

台港及海外中文报刊资料专辑

基础 科学

第 1 辑

1986

书目文献出版社

617172

7252
71

姓 名 借 证 号 备 注

基础科学
第: 1986

基 础 科 学 (1)

——台港及海外中文报刊资料专辑 (1986)

北京图书馆文献信息中心剪辑

书目文献出版社出版

(北京市文津街七号)

北京新丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

787×1092毫米 1/16开本 5 印张 128 千字

1987年3月北京第1版 1987年3月北京第1次印刷

印数1—3,000册

统一书号: 13201·2 定价: 1.30元

〔内部发行〕

57世版说明

由于我国“四化”建设和祖国统一事业的发展,广大科学研究人员、文化、教育工作者以及党、政有关领导机关,需要更多地了解台湾省、港澳地区的现状和学术动态。为此,本中心编辑《台港及海外中文报刊资料专辑》,委托书目文献出版社出版。

本专辑所收的资料,系按专题选编,照原报刊版面影印。对原报刊文章的内容和词句,一般不作改动(如有改动,当予注明),仅于每期编有目次,俾读者开卷即可明了本期所收的文章,以资查阅;必要时附“编后记”,对有关问题作必要的说明。

选材以是否具有学术研究和资料情报价值为标准。对于某些出于反动政治宣传目的,蓄意捏造、歪曲或进行人身攻击性的文章,以及渲染淫秽行为的文艺作品,概不收录。但由于社会制度和意识形态不同,有些作者所持的立场、观点、见解不免与我们迥异,甚至对立,或者出现某些带有诬蔑性的词句等等,对此,我们不予置评,相信读者会予注意,能够鉴别。至于一些文中所言一九四九年以后之“我国”、“中华民国”、“中央”之类的文字,一望可知是指台湾省、国民党中央而言,不再一一注明,敬希读者阅读时注意。

为了统一装订规格,本专辑一律采取竖排版形式装订,对横排版亦按此形式处理,即封面倒装。

本专辑的编印,旨在为研究工作提供参考,限于内部发行。请各订阅单位和个人妥善管理,慎勿丢失。

北京图书馆文献信息服务中心

11
J252

目 次

数 学

科学中的一些数学模型	谢南瑞译	1
格林函数	李正雄	8
微分动力学简介	林清河	13

物理学

物理学上的对称原理	李政道讲演 林美智整理	15
对称与廿世纪的物理	杨振宁	22

化 学

气体在固体表面上的吸附和脱附	叶君棣	30
核磁共振光谱的一些近期发展	谢美明 储三阳	45

生 物

细胞的头脑……DNA的双螺旋构造	陈文盛	51
生物力学与航空工程	许盈和	55
探讨生命活动原理的陈义雄(专访)	刘昭吟	57
生命的起源新说	陈燕珍	21

地质、天文

海洋中之含汞量	西村雅吉等	62
自然界的氮循环	刘康克	69
超脱号初探哈雷慧星	李太枫 赵维国	73
探访哈雷的太空舰队		77
世纪之星——哈雷	张思晋	78

补 白

王赣骏自制“水滴力箱”，希望完成音波控制水滴	华 甯	50
------------------------	-----	----

科學中的一些數學模型



Mark Kac 原作
謝南瑞 譯

譯者按：Mark Kac 教授，數學家暨理論物理學家，尤其對機率論與統計物理學之發展具有重大貢獻。他於 1914 年生於波蘭，1937 年於Lwów大學獲得博士學位，先後執教於美國康乃爾、洛克菲勒、南加大等學校。除了百餘篇學術專著（其中有許多是現今重要理論的起始點）外，他也寫一些較“通俗”的文章與書籍，本文即其中之一。本文刊於 Science（1969 年 11 月份），Kac 教授在文中舉出四個科學中之數學模式——都和機率有關——以闡明模式一詞的不同含意。在此文中，我們可以欣賞“並不高深”的機率理論如何簡潔地描述一實驗現象或明示一理論之精微處。因為時間倉促與譯者淺陋，對若干非數學名詞之中譯或許未能與已知者一致，尚請讀者原諒。又，文中有引用一些西洋格言或詩句，皆由譯者予以“中國化”。

人們常在不同的場合引用（或誤用）「模式」一詞。事實上，此詞有不同之含意，而其含義也會隨時間之變遷而有所改變。例如，於今我們通常不認為原子理論為一模式；但在一百多年前，它僅是解釋化學反應之Dalton定律的一個可行「模式」而已。類似地，「基因假說」在本世紀早期也只是解釋Mendel遺傳律的一個模式。當然，我們都知道，日後的科學進展，使得原子與基因都成為「實體」，因而將兩者由昔日之模式提昇為今日之普遍接受的理論（註1；按，此為原文之註）。

並沒有幾個模式是如此良好，或云如此幸運。以下我們所討論的幾個，雖不那麼耀眼但仍有其獨特的趣味。由於篇幅所限，我只能簡略地討論它們；主要是用以闡示一些使模式介入科學思考的方法。自然地，我所選擇的模式，都是我瞭解、熟悉且喜愛的。

我只選取數學模式；亦即，可用數學語言描述且可依演繹方式來討論者。數學模式將原先複雜之問題或現象大大地簡化；Fourier有云：“上帝不熱衷於解難題，祂創造了數學家（也和祂一樣）”。我們可將模式粗分成兩種類型：(1)描述的——設計來討論已被觀察到之現象者，(2)理念的（想像的）——用來闡明一個理論之精微與困難處者。我們毋須將此兩型作一截然畫分（無此必要，且亦不容易），但此兩型之極端却不難對此認知。

描述型模式對一個實作科學家言特別有意思，而它又可分成兩類，我稱之為普遍類與個案類。

舉例言之，當我們研究行星運動時，不考慮諸行星間彼此之吸引力，而只認為運動全由太陽之重力作用所引起，則此為行星系之普遍類模型。其所以為普遍，乃因我們利用了引力之反平方律，而此定律除了須依相對論作一微小修正外，它是正確的。但因我們已忽略了行星間彼此的作用力，故它只能說是個模式。然而，這是個優秀的（且是著名的）模式，用它可以說明Kepler三大定律。

血紅素的模式

首先討論個案類模式。當我們所研究之現象只有部分已知時，則常利用個案模式來定式一個「實作假說」。我們以血紅素分子的帶氧數作為一例。

設一個分子由 n 個小單位環狀排列而成（若為血紅素分子，則 $n=4$ ）；而每個小單位，或帶有或不帶一標誌（就血紅素言，有標誌即表示帶氧）。設一小單位帶與不帶標誌之機率各為 $p(+1)$ 與 $p(-1)$ ，（ $p(-1) = 1 - p(+1)$ ）。比值

$$\alpha = \frac{p(+1)}{p(-1)}$$

即可作為「氧」濃度的一個度量。

我們可採用一個最簡單之假設： n 個小單位獨立地帶有標誌或不帶標誌。此時，我們可以計算得每個分子之帶標誌小單位的平均數目是

$$f = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (\text{Michaelis 方程})。$$

我們以 α 為變數而描繪出 f 的圖形（圖1）；但所得圖形不吻合實驗數據——後者呈現出S形反曲（圖2）。

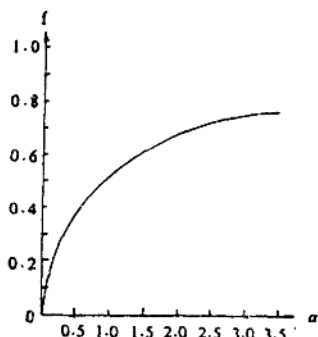


圖1 依Michaelis方程所描繪出的帶氧血紅素之 f - α 曲線。

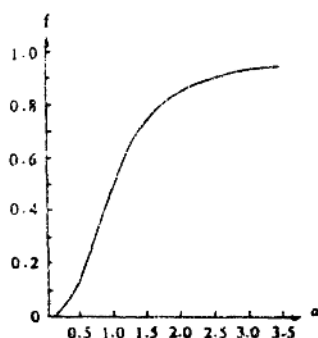


圖2 根據實驗數據所描繪出的帶氧血紅素之 $f-\alpha$ 曲線

欲解釋 $f-\alpha$ 曲線的 S 形反曲，已知有三種模式——由 Monod-Wyman-Changeux 三人所建 (MWC 模式)，另一由 Koshland Nemethy-Filmer 所建；還有一個由 C. Thompson 所建。後兩個模式所得之結果相同，但定式則相異。此處，我們討論 MWC 模式與 Thompson 模式，惟前者之處理形式則循 Thompson 所採者。

若我們將 $p(+1)$ ， $p(-1)$ 寫成

$$p(+1) = \frac{e^J}{e^J + e^{-J}}, \quad p(-1) = \frac{e^{-J}}{e^J + e^{-J}}$$

(是以 $\alpha = 2^J$)，則獨立性假設可敘述成

$$P(\mu_1, \dots, \mu_n) = \frac{e^{J\mu_1} \dots e^{J\mu_n}}{(e^J + e^{-J})^n}, \quad \mu_i = \pm 1$$

此處， $P(\mu_1, \dots, \mu_n)$ 為狀態 $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ 出現之機率；+1 代表一個“帶氧”小單位，-1 則代表一個“未帶氧”者。

MWC 模式假定分子具有兩種相 R 與 T ，由參數 ϵ 所描述；相 R 對應於 $\epsilon = 1$ 而相 T 對應於 $\epsilon = -1$ 。現在，“帶氧狀態”則應描述成 $(\mu_1, \dots, \mu_n; \epsilon)$ —— μ 代表小單位帶氧與否而 ϵ 代表分子所處之相。MWC 之基本假設則為

$$P(\mu_1, \dots, \mu_n; \epsilon) = \frac{\epsilon^{J\mu_1} \epsilon^{J\mu_2} \dots \epsilon^{J\mu_n} + \hat{L} (1-\epsilon) e^{J\mu_1} \dots e^{J\mu_n}}{Z}$$

其中 $\hat{L}$ 代表 T 與 R 之平衡態比值， Z 為使所有狀態出現之機率和為 1 所需的規範常數。

現在，令

$$e^{J/2} = c \alpha \quad (\alpha = e^{2J/2}), \text{ 且}$$

$$L = \hat{L} e^{-J/2}$$

則可得 MWC 模式之結論：

$$f = \frac{\alpha(1+\alpha)^{n-1} + Lc(L+c\alpha)^{n-1}}{(1+\alpha)^n + Lc(L+c\alpha)^n}$$

(就血紅素言 $n=4$)

請注意，若將 MWC 之假設解釋成分子有兩相而每個相中之小單位都獨立地帶氧與否，則會誤導成

$$f = P \frac{\alpha}{1+\alpha} + Q \frac{c\alpha}{1+c\alpha}$$

其中 P 與 Q 為分子在位相 T 與 R 之機率 (註 3)。

Thompson 模式 (由磁學理論中之共存現象而推想出) 則假定

$$P(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

$$= \frac{1}{Z} e^{U\mu_1\mu_2} e^{U\mu_2\mu_3} \dots e^{U\mu_{n-1}\mu_n} e^{U\mu_1\mu_n} e^{J\mu_1} \dots e^{J\mu_n}$$

而 $U (> 0)$ 為一參數，代表相鄰兩小單位之間的“共存程度”，且 Z 為一適當之規範常數。

結果是：

$$f = \alpha \left\{ \left[(1+\alpha+\delta)^{n-1} \left(1 + \frac{2K+\alpha-1}{\delta} \right) + (1+\alpha-\delta)^{n-1} \times \left(1 - \frac{2K+\alpha-1}{\delta} \right) \right] / \left[(1+\alpha+\delta)^n + (1+\alpha-\delta)^n \right] \right\}$$

其中 $K = e^{-4U}$ ， $\delta = [(\alpha - 1)^2 + 4\alpha e^{-4U}]^{1/2}$ 。上式所涉及之計算會較複雜，不過若你已瞭解所謂的一維 Ising 模式則就不難了。將上式之 U 取成 0.55， n 取成 4，則可吻合血紅素的實驗數據。

何種模式是“正確的”？這問題則非啟學家所能回答，我甚至懷疑對此能作有意義的答。然則，我們確已知曉，此兩種模式都可以

成功地解釋圖2中之 $f-\alpha$ 曲線之s形反曲現象，且這兩個模式都不違反任何已知的化學原理。

若是我們將從Mach的“經濟思維”觀點作為評斷兩模式優劣之準則，則Thompson模式（它對等於Koshlund等人者）優於MWC模式；理由是前者只涉及一參數 U 而後者須引用兩參數 L 與 c 。但，自然并非永遠都循最經濟的路線運行，是以除非有更多之化學證據作為憑據，我們只能對兩模式同等看待。畢竟，我們有時得承認無知為福而大愚若智。

自動調整過程

我們再討論一個截然不同的個案模式。實驗背景是：令受試者（觀察員）注視雷達幕上可能出現的訊號。測驗者則隨機地決定是否送出一訊號。其送出訊號之機率為 p 。每間隔一段時間，測驗者詢問觀察員是否偵察到訊號，再計算他的“亂猜率”。觀察員之所以有不確之答案，乃因有時訊號太弱以致干擾了正常之偵測能力。

觀察員可能犯兩種錯誤，(1)將某個雜訊誤為訊號（“假警報”），(2)錯過了真正的訊號（若是真實的軍事情況，則後果不堪設想）。亂猜率為這兩種可能錯誤的加權平均（權數分別為 $q=1-p$ 與 p ）。

我們假定有個“理想觀察員”（註4），他事先已知道單獨雜訊的機率密度函數 $P_1(x)$ 與雜訊+訊號的機率密度函數 $P_2(x)$ （圖3）

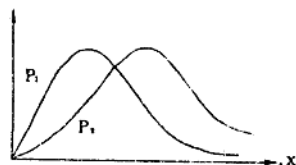


圖3 單獨雜訊之機率密度函數與雜訊+訊號之機率密度函數， x 表雷達幕上所顯示之偏離。

，也知道送出訊號之機率 p 。他當然想把犯錯誤之機率降至最低（完美主義！）

我們經由一些計算，可得到下述最佳準則：當雷達幕上之偏離 x 滿足不等式

$$qP_1(x) - pP_2(x) < 0$$

則答：訊號出現；而當

$$qP_1(x) - pP_2(x) > 0$$

則答：訊號未出現，若方程式

$$qP_1(x) = pP_2(x)$$

有惟一解 $\bar{\theta}$ ，則上述之最佳準則就具有“閾限”性質：觀察員於 $x > \bar{\theta}$ 時答稱“有”而於 $x < \bar{\theta}$ 時答稱“無”。

於上述情況，犯錯機率的極小值為

$$p - \int_{\bar{\theta}}^{\infty} [pP_2(x) - qP_1(x)] dx$$

有趣且令人驚訝的是：任一受試者在一段訓練期後，都能作到幾乎就是理想觀察員的工作績效，亦即，他也能達到近乎上述犯錯機率的極小值。

當我們瞭解有一套極為簡單自動調整過程存在，則上述事實就不那麼令人驚訝了。此調整過程是：先任意設定一閾 θ_1 ，依 $x_1 > \theta_1$ 或 $x_1 < \theta_1$ 回答有無；若答案正確（由測驗者告知），則此 θ_1 保留作為再次觀察時之閾；但若答案不正確，則將 θ_1 改變 $+\Delta$ 或 $-\Delta$ （依所犯錯誤種類而定）；由此，得到第二閾 θ_2 ；以下如是進行。一般法則為：若第 n 步驟時答案正確，則取 $\theta_{n+1} = \theta_n$ ，若犯第(1)類錯誤，則取 $\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta$ ；若犯第(2)類錯誤，則取 $\theta_{n+1} = \theta_n - \Delta$ 。

上述自動調整過程即為機率理論中的“隨機漫步”，它的“遷移機率”為

$$P(\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta) = q \int_{\theta_n}^{\infty} P_1(x) dx$$

$$P(\theta_{n+1} = \theta_n - \Delta) = p \int_0^{\theta_n} P_2(x) dx$$

$$P(\theta_{n+1} = \theta_n) = 1 - p \int_0^{\theta_n} P_2(x) dx$$

$$- q \int_{\theta_n}^{\infty} P_1(x) dx$$

由此可知，不論 θ_n 為何值， θ_n 趨於 $\bar{\theta}$ 之機率恆大於 θ_n 遠離 $\bar{\theta}$ 者。

因此， $\bar{\theta}$ 具有一種引力，使 θ_n 受引而趨於它，故我們能獲得近乎完美的觀測操作績效（註 5）——但，在 $\bar{\theta}$ 鄰近之起伏變動是免不了的，因 Δ 為一非零之量。當然，與其它的機率模式相同地，仍有可能上述自動調整過程是愈作愈糟而遠離 $\bar{\theta}$ ；此刻，我們只好自我安慰，人非聖賢孰能無過。

值得注意的是，近來的研究（註 6）已顯示出， $\bar{\theta}$ 之存在性多少有問題；是以上述調整過程並非適用所有的訊號偵測。再者，由前述討論可知：只要 $p P_2(x) = q P_1(x)$ 有惟一解，則不論 p, P_1, P_2 為何，我們的調整過程都可以趨於最佳準則 $\bar{\theta}$ 。

純由數學之眼光來看前述討論，其僅是利用隨機方法來解方程式， $p P_2(x) = q P_1(x)$ ，但在作之時並“不知道”究竟是解那個方程（——無心插柳成蔭）！

熵恒不減嗎？

現在討論理念模式；如前所述，它主要用來闡明某個理論的精微困難之處。

我們以 Ehrenfest 的壘模式為例。此模式所要闡示的，是一個自氣體動力論創立以來就困擾著它的詭論。氣體動力論是研究具有大量自由度的保守動力系統（例如，就單原子氣體言，它是一個自由度為 $6N, N = 6.02 \times 10^{23}$ / 摩爾，的系統）。有個著名的 Poincaré 再歸定理敘述：若此系統為孤立，則，除了很少之

例外起始狀態，此系統會（隨時間之變動而）——再地回歸到接近起始狀態——想想，宇宙由混沌始而又歸於混沌。定理中之狀態，乃由位置與動量所描述，而例外一詞，指等能量面上的一個零測度集。Poincaré 定理所敘述的“類週期性”與熱力學之基礎——趨於平衡態，即熵（亂度）恆隨時間遞增——看似矛盾；而後者乃是由實驗所歸納得的定律。

為解決這個大麻煩，我們必須利用“統計觀點”對熱力學定律作更深入之定式與討論。Ehrenfest 模式極為簡潔地說明了上述矛盾情況何以發生。

假想有兩個壘 I 與 II，其中放有編號 1 至 $2R$ 號之球（兩壘中之球數可不相同），我們由 1 至 $2R$ 號中任取一號（可想成由另一個裝有號碼條的紙中抽一號），再將該號之球由其在之壘移至他壘。我們反覆地行此手續，而每次抽號碼都是獨立地。

以 $P(n|m;s)$ 表壘 I 中原有 n 球而在上述換球手續進行 s 次後變或有 m 球之機率， $P(n|m;s)$ 之值的表法頗複雜，但我們可算出求均數 $\langle m(s) \rangle$ ， $(m(0) = n; \text{原有球數})$ 為

$$\begin{aligned} \langle m(s) \rangle &= \sum_{n=0}^{2R} m P(n|m;s) \\ &= R + n \left(1 - \frac{1}{R}\right)^s \end{aligned}$$

此式告訴我們：“平均言之”， m 趨於 R ，且趨近率為指數的；注意，兩壘球數相等即為平衡態。

另一方面，我們也可以證明： $m(s)$ ——再地等於 n （起始狀態）之機率為 1，此即上述“類週期性”之類比。然而，我們考慮：第一次使 $m(s) = n$ 之 s ，此值為一隨機變量，平均而言其值為

$$\frac{2^{2R}}{\binom{2R}{n}}$$

此值當 R 大且 n 和 R 差距大時是極龐大的 (n 和 R 差距大表示起始狀態遠離平衡態)。將 s 看成時間 (一秒換球一次)，則由是我們瞭解：“Poincare 週期”之龐大，遠超乎我們實驗所觀測之時間，甚至超乎地球的歷史；或許只有在不知多少世代後，才能感受上述週期之存在 (註 7)。

但是，利用高速計算機，我們能真正地測驗 Ehrenfest 模式，圖 4 就是在 $2R=2^{14}=16,384$ ， $n=2R$ (與平衡態差距最大) 時的實測圖，其中 s 由 1 變動至 200,000；圖形前部確是指數型。此種實測之計算機時間不到兩分鐘；由此我們發現計算機的新作用——將理念模式予以“人工真實化”。

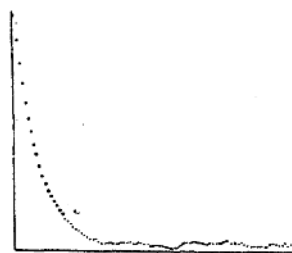


圖 4 由電子計算機所實測出的 Ehrenfest 模式中趨於平衡態之現象

一維世界的凝結

最後，我們討論一個半真實半理念的模式。

將氣體視為一個分子間具有兩兩相互作用力的動力系統是頗為真實的。分子間之位勢 $\phi(r)$ 通常是設定為：在 $0 < r < \delta$ 為無窮大而在 $r > \delta$ 為負值 (前者之“硬核假設”，是使分子不能彼此接近至 δ 距離以內)。再者，我們也必須設 $\phi(r)$ 在 $r \rightarrow \infty$ 時夠快地趨於 0，至少須得使

$$\int_{\delta}^{\infty} r^3 \phi(r) dr < \infty.$$

若分子之位置為 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ ，則位能為

$$E = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|),$$

$|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ 表向量 $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ 之長。

設我們的氣體於絕對溫度 T 處於平衡態，利用統計力學的方法，我們可以導出其“狀態方程”。令

$$Z_N(v) = \frac{1}{N!} \int \dots \int e^{-E/kT} d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_n,$$

其中 v 是容積為 V 的容器，且每個對 $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ 之積分皆是 R^3 中之三重積分，而 k 為 Boltzmann 常數。若對 ϕ 作適當之假設，則我們可證明：於 N 與 V 依比值 $v = V/N$ 保持恆定的方式而趨於無窮時，極限

$$\lim \frac{1}{N} \log Z_N(v) = - \frac{\psi(v, T)}{kT}$$

存在。由上述極限所定出 ψ 即為 (每個分子之) 自由能，其為 v 與 T 之函數。而壓力可由

$$p = - \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

表出，此即狀態方程。

一個著名但仍未能完整予以解決的問題是：證明在某個臨界溫度以下，等溫線有平坦部份，亦即有氣相與液相共存之現象發生。

若是在一維 (直線世界) 情形，則上述之“凝結問題”之解並不困難。令

$$\phi(r) = \alpha \gamma e^{-\gamma r}, \quad r > \delta \quad (\delta > 0)$$

則狀態方程可利用某個積分方程之最大固有值而計算得 (γ 為一參數，其倒數是位勢之作用力範圍的一個度量)。對每個固定 $\gamma > 0$ ，等溫線是某解析函數之圖形，故無凝結現象發生。但是，當 $\gamma \rightarrow 0$ (即作用力範圍趨於無窮遠)，則我們可得到 van der Waals 方程，並且有所謂的 Maxwell 建構，在低於某臨界溫度下等溫線確出現平坦部份。再者，Dyson 之最近研究 (註 8) 顯示，若位勢乃由若干指數函數

的線性組合而成：

$$\phi(r) = - \sum_i \alpha_i e^{-\sigma_i r}$$

而正數 α_i 與 σ_i 滿足：

$$\sum_i \frac{\alpha_i}{\sigma_i} \text{ 收縮 而}$$

$$\sum_i \frac{\alpha_i}{\sigma_i} \text{ 夠快地發散。}$$

則，不需要極限 $r \rightarrow 0$ 情況，上述模式即可呈現凝結現象。

上述模式是普遍的，也是泰半真實的。我們所考慮之分子間相互作用力多少符合真實情況，且我們嚴格遵守統計力學中之定律。另一方面，它又是理念的與個案的，因畢竟並不存在一維世界之氣體；雖然如此，我們對此模式之研究，則於“數學力學”之發展大有啟發。

結語

我們可以說：模式，是以漫畫之手法來呈現實體。良好的模式，正如一幅好漫畫，確能素描出實體世界的若干特徵（當然免不了些些扭曲）。我們也領會到，模式可用來作解釋與預測現象（這是科學的主要功能）；但，我們寧可說：模式更大的作用是在突顯思考而引發尖銳的問題。畢竟，模式本身就具有活力，而值得我們去創造，欣賞與把玩。然而，莫忘了“適者生存”這一原則——我們不能無視於真實之需要與目的而去隨意創造模式；記住：除非你有把握自己戳穿牛皮，還是不要亂吹地好（被別人戳穿多沒面子！）

註

1. 有意思的是，在原子與基因這兩個理論中所呈現之“離散結構”，迥異於音樂中調子之頻率所呈現者。後者之各頻率間本就具有固

定之比值，而前兩者乃是由微分方程所描述，故基本結構是連續的。但是，因為只有當某些參數屬於一離散值集時方程式方有非無聊之解，是以結構中呈現離散的質譜。

2. 見 C. J. Thompson Biopolymers 6, 1101 (1968)。在該文中，亦可見到 Monod-Wyman-Changeux 與 Koshland 等人之文獻。
3. 由於 $P+Q=1$ 且 $Q/P=\hat{L}$ ，故式子即變成

$$f = \frac{1}{1+\hat{L}} \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\hat{L}}{1+\hat{L}} \frac{c\alpha}{1+c\alpha}$$

4. 關於“理想觀測員”之理論，與若干在「雷達實驗室」（二次大戰時）所作實驗之討論，可以參閱 J. L. Lawson 與 G. E. Uhlenbeck 所輯之 Threshold Signals（閾訊號）一書（McGraw-Hill, New York, 1950）。該理論源自 Neyman-Pearson 有關檢定假說的一些構思。
5. 見 M. Kac, IRE Trans. Profess. Group Inform. Theory IT-8, 126 (1962 年二月份)。
6. 例如，見 J. A. Swets 之 Signal Detection and Recognition by Human Observers（訊號偵測與觀察人員之認知能力，Wiley, New York, 1964）。我得感謝 R. W. Taylor 提醒我注意此書。
7. 欲知更完整之討論，可見 M. Kac 之 Probability and Related Topics in physical Science（機率與物理科學中之若干相關主題，Interscience, New York, 1959）。
8. 見 M. Kac, G. E. Uhlenbeck, D. C. Heppner, J. Math. Phys. 4, 216 (1963)。
9. 此為 F. J. Dyson 尚未正式發表之論文。

—本文譯者現任教於台大數學系—

（原載：數學傳播季刊〔台〕 1985 年 9 卷 3 期 15—21 頁）

$$(3.1.2) \quad BG(a, x') = 0 = BG(b, x')$$

(邊界條件)

$$(3.1.3) \quad G(x, x') \in C[a, b] \text{ (連續條件)}$$

$$(3.1.4) \quad \frac{\partial G(x, x'-0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x'+0)}{\partial x} \Big|_{x=x'} = \frac{-1}{p(x)} \text{ (跳續條件)}$$

註3 上式之格林函數為唯一表示法，且以對稱形式出現，當它滿足正則條件，否則不具對稱形式。

註4 $\lambda = 0$ 為固有值時之格林函數可參看所列參考文獻，又高階之格林函數又如何定義呢？這也是一個很好的習題。

用格林函數求解自伴邊界問題(3.1)可由下列定理表現出來：

定理3.2 若 $\lambda = 0$ 非為齊次自伴邊界問題(3.2)之一固有值，則(3.1)式之解可由其格林函數 G (如定義3.1所述)表示如下：

$$(3.3) \quad u(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'.$$

證明：因 $u(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'$ ，由

Leibnitz 法則，得知

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x G(x, x') f(x') dx' + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x} \int_x^b G(x, x') f(x') dx' \\ &= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} G(x, x') f(x') dx' + \\ &\quad \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} G(x, x') f(x') dx', \end{aligned}$$

又由跳續條件(3.1.4)得知

$$\begin{aligned} (p(x) u'(x))' &= p(x) \cdot \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} f(x-0) + \\ &\quad \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} (p(x) \frac{\partial G(x, x')}{\partial x}) f(x') dx' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- p(x) \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} f(x+0) + \\ &\quad \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} (p(x) \frac{\partial G(x, x')}{\partial x}) f(x') dx' \\ &= -f(x) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (p(x) \frac{\partial G(x, x')}{\partial x}) f(x') dx' \end{aligned}$$

$$\text{故 } Lu(x) = -f(x) + \int_a^b LG(x, x') f(x') dx',$$

但 $x \neq x'$ 由條件(3.1.1)得知所證定理成立。

IV. 例子 以下我們舉例說明如何找格林函數及利用它來求解。

例1

$$(4.1) \quad \begin{cases} y''(x) = -f(x), & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

解：因 $\lambda = 0$ 非為(4.1)之固有值，故由(3.1.1)得格林函數如下：

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \begin{cases} A+Bx, & x < x' \\ C+Dx, & x > x' \end{cases} \\ \text{由(3.1.2)知, } A=0, C=-D, \text{ 即} \\ G(x, x') &= \begin{cases} Bx, & x < x' \\ C(1-x), & x > x' \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{再由(3.1.3)連續條件知 } C = \frac{Bx'}{1-x'},$$

最後由(3.1.4)得知 $B = 1-x'$

故所求格林函數為

$$G(x, x') = \begin{cases} x(1-x'), & x < x' \\ x'(1-x), & x > x' \end{cases}.$$

再由定理3.2得其解為

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x (1-x)x' f(x') dx' + \int_x^1 x(1-x') f(x') dx' \\ &\quad - x' f(x') dx'. \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{a(x)X''(x) + b(x)X'(x)}{X(x)} + c(x) \\ = \lambda$$

但上式等號兩邊為不同變數且 $t > 0$ ，故取 λ 為真實常數。因此得到下面兩個常微分方程式：

$$(2.5) \quad T'(t) = \lambda T(t)$$

$$(2.6) \quad LX = a(x)X''(x) + b(x)X'(x) + [c(x) - \lambda]X(x) = 0$$

因 $u(x, t)$ 仍應滿足 (2.1) 式之邊界條件，即：

$$(2.7) \quad \begin{cases} AX'(0) + BX(0) = 0 \\ CX'(\ell) + DX(\ell) = 0 \end{cases}$$

今 (2.5) 式常有解 $T(t) = K \exp\{\lambda t\}$ ，因此留下另一常微分方程式的問題：

$$(2.8) \quad \begin{cases} LX = a(x)X''(x) + b(x)X'(x) + [c(x) - \lambda]X(x) = 0 \\ AX'(0) + BX(0) = 0 \\ CX'(\ell) + DX(\ell) = 0 \end{cases}$$

顯然，上式經常有零解 $X(x) = 0$ 。

以下我們開始定義一些名詞，以使容後使用。

定義 2.1 (2.6) 式常被稱為自伴 (self-adjoint) 微分方程式，如果對任何 $u, v \in C^{(2)}[0, \ell]$ ，存在一可微函數 $F(u, v, x)$ ，

使得 $uLv - vLu = \frac{d}{dx}F(u, v, x)$ 成立，

而 (2.7) 式常被稱為正則 (regular) 條件，如果 $F(u, v, x)|_0^\ell = 0$ 。

定義 2.2 (2.8) 式常被稱為形成一史都姆-李歐利型 (Sturm-Liouville System)。而史-李問題即在對非零解尋求諸 λ 值，每一非零解常被稱為固有函數 (eigen function)，其對應之 λ 值常被稱為固有值 (eigen value)。

註 1 在 (2.8) 式中給定一些固有譜值 (Spectra of eigen values)，以決定函數 $c(x)$ 之問題即所謂史-李之反問題，這是一個非常有趣的問題。

註 2 在 (2.6) 中如令 $p(x) = a(x)r(x)$ ， $q(x) = c(x)r(x)$ ，式中 $r(x) = \exp\left\{-\int_0^x \frac{a'(s) - d'(s)}{a(s)} ds\right\} > 0$ ，則 (2.6) 可化成

$$(2.6.1) \quad LX = (p(x)X'(x))' + (q(x) - \lambda r(x))X(x) = 0$$

顯然，(2.6.1) 式為一自伴微分方程式。

其實，再作進一步的變換 (2.8) 式常可化成如下常見的史-李標準型：

$$(2.6.2) \quad \begin{cases} u''(x) + (\tilde{Q}(x) - \tilde{\lambda})u(x) = 0, \\ 0 < x < 1 \\ u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0 \\ u(1)\cos\beta + u'(1)\sin\beta = 0 \end{cases}$$

如何化法呢？這是一個很好的習題，讀者不妨試一試。

III. 微分方程式上之格林函數 考慮下列自伴邊界問題 (Self-adjoint Boundary Value Problem)。

$$(3.1) \quad \begin{cases} Lu(x) = (p(x)u'(x))' + (q(x) - \lambda)u(x) = -f(x), \\ a < x < b \\ Bu(a) = \alpha u'(a) + Bu(a) = 0 \\ Bu(b) = \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0 \end{cases}$$

式中 $p(x) > 0$ ， $p(x), q(x) \in C^{(1)}[a, b]$ ， $f(x) \in C[a, b]$ ，以及齊次自伴邊界問題

(Homogeneous Self-adjoint Boundary Value Problem)。

$$(3.2) \quad \begin{cases} Lu = (p(x)u'(x))' + (q(x) - \lambda)u(x) = 0 \\ u(x) = 0 \\ Bu(a) = \alpha u'(a) + \beta u(a) = 0 \\ Bu(b) = \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0 \end{cases}$$

若 $\lambda = 0$ 非為齊次自伴邊界問題 (3.2) 之一固有值，則吾人可定義格林函數如下：

定義 3.1 自伴邊界問題 (3.1) 之格林函數 $G(x, x')$ ， $a \leq x, x' \leq b$ 為兩變數之函數，其對於變數 x 滿足如下四條件：

$$(3.1.1) \quad LG(x, x') = 0, \quad x \neq x'$$

$$(3.1.2) \quad BG(a, x') = 0 = BG(b, x')$$

(邊界條件)

$$(3.1.3) \quad G(x, x') \in C[a, b] \text{ (連續條件)}$$

$$(3.1.4) \quad \frac{\partial G(x, x'-0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x'+0)}{\partial x} \Big|_{x=x'} = \frac{-1}{p(x)} \text{ (跳續條件)}$$

註3 上式之格林函數為唯一表示法，且以對稱形式出現，當它滿足正則條件，否則不具對稱形式。

註4 $\lambda = 0$ 為固有值時之格林函數可參看所列參考文獻，又高階之格林函數又如何定義呢？這也是一個很好的習題。

用格林函數求解自伴邊界問題(3.1)可由下列定理表現出來：

定理3.2 若 $\lambda = 0$ 非為齊次自伴邊界問題(3.2)之一固有值，則(3.1)式之解可由其格林函數 G (如定義3.1所述)表示如下：

$$(3.3) \quad u(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'.$$

證明：因 $u(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'$ ，由

Leibnitz 法則，得知

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b G(x, x') f(x') dx' + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x} \int_x^b G(x, x') f(x') dx' \\ &= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} G(x, x') f(x') dx' + \\ &\quad \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} G(x, x') f(x') dx', \end{aligned}$$

又由跳續條件(3.1.4)得知

$$\begin{aligned} (p(x)u'(x))' &= p(x) \cdot \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} f(x-0) + \\ &\quad \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial G(x, x')}{\partial x} \right) f(x') dx' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- p(x) \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} f(x+0) + \\ &\quad \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial G(x, x')}{\partial x} \right) f(x') dx' \\ &= -f(x) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial G(x, x')}{\partial x} \right) f(x') dx' \end{aligned}$$

$$\text{故 } Lu(x) = -f(x) + \int_a^b LG(x, x') f(x') dx',$$

但 $x \neq x'$ 由條件(3.1.1)得知所證定理成立。

IV. 例子 以下我們舉例說明如何找格林函數及利用它來求解。

例1

$$(4.1) \quad \begin{cases} y''(x) = -f(x), & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

解：因 $\lambda = 0$ 非為(4.1)之固有值，故由(3.1.1)得格林函數如下：

$$G(x, x') = \begin{cases} A+Bx, & x < x' \\ C+Dx, & x > x' \end{cases}$$

由(3.1.2)知， $A=0, C=-D$ ，即

$$G(x, x') = \begin{cases} Bx, & x < x' \\ C(1-x), & x > x' \end{cases}.$$

再由(3.1.3)連續條件知 $C = \frac{Bx'}{1-x'}$ ，

最後由(3.1.4)得知 $B = 1-x'$

故所求格林函數為

$$G(x, x') = \begin{cases} x(1-x'), & x < x' \\ x'(1-x), & x > x' \end{cases}.$$

再由定理3.2得其解為

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x (1-x')x' f(x') dx' + \int_x^1 x(1-x') f(x') dx' \\ &\quad - x' f(x') dx'. \end{aligned}$$

例2

$$(4.2) \begin{cases} y''(x) = 2, & x \in (0, 1) \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

解：顯然 $\lambda = 0$ 非為 (4.2) 之固有值，為應用例1之結果，令 $y(x) = 1 - x + u(x)$ ，則得

$$(4.2.1) \begin{cases} u''(x) = 2, & x \in (0, 1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

由例1 (4.1) 知 (4.2.1) 之解為

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x x'(1-x)(-2)dx' + \int_x^1 x(1-x')(-2)dx' \\ &= -(1-x)x^2 - x(1-x)^2 \\ &= x^3 - x \end{aligned}$$

於是得到原式解為

$$y = (1-x) + x^3 - x = (x-1)^2$$

下面我們舉一個非具對稱形式之格林函數，即不滿足正則條件之微分方程式：

例3

$$(4.3) \begin{cases} u''(x) = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

解：仿上，可知

$$G(x, x') = \begin{cases} 0, & x < x' \\ C + Dx, & x > x' \end{cases}$$

再由連續條件與跳變關係得知

$$G(x, x') = \begin{cases} 0, & x < x' \\ x' - x, & x > x' \end{cases}$$

顯然上式非為對稱之格林函數。

另外，我們也舉一個奇異格林函數的問題。

$$\text{例4} \begin{cases} \frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) - \left(\frac{v^2}{x} \right) u = 0 \\ (v \geq 0), & 0 < x < 1 \\ u(x) \text{ 當 } x \downarrow 0^+ \text{ 時, 有界,} \\ \lim_{x \downarrow 0^+} u(x) = 0 \end{cases}$$

解：同理，仿上可得格林函數如下：

$$G(x, x') = \begin{cases} A + B \log x, & x < x' \\ C + D \log x, & x > x' \\ Ax^v + Bx^{-v}, & x < x' \\ Cx^v + Dx^{-v}, & x > x' \end{cases}, \begin{matrix} v = 0 \\ v > 0 \end{matrix}$$

再利用連續條件與跳變關係可得

$$G(x, x') = \begin{cases} -\log x', & x < x' \\ -\log x, & x > x' \end{cases}, \quad v = 0$$

$$G(x, x') = \begin{cases} \left(\frac{x}{x'} \right)^{v/2v}, & x < x' \\ \left(\frac{x'}{x} \right)^{v/2v}, & x > x' \end{cases}, \quad v \neq 0$$

顯然， $G(x, x')$ 不恆存在，當 x 或 x' 趨近於零。

V. 理論解析上之格林函數 接着我們來探討在二維空間理論解析上之格林函數，它是以何種型態表現出來。

為了解說需要，我們敘述下列有名的黎曼寫像定理 (Riemann Mapping Theorem)。

引理 5.1 令 $G \neq \mathbb{C}$ 為簡單連通區域 (Simply Connected region)，且 $a \in G$ ，則唯一存在一解析函數 (analytic function)

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$ 具有下列性質：

$$(5.1.1) \quad f(a) = 0 \text{ 且 } f'(a) > 0,$$

$$(5.1.2) \quad f \text{ 為一對一},$$

$$(5.1.3) \quad f(G) = \{ z : |z| < 1 \}.$$

定義 5.2 令 G 為複數平面上一區域且 $a \in G$ ，則格林函數 $g_a: G \rightarrow \mathbb{R}$ 為在 a 奇異 (Singularity at a) 且有如下性質：

$$(5.2.1) \quad g_a(z) \text{ 在 } G - \{a\} \text{ 上為調和函數 (Harmonic function)}$$

(5.2.2) $g(z) = g_*(z) + \log |z - a|$ 在 a -圓盤上為調和函數。

(5.2.3) $\lim_{w \rightarrow \infty} g_*(z) = 0, \forall w \in \partial_\infty G$, (表 G 之邊界上)

由以上諸性質，我們可以得到下列命題，它告訴我們如何在複數平面上尋求格林函數。

命題 5.3 令 G 表簡單連通鄰域， $a \in G$ 且令一對一解析函數， $f: G \rightarrow D = \{z: |z| < 1\}$ 滿足 $f(G) = D$ 且 $f(a) = 0$ 則在 G 上具有奇異點 a 之格林函數為 $g_*(z) = -\log |f(z)|$ 。

證明：由引理 5.1 知其存在且滿足

(a) 因 f 為一對一解析函數，故 $f(z) \neq 0, z \neq a, z \in G$ ，於是，
 $\log |f(z)|$ 在 $G - \{a\}$ 上為調和函數。

(b) 顯然， $g(z) = g_*(z) + \log |z - a|$
 $= -\log \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right|$ 在 a -圓盤上為調和函數。

(c) 又 $\lim_{w \rightarrow \infty} g_*(z) = \lim_{w \rightarrow \infty} -\log |w| = 0$
 $\forall w \in \partial_\infty G$ ，故命題成立。

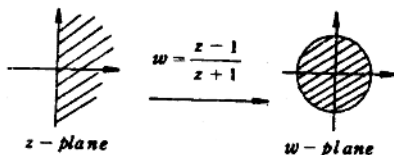
註 5 上述格林函數 $g_*(z)$ 若存在則為唯一確定，且為正數，對所有 $z \in G - \{a\}$ 。

最後我們舉一個例子以為命題 5.3 之應用。

例 5.4 試在 $G = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ 上找一格林函數。

解：由莫比奧變換 (Möbius transformation)

$w = \frac{z-1}{z+1}$ 知 $w: G \rightarrow D = \{z: |z| < 1\}$ ，如下圖所示：



於是，命題 5.3 告訴我們所求格林函數為

$$g_1(z) = -\log \left| \frac{z-1}{z+1} \right|$$

其實對任何 $a \in G$ ，吾人不難求得其格林函數為

$$g_a(z) = -\log \left| \frac{\frac{1-z}{1+z} - \frac{1-a}{1+a}}{1 - \frac{1-\bar{a}}{1+\bar{a}} \frac{1-z}{1+z}} \right|$$

如何求得呢？這亦是一個很好的習題。

參考文獻

- [1] J.A. Cochran, Applied Mathematics; Wadsworth, Inc., Belmont, California, 1982.
- [2] E.A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations; McGraw-Hill, New York, 1955.
- [3] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. I, II; Interscience, New York, 1953.
- [4] J.B. Conway, Functions of one Complex Variable; Springer-Verlag N.Y. Inc. 2nd 1975.
- [5] P.R. Garabedian, Partial Differential Equations; New York, Wiley, 1964.
- [6] I. Stakgold, Green's Functions and Boundary Value Problems; Wiley, New York, 1979.

一本文作者任教於

國立成功大學數學系及處數所一

(原載：數學傳播季刊[台] 1985 年 9 卷 4 期 2 — 6 頁)



微分動力學簡介

林清河

微分動力學 (Differentiable dynamics) 的研究, 大致上是始於 1762 年拉格蘭吉 (Lagrange) 發表的動力系統中平衡態 (equilibrium state) 的微小振動理論, 以及 1883 年富羅桂 (Floquet) 所研究的關於週期軌道 (periodic orbit) 的微小振動。這二種古典理論在當時只應用到線性動力系統方面。但它們却對深奧的常微分方程式的定性理論 (qualitative theory) 提供了非常有價值的基礎。

十九世紀末期, 潘加瑞 (Poincaré) 和里阿波諾夫 (Liapunov) 證明早先拉格蘭吉和富羅桂的方法亦可應用於非線性系統的微小振動, 而且他們的分析方法更進一步牽涉到穩定性 (stability) 的理論。穩定性的基本觀念可由二方面來說明; 一是關於不變集 (invariant set) (一般是平衡態或週期軌道) 的微擾 (perturbations) 時的穩定性, 另外一種是關於動力系統的係數或參數的微擾時的穩定性。前者穩定性的觀念導引出近代里阿波諾夫的穩定性原理。而後者是討論結構穩定性 (structural stability)。

潘加瑞在當時也談到遞歸 (recurrence) 和傳遞性 (transitivity) 的一般觀念, 特別是涉及保守動力系統。因為這些在動力學裡的新方法, 複雜地牽涉到拓模、分析和幾何, 所以它需要一種簡要清晰且能闡明動力系統的定

性理論做為基本概念。

1927 年伯爾科福 (Birkhoff) 用動力系統中之抽象理論當作度量空間中的連續流 (continuous flows)。他用純拓模術語定義了極限集 (limit sets)、極小集 (minimal sets) 和其他的下變集、穩定、遞歸以及傳遞性等觀念。這就是我們所稱的拓模動力學。

在當時拓模動力學對瞭解定性動力學提供了非常有價值的結構。可惜的是它沒有辦法討論到許多動力學的微分結構。例如關於平衡點之變分方程 (variational equation) 的特徵值 (eigenvalues) 間的關係, 以及里阿波諾夫的穩定性原理是不屬於拓模動力學的行列。換句話說, 拓模動力學對微分動力學的許多研究大體上而言是太過籠統。

在過去數十年中微分動力學專注於二方面發展, 一是趨向非線性彈性和電子等工程問題中的動力系統含摩擦阻尼和電阻的研究。由非線性振動原理中的問題所得的微分方程式通常是結構穩定性, 如 Duffing 和 Van der Pol 方程式, 另一個趨勢是創造微分流形和微分拓模學的數學原理。1967 年以前定性動力學的研究越來越朝向微分拓模學, 一直到史美爾 (Smale) 在 1967 年所發表的研究論文中才把定性原理當作微分拓模學的一個分支。

由上述微分動力學簡單的發展過程中, 我