

数理精蘊



數理精蘊

御製數理精蘊下編卷十二

面部二

勾股

定勾股無零數法

勾股弦相求法附勾股求積

勾股形內求中垂線及容方圓等形

勾股弦和較相求法上

勾股

周髀曰。折矩以爲勾廣三。股修四。徑隅五。旣方其外。半其一矩。環而共盤。得成三四五。兩矩共長二十有五。是爲積矩。此言勾股正數之所以立法也。蓋勾股得長方之半形。故其一角必成矩。所謂直角也。面後可謂

勾股。如其一角不能成矩。則爲三角形而非勾股矣。

因勾股一角必直。故立於圓界之正一半。而自直角

所作垂線。遂成連比例三率。是以直角相對界所作

方形之積。必與兩傍二界所作兩方形之積等。見幾何原

本九卷。而勾股弦彼此相求之法於此生焉。其法所
第四節。

該有四。一勾股弦三者知其二而得其一。或知其二

而得其積。一勾股形自其直角對弦界求垂線。一勾

股形內容方圓等形。一勾股弦三者知其一。復知其

餘二者之較。或二者之和。而得其二。或知其兩較。或

兩和。或一較一和。而得其三。出勾股弦和較之法。雖雜

弦方積相求之理。較有勾股較。勾弦較。股弦較。和有

勾股和。勾弦和。股弦和。和較相疊。則又有弦與勾股

和相和。或名之曰弦和。和有弦與勾股和相較。或名

之曰弦和較。有弦與勾股較相和。或名之曰弦較和。

有弦與勾股較相較。或名之曰弦較較。又有勾與股

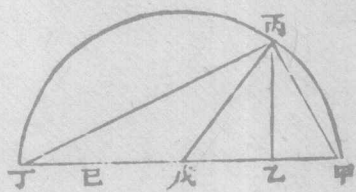
弦和相和者。或名之曰勾和和。股與勾弦和相和者。

或名之日股和。和。卽弦和也。勾與股弦和相較者。或名之日勾和較。股與勾弦較相和者。或名之日股較和。卽弦較和也。股與勾弦和相較者。或名之日股較也。勾與股弦較相較者。或名之日股較較。卽弦和較也。勾弦較相較者。或名之日股較較。卽弦和較也。此

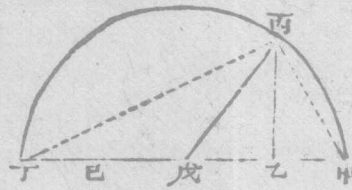
四者皆勾股之正法。理一定而數隨之者也。至若勾三股四弦五之類。倍之至於億兆而總不越此一定之分者。名曰正勾股。槩以比例推之。則三者止有其一。卽可得其二。或有積而卽得其三。界此爲數一定而法隨之者也。一一按類列題。發明如左。

定勾股弦無零數法

設如用二四八連比例三率。定勾股弦無零數。問各得幾何。



法以中率四命爲四尺爲股。首率二尺與末率八尺相減餘六尺。折半得三尺爲勾。首率二尺與末率八尺相加得十尺。折半得五尺爲弦也。如圖甲乙爲首率二尺。丙乙爲中率四尺。乙丁爲末率八尺。今以甲乙與乙丁相和。共爲甲丁十尺。而以丙乙立於甲丁線相和之乙



處。乃以甲丁折半於戊。以戊為心。甲丙

丁為界作半圓。復自丙至甲。至丁。作丙

甲丙丁二線。遂成甲丙丁勾股形。其丙

角立於圓界之半。必為直角。見幾何原本四卷第

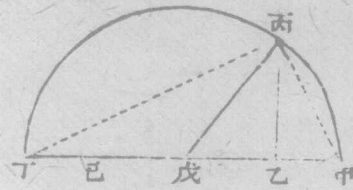
十四節。而丙乙為垂線。即將甲丙丁勾股

形分為甲乙丙丙乙丁兩勾股形。而與

原形為同式三勾股形矣。見幾何原本九卷第一節。

其甲乙與丙乙之比。同於丙乙與乙丁

之比。為連比例三率。故以中率丙乙為



股而首率甲乙

與己丁等

與末率乙丁相減

餘乙巳折半得乙戊爲勾又首率甲乙

與末率乙丁相加之甲丁折半得甲戊

戊丁二半徑與丙戊等爲弦也此法原

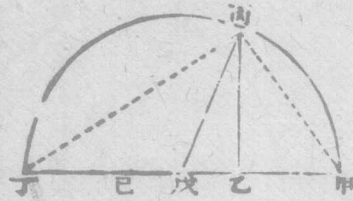
爲定勾股弦三者俱無零數之法所設

之數必彼此可以度盡始可立爲準則

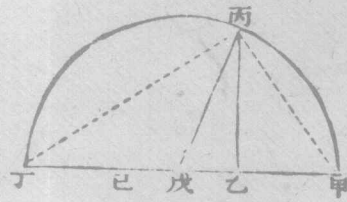
否則勾股弦三者必有一不盡之數矣

設如有四六可以度盡之兩數欲定勾股弦無零數

問各得幾何



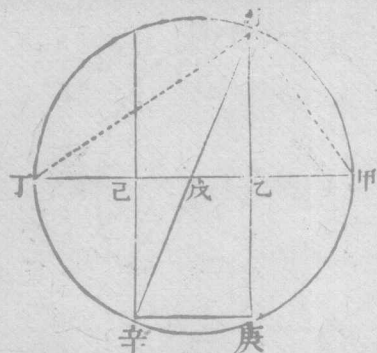
法以四尺爲首率。六尺爲中率。將中率
 六尺自乘得三十六尺。用首率四尺除
 之。得九尺爲末率。乃以中率六尺爲股。
 首率四尺與末率九尺相減餘五尺。折
 半得二尺五寸爲勾。首率四尺與末率
 九尺相加得十三尺。折半得六尺五寸
 爲弦也。如圖甲乙爲首率四尺。丙乙爲
 中率六尺。今以中率六尺自乘。用首率
 四尺除之。乃得乙丁末率九尺。爰以甲



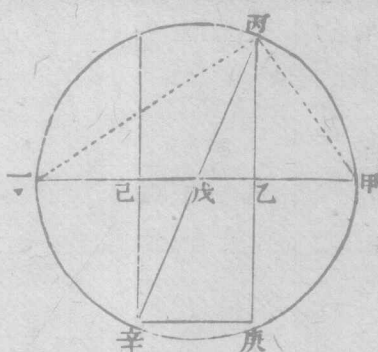
乙首率乙丁末率相和折半於戊。以戊
爲心甲丙丁爲界作半圓。復自丙至甲。
至丁作二線。則成甲丙丁直角三角形。
其丙乙中率。卽爲丙直角之垂線。故以
中率丙乙爲股。而首率甲乙與末率乙
丁相減。餘乙己。折半得乙戊爲勾。而首
率甲乙與末率乙丁相加。得甲丁。折半
得甲戊。戊丁與丙戊等爲弦也。

設如有四六九連比例三率。以中率六倍之爲股。定

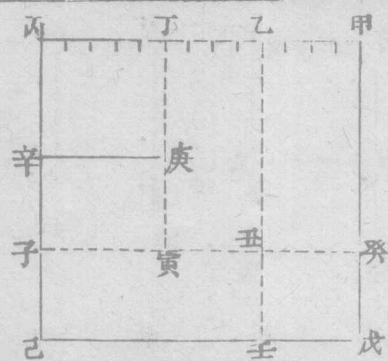
勾弦無零數。問各得幾何。



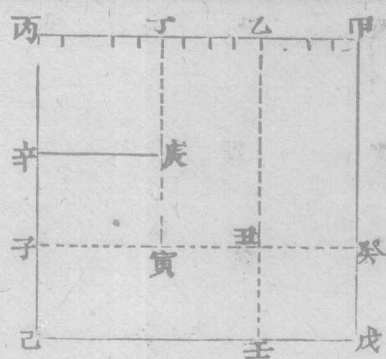
法以首率四尺與末率九尺相減。餘五尺爲勾。首率四尺與末率九尺相加。得十三尺爲弦也。如圖甲乙爲首率四尺。丙乙爲中率六尺。乙丁爲末率九尺。爰以甲乙首率與乙丁末率相和。折半於戊。以戊爲心。甲丙丁爲界。作一全圖。復自丙至甲。至丁。作二線。則成甲丙丁直角三角形。其丙乙中率卽爲丙直角之



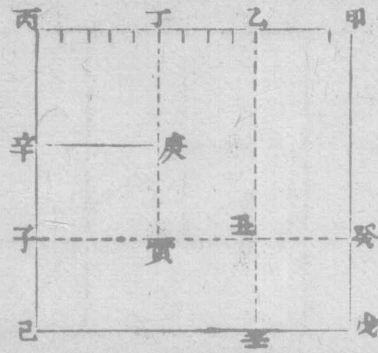
垂線。今將中率丙乙倍之。即得丙庚爲股。故以首率甲乙與己丁等與末率乙丁相減。餘乙己與庚辛等爲勾。又首率甲乙與末率乙丁相加得甲丁全徑與丙辛等爲弦也。蓋前二法用中率爲股。故以首率末率相減折半爲勾。首率末率相加折半爲弦。此法則倍中率爲股。故以首率末率相減即爲勾。首率末率相加即爲弦。而皆不用折半也。又圖甲乙爲



首率四尺。乙丙爲末率九尺。甲丙爲首
 率與末率相加之十三尺。丁丙爲首率
 與末率相減所餘之五尺。如依甲丙線
 度作甲戊己丙正方形。卽爲弦自乘之
 方。如依丁丙線度作丁庚辛丙正方形。
 卽爲勾自乘之方。今以乙丙末率亦作
 一正方形。將兩邊線引長至甲戊己丙
 正方形界。則成甲癸丑乙與丑壬己子
 二長方形。仍餘癸戊壬丑一小正方形。



又以丁庚辛兩正方形之丁庚界。引長至乙丑子丙正方形之丑子界。則又成乙丑寅丁一長方形。與前一長方形等。仍餘庚寅子辛一小長方形。合前癸戊壬丑一小正方形。則亦與前一長方形等。是此四長方形。皆爲首率與末率相乘之長方形。而與中率自乘之正方形相等矣。見算法原本二卷第三節。如以此四長方形共計之。則爲甲戊己辛庚丁一磬折形。今



甲戌己丙既爲弦自乘之一正方。而丁

庚辛丙又爲勾自乘之一正方。則兩方

相減所餘之甲戌己辛庚丁磬折形之

積。與股自乘之一正方等。見幾何原本九卷第四節

甲戌己辛庚丁磬折形。既爲四長方之

共積。則四長方之共積。亦必與股自乘

之一正方等。首率末率相乘之四長方。

既與股自乘之一正方等。則中率自乘

之四正方。亦必與股自乘之一正方等。