

解三维对流——扩散方程的一种

迭代格式

中国科学院计算中心

王汝权 焦履琼

在许多数学物理问题中，常常会遇到求解对流——扩散方程的问题。如果方程中只含对流项或只含扩散项，无论是二维问题或三维问题都有许多比较成熟的数值方法。但是，当二者同时存在，而且扩散系数很小时，这类方程的求解是十分困难的。有些常用的隐式差分格式，在二维情形是绝对稳定的，而在三维情形就是条件稳定的了〔1〕。因此，有必要研究三维问题的差分方法。对三维问题来说，更为主要的事是如何设计最经济的算法，从而大大减少计算机的存储量及计算时间。局部一维化的隐式交方向追赶法（ADI）是十分有效的，但在某些情况下是失效的〔2〕。为此，通常采用迭代型的隐式格式〔2, 3〕，它的存储量很小，而且编制程序非常简单。

一、中心隐式迭代格式

考虑下列偏微分方程

其中 a, b, c, d 可以是 x, y, u 的函数, 但本文只是考虑常系数, 且 $c, d \geq 0$ 。

设 x 方向的格网为 $\Omega_{\Delta x} = \{x_i = i\Delta x, i = 0, 1, \dots\}$, y 方向的格网为 $\Omega_{\Delta y} = \{y_j = j\Delta y, j = 0, 1, \dots, M+1\}$, $\emptyset$ 方向的格网为 $\Omega_{\Delta \emptyset} = \{\emptyset_k = k\Delta \emptyset, k = 0, 1, \dots, K\}$ 。于是, 所求解的空间网式区域为

$$\Omega_{\Delta} = \Omega_{\Delta x} \times \Omega_{\Delta y} \times \Omega_{\Delta \emptyset}$$

$$\text{令 } u_{i,j,k} = u(x_i, y_j, \emptyset_k)$$

通常对(1)中的偏导数, 用下列向前及中心差分公式 (在格点 $(i+1, j, k)$ 上写的形式):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (u_{i+1, j, k} - u_{i, j, k}) / \Delta y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (u_{i+1, j+1, k} - u_{i+1, j-1, k}) / 2\Delta y \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (u_{i+1, j+1, k} - 2u_{i+1, j, k} + u_{i+1, j-1, k}) / \Delta y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = (U_{i+1, j, k+1} - U_{i+1, j, k-1}) / (2\Delta\phi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = (U_{i+1, j, k+1} - 2U_{i+1, j, k} + U_{i+1, j, k-1}) / \Delta\phi^2$$

将(2)代入(1)并整理后, 得到 Helliwell-Lubard 迭代格式^[2]:

$$U_{i+1, j, k}^{n+1} + \frac{a\Delta x}{2\Delta y} (U_{i+1, j+1, k}^{n+1} - U_{i+1, j-1, k}^{n+1}) +$$

$$\frac{b\Delta x}{2\Delta\phi} (U_{i+1, j, k+1}^{n+1} - U_{i+1, j, k-1}^{n+1}) - \frac{C\Delta x}{\Delta y^2} (U_{i+1, j+1, k}^{n+1} -$$

$$- 2U_{i+1, j, k}^{n+1} + U_{i+1, j-1, k}^{n+1}) - \frac{d\Delta x}{\Delta\phi^2} (U_{i+1, j, k+1}^n -$$

$$3U_{i+1, j, k}^{n+1} + U_{i+1, j, k-1}^{n+1}) = U_{i, j, k} \quad (3)$$

为了分析格式(3)的迭代收敛性, 在[2]中用实利叶分析方法。

而令 $U_{i+1, j, k}^{n+1} = \lambda e^{i(m_1 j \Delta y + m_2 k \Delta\phi)}$ 及 $U_{i+1, j, k}^n =$

$e^{i(m_1 j \Delta y + m_2 k \Delta\phi)}$ 并代入(3), 若 $|\lambda| < 1$, 则迭代过程是收

的。文〔2〕中得到的收敛条件为

$$\Delta x < \frac{\Delta \phi}{|b|} \quad (4)$$

我们指出，条件(4)当 c, d 为零时是准确成立的，但一般情况下，应近似地满足下列条件。

$$|\alpha| < 1 + 2\beta + 2\delta \quad (5)$$

其中 $\alpha = b \frac{\Delta x}{\Delta \phi}$, $\beta = c \frac{\Delta x}{\Delta \phi^2}$, $\delta = d \frac{\Delta x}{\Delta \phi^2}$ 数值试验表明，

当 c, d 不太小，而 Δx 足够小时， β, δ 是一个大数。实际计算过程是受条件(5)而不是受条件(4)控制的。（例如第三节算例 I 中 $\alpha = a \frac{\Delta t}{\Delta x} = 50$, $\beta = \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 50$ ，而 $1 + 2\beta = 101$ ）。

从(4)、(5)看出，虽然迭代格式(3)收敛后为全隐式格式，因而是绝对稳定的，但由于迭代的结果，实际上又是条件稳定的。当格网非均匀性很强时，常导致迭代的发数（见算例 II）。此外，用格式(8)解抛物化的 Navier-Stokes 方程组时，会给推进步长带来极为苛刻的限制〔2〕。这是因为不适定的初值问题要。

$$\Delta x \geq c (\Delta x^2 + \Delta \phi^2) \quad (6)$$

而由于迭代收敛性的要求，必须满足条件(4)或(5)，这在有些情况下

是困难的〔2〕。

二、迎风隐式迭代格式

基于以上理由，设计一种无条件收敛的迭代格式是十分必要的。事实上，若将(8)式中的对流项 $b \frac{\partial u}{\partial \phi}$ 用一阶隐式迎风格式来代替就能做到这一点。即

$$b \frac{\partial u}{\partial \phi} = \begin{cases} b \frac{u_{i+1, j, k}^{n+1} - u_{i+1, j, k-1}^{n+1}}{\Delta \phi} & \text{当 } b \geq 0 \\ b \frac{u_{i+1, j, k+1}^n - u_{i+1, j, k}^{n+1}}{\Delta \phi} & b < 0 \end{cases} \quad (7)$$

但是(7)式对一阶偏导数的逼近只有一阶精度其截断误差太大。为此，我们建议用下列二阶精度的逼近公式：

$$b \frac{\partial u}{\partial \phi} = \begin{cases} \frac{b}{2} \left[\frac{u_{i+1, j, k}^{n+1} - u_{i+1, j, k-1}^{n+1}}{\Delta \phi} + \frac{u_{i, j, k+1}^n - u_{i, j, k}^n}{\Delta \phi} \right] & b \geq 0 \\ \frac{b}{2} \left[\frac{u_{i+1, j, k+1}^n - u_{i+1, j, k}^{n+1}}{\Delta \phi} + \frac{u_{i, j, k+1}^n - u_{i, j, k}^{n+1}}{\Delta \phi} \right] & b < 0 \end{cases} \quad (8)$$

与此同时，对固定的 $\phi = \phi_k$ ，为了使 y 方向的三对角阵的主元素占优势，对 $a \frac{\partial u}{\partial y}$ 亦可用类似的近似公式〔4〕：

$$a \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} \frac{a}{2} \left\{ \frac{U_{i+1, j, k}^{n+1} - U_{i+1, j-1, k}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{U_{i, j+1, k} - U_{i, j, k}}{\Delta y} \right\} & a \geq 0 \\ \frac{a}{2} \left\{ \frac{U_{i, j, k} - U_{i, j-1, k}}{\Delta y} + \frac{U_{i+1, j+1, k}^{n+1} - U_{i+1, j, k}^{n+1}}{\Delta y} \right\} & a < 0 \end{cases}$$

对二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ，仍采用中心差分公式(2)，考虑到(8)

和(9)，我们得到下列迎风隐式迭代格式：

$$\begin{aligned} & U_{i+1, j, k}^{n+1} + \left(\frac{a+|a|}{4} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y} \{ (U_{i+1, j, k}^{n+1} - U_{i+1, j-1, k}^{n+1}) \\ & + (U_{i, j+1, k} - U_{i, j, k}) \} + \left(\frac{a-|a|}{4} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y} \{ (U_{i, j, k} - \\ & U_{i, j-1, k}) + (U_{i+1, j, k}^{n+1} - U_{i+1, j, k}^{n+1}) \} + \left(\frac{b+|b|}{4} \right) \frac{\Delta x}{\Delta \phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{ (U_{i+1, j, k}^{n+1} - U_{i+1, j, k-1}^{n+1}) + (U_{i, j, k+1}^n - U_{i, j, k}^n) \} \\
& + \left(\frac{b-|b|}{4} \right) \frac{\Delta x}{\Delta \varphi} \{ (U_{i, j, k}^n - U_{i, j, k-1}^n) + (U_{i+1, j, k+1}^n \\
& - U_{i+1, j, k}^{n+1}) \} - \frac{\Delta x}{\Delta y^2} \left(U_{i+1, j+1, k}^{n+1} - 2U_{i+1, j, k}^{n+1} + U_{i+1, j-1, k}^{n+1} \right) \\
& - d \frac{\Delta x}{\Delta \varphi^2} \left(U_{i+1, j, k+1}^n - 2U_{i+1, j, k}^{n+1} + U_{i+1, j, k-1}^{n+1} \right) \\
& = U_{i, j, k} \quad (10)
\end{aligned}$$

$$(i=0, 1, 2, \dots, j=0, 1, \dots, \varphi+1, k=0, 1, \dots, R)$$

迭代格式(10)收敛后无条件稳定的，不难证明，格式(9)也是无条件收敛的。

三、数值计算例

为了检验我们对格式(8)和格式(9)的分析结论，用线性 Burgers 方程作了数值计算。

考虑问题 (5)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\Delta < x < 1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x)$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$u(t, 1) = 1$$

(11)

当 R_e 很大时, 在右边界产生极薄的边界层。为了提高边界层的分辨度, 我们将 [6] 中建议的座标变换,

$$x = 1 - (1 - \xi)^2 \quad (12)$$

改为下列形式

$$x = 1 - (1 - \xi)^S \quad (13)$$

其中 S 取为正数, 当 R_e 增加时, 加大 S 即能任意提高 $x = 1$ 附近边界层区域的分辨度。经过变换后, 方程 (11) 在新的坐标 (t, ξ) 中变成

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(a\xi_x - \frac{1}{R_e} \xi_{xx} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{R_e} \xi_x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$u(0, \xi) = \varphi(\xi)$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$u(t, 1) = 0$$

$$\text{其中 } \xi_x = \frac{1}{(1-\xi)^{S-1}} \quad \xi_{xx} = \frac{(S-1)}{S^2} \frac{1}{(1-\xi)^{S-1}}$$

利用迭代格式 (3) (简称 HL 格式) 和格式 (10) (简称 WJ 格式) 对下列三组参数进行了比较试算:

算例 I $a=1, R_e=10, \Delta \xi = 0.1, S=1$ (等距)。

此种情形，HL 格式及 WJ 格式皆收敛（取 $\Delta t = 0.04, 1, 5$ ）。但 $\Delta t = 5$ 时，HL 格式出现振荡解。（见表 I）。而 WJ 总是有单调的解。

算例 II $a = 1, R_0 = 100, \Delta t = 0.05, S = 4$ ，此。HL 格式可得到定常解，但 $\Delta t = 1$ ，或 5 时，非常缓慢地收敛于定常解。而 WJ 格式在任何步长下都较快地收敛到定常解。

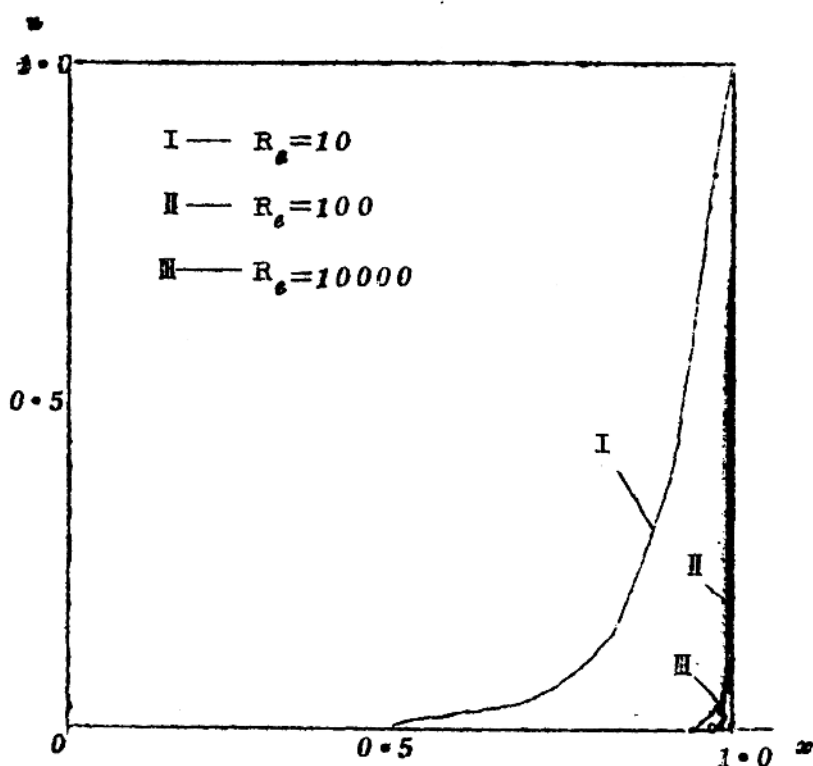
算例 III $a = 1, R_0 = 10^4, \Delta t = 0.04, S = 5$ 。此时，即使取 $\Delta t = 0.0001$ ，HL 格式也不收敛，而 WJ 格式对任何步长皆收敛。（见图）。

所有的计算都用时间，空间解的二阶精度格式。若用一阶隐式格式结论基本相同。当 R_0 很大时，在 $x = 1$ 附近的格网密度很高，迭代的收敛速度大为减慢。因此，在实际计算中应引进加速参数。

总之，数值试验与我们的分析结论是完全吻合的。格式 (10) 可应用于求解三维边界层或三维简化 Navier-Stokes 方程的问题。

表 I · 定常解比較 (算例 I, $\Delta \varepsilon = 5$)

$\varepsilon \backslash s$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
HL	0	0.0159 ⁻²	0.0145 ⁻²	0.0132 ⁻³	0.0128 ⁻²	0.0124 ⁻¹	0.0119 ⁻¹	0.0118 ⁻¹	0.0118	0.0333	1
WJ	0	0.0338 ⁻⁴	0.0135 ⁻³	0.0044 ⁻³	0.0135 ⁻²	0.0410 ⁻²	0.1233 ⁻¹	0.3702 ⁻¹	0.1111	0.3333	1
真解	0	0.7801 ⁻⁴	0.2901 ⁻³	0.8665 ⁻³	0.2434 ⁻³	0.6693 ⁻²	0.1827 ⁻¹	0.4974 ⁻¹	0.1353	0.3679	1



参 考 文 献

- (1) F. G. Blottner, AD-A013269, 1975.
- (2) W. S. Hellinwell et al, Computers and Fluids, NO. 1, 1975
- (3) S. G. Rubin et al, J-Comput. phys. NO. 2, 1972.
- (4) 王汝权, 焦履琼, 数值计算与计算机应用, 第一卷, 第一期, 1980

- [5] P. J. Roache , *Computational Fluid Dynamics* , Hermosa publishers , Albuquerque, 1972 .
- [6] Engenia kelnay DE Rivas , *J. Comput. phys.* NO. 2, 1972 .