

$$m_2(t) = \frac{-2 + M_1 t}{t + 2 M_1} \quad (7)$$

不难看出, $m_2(t)$ 在下列区间内是连续的, 并且是单调增函数:

$$t_l = -M_1 + 1/M_1 < t < M_2 - 1/M_2 = t_u \quad (8)$$

上面的不等式是由 (5) 推导而来, 其中 t_l 和 t_u 是, 当 Q 分别趋于 P_1 和 P_2 时, t 的极限。假如令

$$f(t) = m_2(t) - M_2 \quad (9)$$

则可以推导出下列方程

$$\left. \begin{aligned} f(t_l) &= \lim_{t \rightarrow t_l + 0} f(t) = -(\tan Q_1 - \tan Q_2) \\ f(t_u) &= \lim_{t \rightarrow t_u - 0} f(t) = \frac{1 + M_2^2}{\tan Q_2 + \frac{1}{\tan(Q_1 - Q_2)}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 Q_2 和 $\tan(Q_1 - Q_2)$ 是正的。因此证明了, 在区间 (t_l, t_u) 内, $f(t) = 0$ 有根。也就是说, $f\{t(\alpha)\} = 0$ 的根在不等式 (5) 的范围内。

其次, 借助于图 3, 从几何意义上考虑上述过程。为了考察 m_2 和 Q 间的几何关系, 令

$$Q_x = \angle DP_2 P_1,$$

那么

$$Q_x = \angle DP_2 Q + \angle QP_2 P_1 = 2\pi - Q_1 - 2\alpha \quad (11)$$

根据不等式 (5) 和 $Q_w = Q_1 - Q_2$,

得

$$-Q_w < Q_x - Q_2 < Q_w, \quad (12)$$

也就是, 当 Q 沿原始曲线从 P_1 移到 P_2 时, m_2 就从 m_{21} 转向 m_{22} , 如图 3 所示。因此, m_2 在 Q_w 和 $-Q_w$ 之间的整个范围内变化, M_2 为该区域的中心。换句话说, 引入切线在 $\pm Q_w$ 限度以内的偏差可以在该段内抵消。

如图 4 所示的逼近曲线和原始曲线 $y = -X^2$ 的切线间的夹角 $(Q_x - Q_2)$, 就是这种方法的例子。

应当注意, 当 Q 导出方程 $m_2 = M_2$ 时, Q 点不是逼近曲线的拐点, 因此, 不会在这弧段上产生摆动。

另一方面, 当原始曲线的曲率是单调增大 (即 $Q_1 < Q_2$) 时, m_2 就同上述情况类似地在 Q_w , $-Q_w$ 之间的整个范围内变化; 不过, 随着 Q 从 P_1 向 P_2 移动 (如图 5 所示), 则 m_2 的方位就从原始曲线的外侧向内侧变化, 从而存在满足于方程 $m_2 = M_2$ 的 Q 值, 而且,

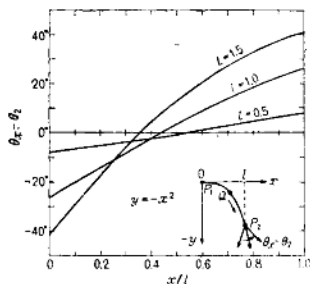


图4 原始曲线和逼近曲线($y = -x^2$)的切线间的夹角($Q_1 - Q_2$)

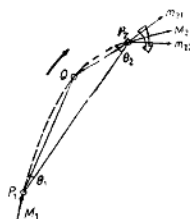


图5 防止曲线摆动的二次型值点($Q_1 < Q_2$)

这个Q在此弧段上永不引起摆动。

根据以上分析，足以证明了防止摆动现象的Q是存在的。

得到Q的方法可以简化为求方程 $f(X) = 0$ 的根。在使 $f(X_1) \cdot f(X_2) < 0$ (设 $f(X_1) < 0$, $f(X_2) > 0$) 的区间 $[X_1, X_2]$ 内，任意取一值，比如 $X' = (X_1 + X_2)/2$ ，将 X' 代入 $f(X)$ ，如果 $f(X') < 0$ ，用 X' 取代 X_1 ，得到缩小的区间 $[X', X_2]$ ，反之，如果 $f(X') > 0$ ，则得到缩小区间 $[X_1, X']$ 等等。

曲线逼近的实例

图6, 7 示出用文中所述方法逼近曲线的实例，图6是函数 $y = 0.1X(X^2 - 27)$ ，图7是函数 $y = 10\sin(\pi X/3)(\pi X/3)$ 。这里，采用最小二乘法来近似求出初始型值点。

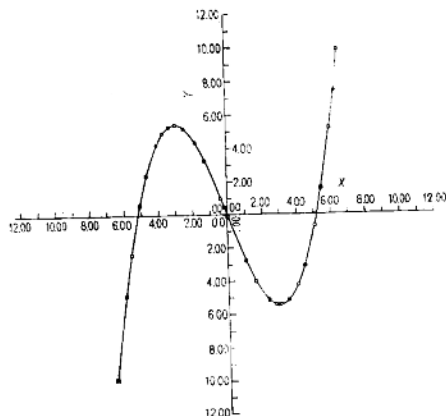


图6 用文中所述方法逼近曲线的实例 $y = 0.1 \times (x^2 - 27)$
型值点总数：29 (口，初始型值点15 ■，二次型值点14)