河流动力学講義

(續　篇)

張書農編課

华东水利学院

1957.11.

河流动力学（续篇）

目录

1) 本节应列入上册第十五章因系补写故暂列於第十六章.上册第十五章的标题应改为"水庫淤积"請讀者自己改正一下。

第十六章 水庫下游的河床演变

§16—1 河床演变計称的步驟

在水庫下游，由於在建立水庫以后，水文，水力及泥沙因素都有所更改，因而下游河床也发生演变。应用近代河流动力学的方法，可以进行河床演变之計称，而預测將来河床之变化。这对於近代水利工程建設是一个很重要的问題。又如在水道建設中，常々要进行疏浚或建立治导工程在规划設計时，就可以进行河床演变之計称，以预测其效果。在其它类型的水利工程中，也常々要作河床演变的計称。河床演变計称，常々和模型試验会时进行，以便互相印証。

一般河床演变的計称，分做三个步驟：

1. 水面曲线的計称；
2. 平面流帶的繪制
3. 河床变形——冲刷或淤积——的計称。

下面先作简要的說明：

1. 水面曲线的計称：如果河床断面发生变化，则水面也跟着变化。假設河床通过疏浚或受到冲刷，则河床加深。就必须求得在相同的流量下断面改变以后的纵向水面曲线，才可以进一步地探求其变形后的水力情况，特别是水深。也就是在河床每次变形以后，必须計称一次水面曲线，作为下一步河床变形計称的根据。

2. 平面流帶的繪制：在平面上把水流分成許多平行的窄狭的帶子，就叫流帶。各条流帶的流量相同，但是水深，流速及能量不同。因为水面比較宽，深度也不一樣，所以在宽度上各部分的水力及泥沙情况，各不相同；必须这樣，才可分别計称各条流帶的水力情况，以便於在下一步驟計称輸沙情况及河床的变形。这是一个很复杂的計称工作，是苏联科学家 Н.М.Бернадский 的創造，后来又通过其他科学家的改善。在精密的河床演变計称中，才用到平面流帶。在粗略的河床演变計称中可以不用流帶；而把全部河流当做一条流帶。

3. 河床变形計称（即冲刷和淤积的計称） 在第二个

步骤中，已经求得每一时段的各流带的水力情况，如水深及平均流速，就可以进行输沙平衡的計算。也就是根据水力情况及泥沙条件計算各流带的输沙能力。因而求得河床冲刷或淤积的数量，再計算冲刷或淤积的深度，也就是河底高度及断面形态。

在每一时段中，假設流量不变，照上列的步骤計算一遍。前一时段变形后的河床形态就作为下一时段开始时的断面，因而可以求得連续各时段的河床冲淤变化。計算的工作比較烦复，可以应用各种图表，以节省时间。

除了上述的方法以外，还有列维 И.И. Леви 教授的近似方法。

§16—2 水面曲线計算

1. 一般原则

在水力学中，已经討論过不均匀的水流运动（变速流），即流量不变，而沿程断面是变化的，因而沿程的断面平均流速 V 也是变化的。用下式表示：

$$I=\frac{d}{dx}\left(\frac{V^2}{2g}\right)+\frac{V^2}{C^2R} \qquad (16-1)$$

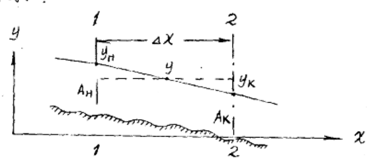


图16—1

在上式中，I＝水面比降；V＝断面平均流速；x＝纵向距离；R＝水力半径，在天然明渠，可用 $R=H_{cp}$，H_{cp}＝平均水深。

再应用下列几个关系式：

$$Q=AV$$

$$K=AC\sqrt{H_{cp}} \qquad (16-2)$$

A 是断面积，Q 是流量，K 是流量模数，则

$$I=\frac{1}{2g}\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{A^2}\right)+\frac{Q^2}{K^2} \qquad (16-3)$$

如图16—1，有1—1及2—2两断面，相距 Δx，水面差是 $y_H-y_K=\Delta y$．断面积是 A_H 及 A_K．则

$$-\Delta y = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{A_K^2} - \frac{1}{A_H^2}\right) + \frac{Q^2}{K^2}\Delta x. \qquad (16-4)$$

上式右边的第一项是由於流速改变所引起的水面变化。在一般的河道中，如果间隔 Δx 不大，断面的变化比較小，所以第一项的数值比較小，可以略去，因得

$$\Delta y = \frac{Q^2}{K^2}\Delta x 。 \qquad (16-5)$$

又設

$$\frac{\Delta x}{K^2} = F_1 \qquad (16-6)$$

则 $$\Delta y = F_1 Q^2. \qquad (16-7)$$

F_1 叫做阻力模数，它的数值因水深或水位而变。

上式是計标水面曲线常々应用的，苏联有許多科学家找出很简便的方法。

設 $F_1 = \varphi(y)$，即为 Δx 河段平均水面高度 y 的函数，和比降无关。平均水面高度

$$y = \frac{y_H + y_K}{2} = y_H - \frac{\Delta y}{2} = y_K + \frac{\Delta y}{2}. \qquad (16-8)$$

照 M.A. Чертоусов 的意见，Δx 長度的选擇，最好使得 Δy 不於 0.75 公尺。

在每一計标河段，应求 $F_1(y)$ 曲线，可用两种方法：

a) 已知流量 Q 及水面线，可利用下列关系

$$F_1 = \Delta y / Q^2,$$

作出各河段的 $F_1(y)$ 曲线。

b) 如果没有足够的資料，就应用已知的

$$A = f(y) \text{ 及 } H_{cp} = f(y)$$

求某一水位的断面积及平均水深。再用粗糙系数"n"(n 也是随着水位而变化的；如果 n 变化不大，可令 n 为常数) 求得

$$C = \frac{1}{n} H^{1/6} 。$$

和 $C = f(y)$。所以在一定的水深，可得

$$F_1 = \frac{\Delta x}{A^2 C^2 H_{cp}}, \qquad (16-9)$$

最后得到 $F_1(y)$ 曲线.

2. A.H. Рахманов 計算法

設有某河段，已知該河段的 $F_1(y)$ 曲线. 又知流量 Q 及終点水位 y_K. 先假設該段的平均水位 y，从曲线上求得 F_1，得

$$\Delta y = F_1 Q^2. \qquad (16-10)$$

再从 Δy 求 y_H. 再校核假定的平均水位 y，是否等於 $\frac{y_K + y_H}{2}$ 如果不对，再重新假定平均水位 y. 最后求得正確的

$$y_H = y_K + \Delta y. \qquad (16-11)$$

应用这个方法，逐段向上，求得水位高度，將各段水面連結起来，就是纵向水面曲线。

例 I 設河 A 的流量是 $2500\,M^3/сек$，求断面 1 到断面 5 的水面曲线。圖 16—2 及 16—3 是平面圖和纵剖面圖.

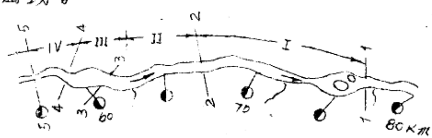
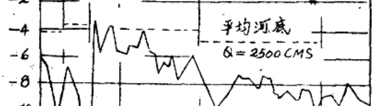


圖 16—2

已知第一段終点水位是 5.5M. 在五个断面之间，分做四个河段，I, II, III, IV. 圖 16—4. 是各断面的水位流量关系曲线.



河段		IV	III	II		I
水位	Q=4000 CMS	8.14	5.365	6.105	4.36	3.51
	Q=2500 CMS	4.618	4.023	8.835	3.263	2.743
河段長	M	1850	2240	6905		

圖 16—3

解：先在各河段作 $F_1(y)=\frac{\Delta y}{Q^2}$ 曲线，如图16—5．应用图16—4 的水位流量关系曲线，已知一定的流量Q，就可得某一段起点和终点水位高度，如 y_{K1} 及 y_{H1}，因得

$$\Delta y = y_{H1} - y_{K1}.$$

由此再计算 F_1．表6—1 是第一段的计算结果。

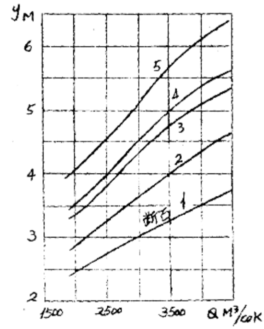


图16—4　$Q=\varphi(y)$

表6—1

$Q\ M^3/ceK$	y_H M	y_K M	y M	Δy M	F_1 ceK/M^5
2400	3.190	2.690	2.940	0.500	868.10^{-10}
2800	3.490	2.900	3.195	0.590	753.10^{-10}
3600	4.075	3.315	3.695	0.760	587.10^{-10}
4200	4.495	3.600	4.047	0.895	507.10^{-10}

用同样方法，在第二三四段作 y 与 F_1 的关系的计算，最后可以画成图16—5。以 F_1 做横标，y 为纵标，得四个河段的 $F_1(y)$ 曲线。

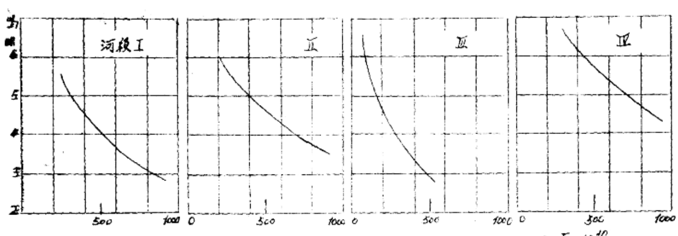


图16—5

設已知 $Q=2500\ M^3/ceK$，最下游断面（第一段）的下游水位 $y_K=5.50\ M$．首先假定第一河段的平均水位是 $y=5.58\ M$，从圖16—5，得 $F_1=257.10^{-10}$．所以

$$\Delta y=F_1\cdot Q^2=257\cdot10^{-10}\cdot2500^2=0.161\ M;$$

$$y_H=y_K+\Delta y=5.5+0.161=5.66\ M;$$

$$y=\frac{5.5+5.66}{2}=5.5805\ M.$$

和假定的数值相同。

再以5.66 M作为第二段的下游水位 y_K，从而計称第二段起点水位 y_H．以此类推，就可得各河段的水位。計称結果如表16—2．

表16—2

河段	$Q\ M^3/ceK$	y_K M	y M	F_1	Δy M	y_H M
Ⅰ	2500	5.500	5.580	257.10^{-10}	0.161	5.661
Ⅱ	2500	5.661	5.737	245.10^{-10}	0.153	5.814
Ⅲ	2500	5.814	5.848	110.10^{-10}	0.069	5.883
Ⅳ	2500	5.883	6.016	425.10^{-10}	0.266	6.149

$\boxed{\text{例Ⅱ}}$ 在A河，求相当於流量 $Q=2500\ M^3/CeK$ 的水面曲线．終点水位5.5公尺．已知条件如下：

1. 已知当 $Q=2500$ 及 $4000\ M^3/CeK$ 时的两条水面曲线．
2. 各断面的 y—A 及 y—Hcp 关係曲线．如圖16—6．

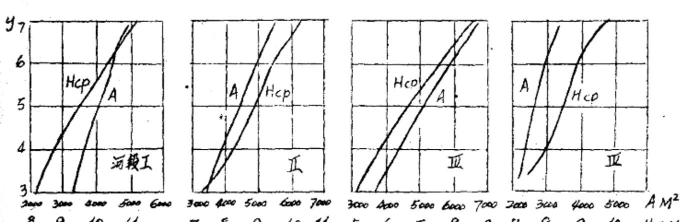


圖16—6．

解. 先求粗糙系数，再計算当 $Q=2500\ M^3/cek$ 时的C值.

在第一段，$\Delta y=y_H-y_K=3.263-2.743=0.520M$，$\Delta X=8995M$，从图16—6，得 $A=3250\ M^2$，$H_{cp}=8.12\ M$.

应用曼宁公式計算 $n=0.0399$（相当於平均水位 $y=3.003M$）用同样方法，求其它水位的n值，乃得水位与n的关系曲线，如图16—7. 再用同样方法，求其它各河段的水位与n的关系曲线. 計算结果，如表16—3.

从第一段开始，已知 $y_{KI}=5.50\ M$. 設 $\Delta y=0.140M$，或設 $y=5.57M$. 从图16-6，16—7，得相当的 A, Hcp 及 n，

$A=4280\ M^2$，$H_{cp}=9.97\ M$，$n=0.0315$.

計算 $C=46.85$. 再求

$$\Delta y=\frac{Q^2\cdot\Delta x}{A^2C^2H_{cp}}=0.142M.$$

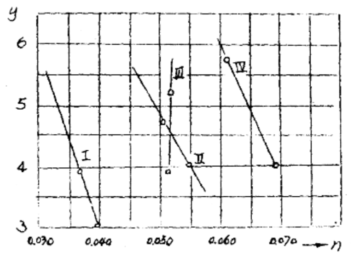


图16—7

表16—3

河段	n Δx M	Q=2500 M^3/cek								Q=4000 M^3/cek		
		y_H	y_K	y	Δy	A	Hcp	C $M^{\frac{1}{2}}/cek$	n	y	C $M^{\frac{1}{2}}/cek$	n
I	8995	3.263	2.743	3.003	0.520	3250	8.12	35.5	0.0399	3.935	38.9	0.0368
II	5905	3.835	3.263	3.549	0.572	3660	7.88	24.7	0.0571	4.733	28.4	0.0505
III	2240	4.023	3.835	3.929	0.188	4325	5.81	26.25	0.0510	5.235	26.7	0.0516
IV	1950	4.618	4.023	4.320	0.595	2425	8.20	20.6	0.0689	5.753	23.6	0.0608

所得结果和假定的数值很相近，認为满意. 因此得 $y_{HI}=5.642M$. 由此继续向上游推算. 結果如下表16—4.

表16—4

河段	I	II	III	IV
各河段的起点水位 y_H (M)	5.642	5.809	5.887	6.152

如果要推求各种流量时的水面曲线，应利用 $n(y)$ 曲线，做成各河段的 $F_1(y)$ 曲线。如果没有充分的水文测验资料，n 可以用估计的数值。

3. 巴甫洛夫基 H.H. Павловский 图解法

先作 $F_1(y)$ 曲线，如图16—8，下游水位 y_K 相当於图上的A点，作斜线，与水平线成 φ 角，和 $F_1(y)$ 曲线交於 B 点。φ 角的正切是

$$tg\,\varphi = Q^2/2 \qquad (16-12)$$

从图上可知

$$tg\,\varphi = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{F_1} = \frac{Q^2}{\Delta y}\cdot AC \qquad (16-13)$$

但在另一方面，从式（16—12）可以看出

$$\Delta y = 2AC.$$

即水面的降落等於 AC 的两倍。因此，从 B 点再作一斜线 BA_1，仍与横标成 φ 角，与纵标交於 A_1，则 A_1 即为起点水位高度 y_H。

应用此法，可以连续进行，而求各连续河段之水面，如图16—9。可以将各段的 $F_1(y)$ 曲线放在一张图上。在决定 φ 角时，要考虑纵横座标之比尺。設纵标 y 之比尺是 $1cm = aM$；而横标 F_1 之比尺是 $1cm = b$ $сек^2/м^5$，则

$$tg\,\varphi = \frac{bQ^2}{2a} \qquad (16-14)$$

为简单起见，横标可用 $F_1\times10^n$ 表示。

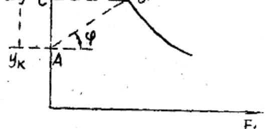


图 16—8

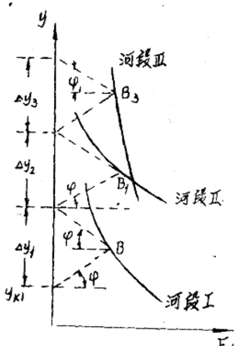


图 16—9

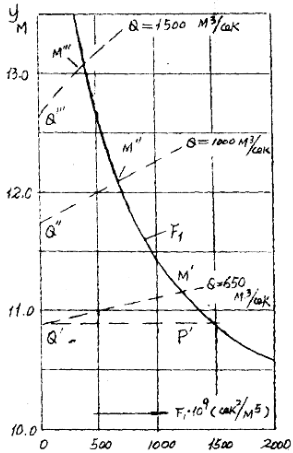


图16—10

例 如图16—10. 已知 $F_1(y)$ 曲线，横标是 $F_1\times10^9$ (сек²/M⁵). 相当於各級流量的终点水位 y_K 如下

Q	650 M³/сек	1000	1500
y_K	10.90 M	11.75	12.65

求起点水位 y_H.

解 纵标 y 的比尺是 1 cm = 0.5 M，横标 F_1 的比尺是 1 cm = $500\cdot10^{-9}$ сек²/M⁵. 所以当 Q = 650 时，得

$$tg\,\varphi=\frac{500\cdot10^{-9}(650)^2}{2\cdot0.5}=0.211.$$

在纵标上求 O′点（y_K = 10.90）. 作直线 O′M′，量 M′P′ = 0.26 M. 所以 $\Delta y=2\cdot0.26=0.52$ M. 因得起点水位.

$$y_H=y_K+\Delta y=11.42\ M.$$

在其餘流量时：

$$Q=1000 \qquad y_H=12.41\ M.$$
$$Q=1500 \qquad y_H=13.53\ M.$$

4. 歧流水面线的計算

如图16—11. $Q=Q_a+Q_b$. 水面降落高度 $\Delta y=y_H-y_K$. Δx_a 及 Δx_b 为两条歧流的長度. 两条歧流的流量模数是 K_a 和 K_b. 因为 $Q=K\sqrt{I}$，而 $Q_a=K_a\sqrt{\frac{\Delta y}{\Delta x_a}}$，$Q_b=K_b\sqrt{\frac{\Delta y}{\Delta x_b}}$，

$$\therefore\quad Q=\left(K_a+K_b\sqrt{\frac{\Delta x_a}{\Delta x_b}}\right)\sqrt{\frac{\Delta y}{\Delta x_a}},$$

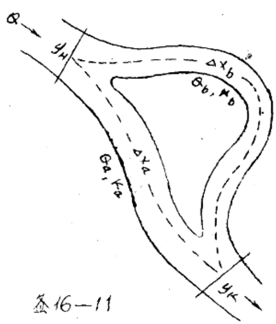


图16—11

所以总的流量模数

$$K_{общ.} = K_a + K_b\sqrt{\frac{\Delta X_a}{\Delta X_b}} \qquad (16-15)$$

和

$$F_{1\,общ.} = \Delta X_a / K^2_{общ.} \qquad (16-16)$$

所以

$$\Delta y = F_{1\,общ.} \cdot Q^2. \qquad (16-17)$$

求得 Δy，即可解决其他问题，例如要求歧流的流量分配 Q_a 及 Q_b，可将 Δy 代入，得

$$Q_a = K_a\sqrt{\frac{\Delta y}{\Delta X_a}}\ ;\ Q_b = Q - Q_a. \qquad (16-18)$$

例　设有歧流 a 和 b. $\Delta X_a = 2500\,M$，$\Delta X_b = 6000\,M$. 当低水时，$Q = 400\,M^3/сек$. 终点水位 $y_K = 1.00\,M$。第一歧流的平均水深是 $4.0\,M$，第二歧流是 $2.2\,M$. 河宽 $B_a = 150\,M$，$B_b = 80\,M$. 又知 $n = 0.028$. 求起点水位及流量 Q_a 与 Q_b.

解　应用曼宁公式，得 $C_a = 45.0$；$C_b = 40.7$. 又得 $K_a = 54000$；$K_b = 10602$. 应用上列各式，得

$$K_{общ.} = K_a + K_b\sqrt{\frac{\Delta X_a}{\Delta X_b}} = 60847\ ;$$

$$F_{1\,общ} = \Delta X_a / K^2_{общ} = 0.675 \cdot 10^{-6}\ ;$$

$$\Delta y = F_{1\,общ} \cdot Q^2 = 0.108\,M\ ;$$

$$y_H = y_K + \Delta y = 1.108\,M\ ;$$

$$Q_a = K_a\sqrt{\frac{\Delta y}{\Delta X_a}} = 354.9\ M^3/сек\ ;$$

$$Q_b = Q - Q_a = 45.1\ M^3/сек\ .$$

5. 复式河床断面的水面曲线计算

设两岸有河滩，洪水时期滩上有水流过，乃成为复式断面。如图 16—12. $Q_左$，$Q_右$ 为通过左右河滩之流量，$Q_中$ 为中间河床之流量。所以总的流量

$$Q = Q_中 + Q_左 + Q_右\ .$$

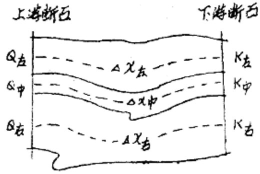


图 6—12

在相当长的河段，可以假定中间河床与河滩上的水面降

落 Δy 相等，所以

$$Q=\left(\frac{K_{中}}{\sqrt{\Delta X_{中}}}+\frac{K_{左}}{\sqrt{\Delta X_{左}}}+\frac{K_{右}}{\sqrt{\Delta X_{右}}}\right)\sqrt{\Delta y} \qquad (16-19)$$

在上式中，$\Delta X_{中}$，$\Delta X_{左}$，$\Delta X_{右}$ 是三部分的水流長度；$K_{中}$．$K_{左}$，$K_{右}$ 是三部分的流量模数．所以

$$K_{o\delta ш.}=K_{中}+K_{左}\sqrt{\frac{\Delta X_{中}}{\Delta X_{左}}}+K_{右}\sqrt{\frac{\Delta X_{中}}{\Delta X_{右}}} \qquad (16-20)$$

$$Q=K_{o\delta ш.}\sqrt{\frac{\Delta y}{\Delta X_{中}}}\text{。} \qquad (16-21)$$

所以
$$\Delta y=F_{1o\delta ш.}\,Q^2 \qquad (16-22)$$

$$F_{1o\delta ш.}=\Delta X_{中}/K^2_{o\delta ш.} \qquad (16-23)$$

例　設終点水位 $y_K=10.00\,M$，$Q=1250\,M^3/cek$．求在上游10公里的水位．已知 $\Delta X_{中}=10$ 公里，$\Delta X_{左}=8.5\,Km$，$\Delta X_{右}=12\,Km$．再求三部分的流量，即 $Q_{中}$．$Q_{左}$．$Q_{右}$．已知中间河床断面面积 $A_{中}=800\,M^2$，平均水深 $H_{中}=5\,M$．左滩断面积 $A_{左}=300\,M^2$．右滩断面积 $A_{右}=400\,M^2$．左滩平均水深 $H_{左}=1.0\,M$，右滩平均水深 $H_{右}=0.8\,M$．中槽左滩和右滩的粗糙系数是 $n_{中}=0.030$，$n_{左}=0.06$，$n_{右}=0.08$．

解　$C_{中}=43.6$，$C_{左}=16.67$，$C_{右}=12.00$；

$K_{中}=77992$，$K_{左}=5001$，$K_{右}=4507.8$；

$F_{1o\delta ш}=1305\cdot10^{-6}$；　$\Delta y=2.039\,M$，

$y_H=12.04\,M$；

$Q_{中}=1113.7\,M^3/cek$，$Q_{左}=77.5\,M^3/cek$，$Q_{右}=58.8\,M^3/cek$．

§16—3　平面流带的绘制

1. 流带的绘制

平面流带绘成以后，可以求得在平面上水流流速的分布及在垂线上的平均水流方向。設在某一河段，已知其流量及两个相距不太远的断面，即可計标在横断面上平均流速的分布．水流方向的平面位置，可以叫做平面流线．河床的平面形态有所变化，则流线也跟着变化．两相邻流线之间的部分，

叫流带．在起点和終点，两相鄰流线之间流量相等。

．設將某一河段之流量，分成m份，则除两岸水边線以外，还有($m-1$)条流线．流带的数目也是m．一般都把流量Q分成均等的部分，即各流带之流量相等，而宽度不同．設有支流加入或有分流分出，则在分水点之上下再补充或减去一部分流量．如圖16—13。

設单位宽度流量是$q=V\cdot H=\varphi(z)$．z为横向座标，垂直

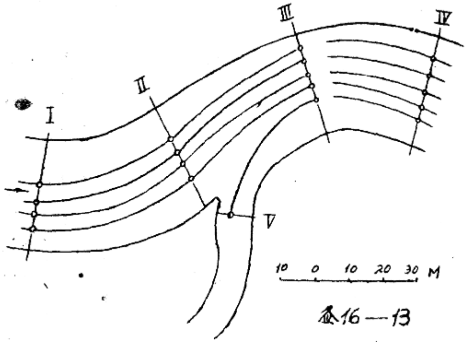


圖16—13

於水流方向．V＝垂线平均流速，H＝水深．从一个岸边开始，可以在横的方向上求流量累积曲线．以一个岸边为零点，以z为横标，Q为纵标．从$z=0$到$z=B$（B＝河宽），得总的流量．

$$Q=\int_0^B q(z)\,dz\ 。$$

設分成m流带，在每一条流带的边缘，其横标是$z_1, z_2 \cdots\cdots z_{m-1}$。$m=0$及$m=B$是两岸水边线的位置．决定了$z_1, z_2 \cdots z_{m-1}$的位置（各点位置如何决定，后面再談），就可以绘制流线。

$\boxed{例}$　如圖16—14．有一支流汇入主流，断面Ⅰ—Ⅳ都有流量测量．分成六个流带．在交会点以下，主流流量$Q=26.7\ M^3/сек$，支流的$Q=6.2\ M^3/сек$．

$\boxed{解}$　每一流带的流量

$$\delta Q=\frac{26.7}{6}=4.45\ M^3/сек\ .$$

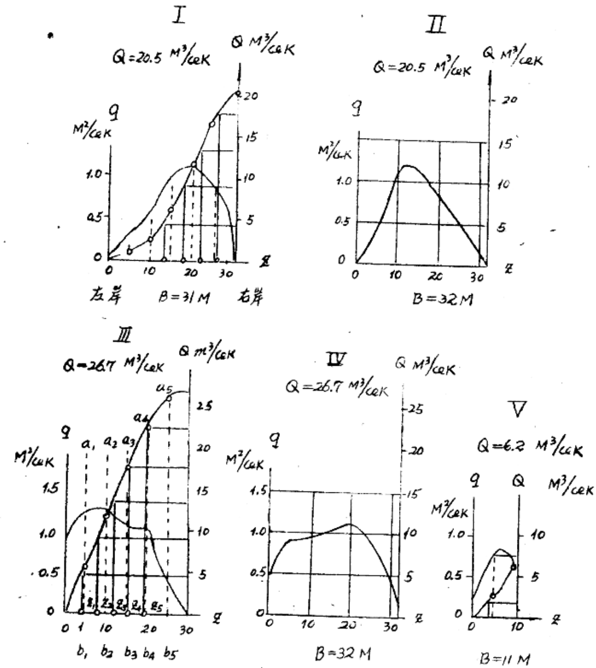


图16—14

在第Ⅲ断面上，已知单宽流量的分布 $q(z)$ 曲线，作 a_1b_1，a_2b_2-----五条垂线，其间距是随意的．把横标分成六格，并把 $q(z)$ 曲线分为六块．其 ΔQ 顺次为 5.5，6.2，5.75----- M³/сек．再作累积曲线，曲线的终点相当于 $Q=26.7$ M³/сек．再把纵标 26.7 分做六等分，作五条横线，和累积曲线相交于五点，再由此五点作垂线，与横轴相交于 z_1，z_2---- z_5．在这些点之间，流量是相等的，即 $\delta Q=4.45$ M³/сек．

在第Ⅰ及第Ⅱ断面上，$Q=20.5$ M³/сек，分成五带，其中四带的流量是 4.45 M³/сек，而右岸的一带是 2.70 M³/сек．在支流上，断面Ⅴ，分成二带，左面是 1.75 M³/сек，右面是 4.45 M³/сек，

共計 6.2 М³/сек.

如果没有测量的流量記录，而河流的彎曲不大，可以用近似的方法来計算。把横断面分成若干部分，求各部分垂线平均流速及局部面积 ΔA。以流速乘 ΔA 即等於 ΔQ。

各部分的平均流速 V 可用曼宁公式計算

$$V=\frac{\sqrt{I}}{n}H^{2/3}.$$

在上式中，H = 水深，I = 比降，n = 粗糙系数。

求得各部分的 ΔQ 以后，就可以绘制流量分布曲线，以下的步驟同前。如果河流的平面彎曲較大，上列的近似方法，就不能应用了。

2. 根据河底地形及全部流量绘制流线

假如知道流量 Q 及河底地形，可以应用 Н.М. Бернадский 法绘制流线。在河床冲变計算中，常々遇到这种情况。Бернадский 創造一套理論，以后又經过許多人的修正。

图16—15是平面流带图。垂直於流线再作横截曲线，就形成網格。Бернадский 规定"作图规律"。在一个網格中，上下游横截曲线的間距 l 与流线間距之比是 K，即 $K = 1/6$。K和水力特性有关，为了求得这个关系，Бернадский 考虑流带的纵向和横向的动力平衡条件。再应用連續方程式。

不均匀的水流运动（变速运动），可以写成下式：

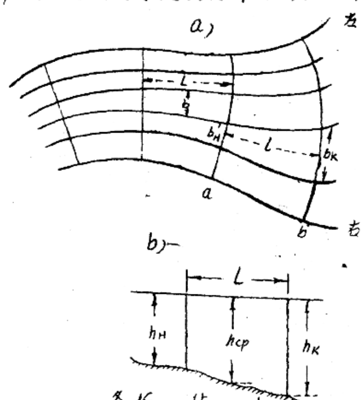


图16—15

$$I_x'=\frac{V^2}{C^2h}+\frac{d}{dx}\left(\frac{V^2}{2g}\right) \qquad (16\text{-}24)$$

x 是沿流线方向的纵向軸，I_x 是纵向水面比降，h 和 V 是

流带的平均水深及平均流速．
　　按照连续方程式

$$\delta Q = Vbh = 常数．$$

进行微分，得

$$bh\,dV + Vh\,db + Vb\,dh = 0,$$

用 Vbh 除上式，得

$$\frac{dV}{V} + \frac{db}{b} + \frac{dh}{h} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{V} = -\left(\frac{db}{b} + \frac{dh}{h}\right),$$

$$\therefore \quad \frac{1}{V}\frac{dV}{dx} = -\left(\frac{1}{b}\frac{db}{dx} + \frac{1}{h}\frac{dh}{dx}\right),$$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dx} = -V\left(\frac{1}{b}\frac{db}{dx} + \frac{1}{h}\frac{dh}{dx}\right) \qquad (16\text{-}25)$$

　　设在两条横截曲线 a 与 b 之间，如图16—15．b_{cp} 是流带的平均宽度，则

$$\frac{1}{b}\frac{db}{dx} = \frac{1}{b_{cp}}\frac{b_K - b_H}{l} = \sigma_n． \qquad (16\text{-}26)$$

b_K 为终点宽度，b_H 是起点宽度．σ_n 叫做横向曲度．同理又得垂直曲度 σ_B

$$\sigma_B = \frac{1}{h_{cp}}\frac{h_K - h_H}{l}． \qquad (16\text{-}27)$$

代入上式，得

$$I_x = \frac{V^2 n^2}{h^{4/3}} - \frac{V^2}{g}(\sigma_n + \sigma_B), \qquad (16\text{-}28)$$

n 是粗糙系数．
　　在横的方向上，由於横比降 I_z 的存在，在流带两边发生压力差．設取一水柱，底面积是 1×1，平均高度是 h，得压力差

$$P_a = h\cdot1\cdot I_z\cdot\gamma.$$

和压力差相平衡的是离心力

$$P_y = \frac{\gamma h}{g}\cdot\frac{V^2}{r}。$$

这两个力应該相等，所以

$$I_z = \frac{V^2}{gr} \qquad (16\text{-}29)$$