陀螺原理及应用

殷立昊　编
翁维开　主审

海军工程学院
一九九九年五月

陀螺原理及应用

殷立昊　编
翁维开　主审

海军工程学院
一九九九年五月

陀螺原理及应用

*

殷立吴　编

翁维开　主审

海军工程学院教务部　出版

海军工程学院印刷厂　印刷

*

787×1092 毫米　1/16 开本　13 印张　314 千字　插页

1999 年 5 月第 1 版第 1 次印刷　　印数 1—200

院内统一书号 99.404.01　　定价　25.60 元

前　　言

陀螺仪器在解决运动物体的定位和控制问题方面得到了广泛的应用。它最早应用于航海导航，随着科学技术的发展它在航空和航天技术等领域也得到了广泛的应用。

陀螺仪不仅可以作为指示仪表，而且作为一个敏感元件，能为载体提供准确的方位、水平、角速度和角位移等信号，完成对航行体的姿态和运动轨迹控制。陀螺仪的应用是十分广泛的，它在国防建设和国民经济建设中均占有重要的位置。

本教材共分九章，第一章、第二章是陀螺仪定位的基本理论，为方便读者适当加入一些必须的数学基础。第三章到第七章顺次叙述了陀螺仪和积分陀螺仪，平台罗经的工作原理和特性，第八章解绍陀螺测漂的基本原理，第九章介绍目前技术已经成熟并开始应用的挠性陀螺基本工作原理。

本书除用力学观点分析陀螺仪的基本特性以及各种陀螺仪器的工作原理和误差特征外，还采用自动控制原理，将陀螺仪器当作一个自控系统进行分析，以便于用自动控制的原理和方法来分析系统。在编写上力求避免繁琐的数学推导，着重物理实质的叙述，使读者学会分析问题的方法，为今后从事陀螺仪器的设计和研制打好理论基础。

本书在编写过程中承教研室翁维开副教授的帮助和主审，并提出很多宝贵意见，在此表示真诚的感谢。

书中难免有不妥与错误之处，请读者指教。

编　者

1999.5

目　录

第一章　陀螺仪基本理论

§1—1　物体空间的位置和运动

物体在空间的位置和运动，是相对一定的参考坐标系而言的。在分析陀螺及陀螺导航系统的时候，经常会涉及到几个不同的参考坐标系。在假设物体为刚体的前提下，物体及物体上点的位置和运动，只是时间的函数，通常用点的位置向量，速度向量和加速度向量以及物体旋转时的角速度向量及角加速度向量来描述。这一节的主要内容就讨论这些重要物理量的意义及其在不同参考坐标系之间的转换关系。

一、点的位置向量及其表示法

如图1—1所示，在直角坐标系 $O-XYZ$ 中，p 点的位置可以用向量 $r=op$ 来表示。向量 r 定义为质点 p 相对坐标系 $o-XYZ$ 的原点 o 的位置向量。

为了便于分析讨论，向量 r 通常用它在坐标轴 oX、oY、oZ 上的投影 (x,y,z) 和沿 oX、oY、oZ 轴正方向上的单位向量 i,j,k 来表示，即：

$$r = xi + yj + zk \quad (1-1)$$

式(1—1)为位置向量 r 的单位向量表达式。

如果将表示 r 的三个分量 (x,y,z) 排列成 3×1 的列矩阵或转置矩阵，那末就得到位置向量 r 的矩阵表达式：

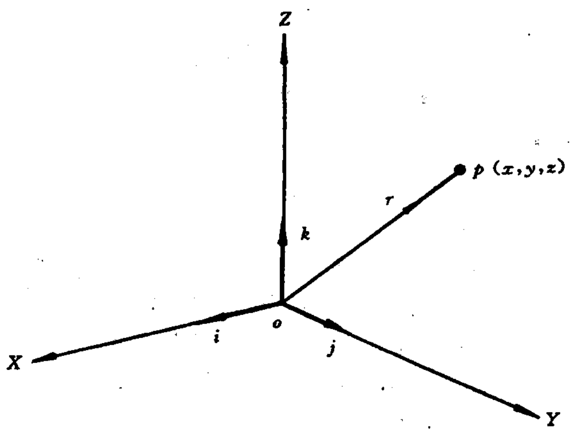

图1—1

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z]^T \qquad (1-2)$$

等式右边的上标"T"表示转置矩阵的意思。

上面二式虽然同样表示了 p 点在 $o-XYZ$ 坐标系中的相对位置，但二者在数学上的意义是不相同的，它们分别服从向量运算和矩阵运算法则。

向量 r 在三根轴上的分量 (x,y,z) 可以用向量的模 $|r|=r$ 以及 r 相对 oX,oY,oZ 三轴正方向的方向余弦 $\cos(r,\hat{X})$，$\cos(r,\hat{Y})$，$\cos(r,\hat{Z})$ 来表示，即

$$x = r \cdot \cos(r,\hat{X})$$

$$y = r \cdot \cos(r \hat{,} Y)$$

$$z = r \cdot \cos(r \hat{,} Z) \qquad (1-3)$$

式中$(r\hat{,}X)$,$(r\hat{,}Y)$,$(r\hat{,}Z)$分别表示向量 r 与 oX,oY,oZ 轴的夹角;r 是向量 r 的模,应满足:

$$r^2 = x^2 + y^2 + x^2 \qquad (1-4)$$

从以上分析不难看出,p 点在坐标系 $o-XYZ$ 中的相对位置,可以用式(1—1)或(1—2)中的三个参数 x,y,z 来表示;也可以用式(1—3)中的四个参数 r,$\cos(r\hat{,}X)$,$\cos(r\hat{,}Y)$,$\cos(r\hat{,}Z)$来表示。显然 x,y,z 是三个完全独立的参数,而后者有四个参数,其中有一个是不独立的,或者四个参数必然满足某个依从关系。这个依从关系,可将式(1—3)代入(1—4)求得:

$$\cos^2(r\hat{,}X) + \cos^2(r\hat{,}Y) + \cos^2(r\hat{,}Z) = 1 \qquad (1-5)$$

向量 r 相对坐标系 $o-XYZ$ 的三个方向余弦的平方和等于 1。即已知其中二个就可求出第三个方向余弦,三个方余弦中只有两个是完全独立的。通常把式(1—5)称为参数之间的约束方程。

由此可见,一个空间的自由质点,相对参考系的位置,可以用三个独立的参数表示,也可以用多于三个的不完全独立的参数来表示。后者必须附加约束条件。对于前者,不但参数的数量少,而且没有附加的约束方程,用起来自然要方便一些,在分析力学中广为采用,称为系统的广义坐标。

下面我们讨论在同一参考系中,不同向量之间的代数运算,如图 1—2 所示。向量 a 和 b 在坐标系中,用单位向量 i,j,k 分别表示为:

$$a = a_x i + a_y i + a_z k$$

$$b = b_x i + b_y i + b_z k$$

式中 a_x,a_y,a_z;b_x,b_y,b_z 分别是 a 和 b 在 ox,oy,oz 轴上的投影分量。按向量代数运算法则,向量 a 和 b 之间可以进行向量的加减运算:$a \pm b$、向量的数量积运算:$a \cdot b$,向量的向量积运算:$a \times b$,分别表示如下:

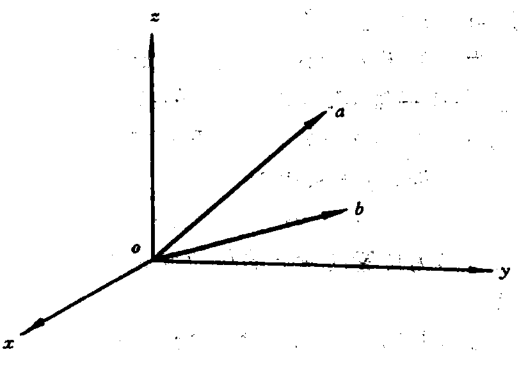

图 1—2

向量的加减运算:

$$a \pm b = (a_x \pm b_x)i + (a_y \pm b_y)j + (a_z \pm b_z)k \qquad (1-6)$$

向量的数量积运算:

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (1-7)$$

向量的向量积运算:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - b_x a_y)k \qquad (1-8)$$

如果将 a 和 b 表示成列矩阵形成,

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

那么上述的各种运算应按矩阵的运算法则进行，分别表示如下：

向量的加减运算：

$$a \pm b = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix} \tag{1-9}$$

向量的数量积运算：

$$a \cdot b = [a_x \ a_y \ a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1-10}$$

即 a 与 b 的数量积等于 a 的转置矩阵与 b 的列矩阵相乘，可简写为：

$$a \cdot b = [a]^T [b] \tag{1-10'}$$

向量的向量积运算：

$$a \times b = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \tag{1-11}$$

这里我们定义了一个新的矩阵，用 A 表示：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \tag{1-12}$$

称矩阵 A 为向量 a 的反对称矩阵。这样向量 a 和 b 的向量积就可以表示为向量 a 的反对称矩阵 A 与向量 b 的列矩阵 b 的矩阵乘积。通常将式(1－11)简写为

$$a \times b = Ab \tag{1-11'}$$

这里要说明的是，任何一个向量都可以表示为列矩阵形式，因而相应的也有它的反对称矩阵，前者通常用小写字母表示；后者则用相应的大写字母表示。

例如单位向量 i,j,k 可表示成：

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

相应的反对称矩阵为

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么

$$i \cdot i = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$i \cdot j = [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 0$$

$$i \times j = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

下面举两个具体的例子：

例一：求定轴转动圆盘上一点 P 的速度 v_p，如图 1—3 所示。

解：P 点的位置用向量 r 表示，圆盘绕定轴转动的角速度用 ω 表示，它们的列矩阵形式分别表示如下：

$$r = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix};\qquad \omega = \begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}$$

其中 x,y,z 和 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 分别为 r 和 ω 在 $0-xyz$ 轴上的投影分量。根据理论力学中的公式，P 点的速度 v_p 可表示为

$$v_p = \omega \times r$$

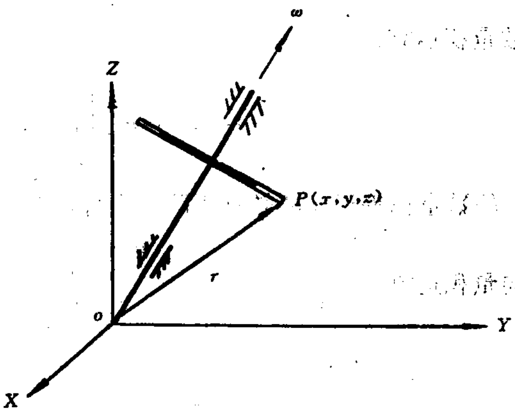

图 1—3

如果用反对称矩阵来表示，那么有

$$v_p = \Omega \times r$$

式中 Ω 为 ω 的反对称矩阵，由式(1—12)，可得到：

$$v_p = \begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\\omega_z & 0 & -\omega_x\\-\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-y\omega_z + z\omega_y\\x\omega_z - z\omega_x\\-x\omega_y + y\omega_x\end{bmatrix}$$

如果 ω 是沿 z 轴的特殊情况，那么

$$\omega = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix};\qquad \Omega = \begin{bmatrix}0 & -\omega & 0\\\omega & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

相应的速度 v_p 为

$$v_p = \begin{bmatrix}0 & -\omega & 0\\\omega & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \omega\begin{bmatrix}-y\\x\\0\end{bmatrix}$$

例二：求重力 P 对单摆的支点 o 的力矩 M_o，如图 1—4 所示。

解：P 力对 o 点之矩可以表示为：

$$M_o = r \times P$$

式中 $r = \begin{bmatrix}r\sin\theta\\r\cos\theta\\0\end{bmatrix};\qquad P = \begin{bmatrix}0\\P\\0\end{bmatrix}$

利用式(1—12),得

$$M_0 = r \times P = RP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r\cos\theta \\ 0 & 0 & -r\sin\theta \\ -r\cos\theta & r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Pr\sin\theta \end{bmatrix}$$

这个结果说明图示重力 P 对 o 点之矩大小为 $Pr\sin\theta$,方向沿 oz 轴的正方向。

上面我们讨论了在同一参数坐标系中向量与向量之间的代数运算。下面我们讨论向量在不同参数坐标系之间的转换关系,这一转换关系通常是通过方向余弦矩阵来完成的。

二、方向余弦矩阵

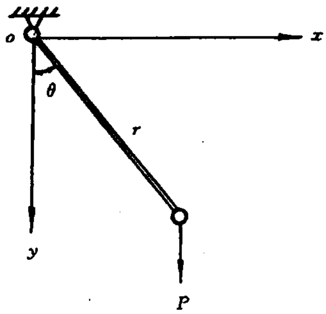

图 1—4

如图 1—5 所示,位置向量 r 在共原点 o 的两个参考坐标系 $o-X_nY_nZ_n$ 与 $o-X_bY_bZ_b$ 中,可分别表示为:

$$r = x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n$$

$$r = x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b$$

式中 x_n, y_n, z_n 和 i_n, j_n, k_n 分别表示 r 沿 $o-X_nY_nZ_n$ 坐标轴上的投影分量和相应的单位向量;x_b, y_b, z_b 和 i_b, j_b, k_b 分别表示 r 沿 $o-X_bY_bZ_b$ 坐标轴上的投影分量和相应的单位向量。这些参数既然表示同一个向量 r,那末它们之间必然有一定的转换关系,下面就来讨论这个问题。

首先求 r 在 oX_b 上的投影分量 x_b,因为向量 r 是三个分量 $x_n i_n, y_n j_n, z_n k_n$ 的向量和,即

$$r = x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n$$

我们知道,向量在某轴上的投影等于其分量在同轴上的投影之和,那末 x_b 应是上述三个分量在 oX_b 轴上投影分量的代数和,而这些分量在 oX_b 轴上的投影又可用方向余弦的形式表示。

那末 x_b 可以表示为:

$$x_b = x_n\cos(X_b \hat{,} X_n) + y_n\cos(X_b \hat{,} Y_n) + z_n\cos(X_b \hat{,} Z_n)$$

为了书写方便,用以下符号来表示方向余弦:

$$\cos(X_b \hat{,} X_n) = C_{X_bX_n}$$

$$\cos(X_b \hat{,} Y_n) = C_{X_bY_n}$$

$$\cos(X_b \hat{,} Z_n) = C_{X_bZ_n}$$

这样 X_b 可以写成:

$$x_b = x_n C_{X_bX_n} + y_n C_{X_bY_n} + z_n C_{X_bZ_n} \tag{1-13}$$

同理得 y_b, z_b 的表达式如下

$$y_b = x_n C_{Y_bX_n} + y_n C_{Y_bY_n} + z_n C_{Y_bZ_n} \tag{1-14}$$

$$z_b = x_n C_{Z_bX_n} + y_n C_{Z_bY_n} + z_n C_{Z_bZ_n} \tag{1-15}$$

上面的三式可用矩阵表示如下:

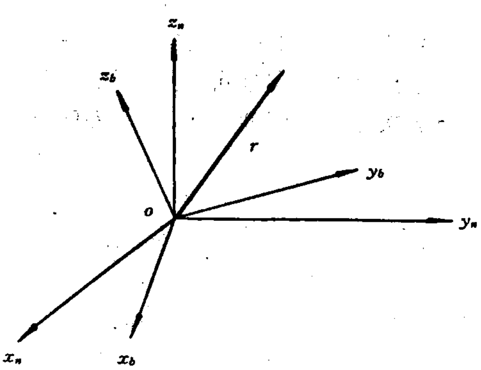

图 1—5

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{X_bX_n} & C_{X_bY_n} & C_{X_bZ_n} \\ C_{Y_bX_n} & C_{Y_bY_n} & C_{Y_bZ_n} \\ C_{Z_bX_n} & C_{Z_bY_n} & C_{Z_bZ_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \tag{1-16}$$

这个矩阵表达式左边的列矩阵，其元素是向量 r 在 $o-X_bY_bZ_b$ 坐标系中的投影分量，右边第一部分是由 $o-X_nY_nZ_n$ 与 $o-X_bY_bZ_b$ 各坐标轴之间的九个方向余弦为元素的 3×3 阶的矩阵。右边第二部分的列矩阵则是向量 r 在 $o-X_nY_nZ_n$ 坐标系中的投影分量。如果用以下符号表示。

$$r^b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_n \end{bmatrix} \qquad r^n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \tag{1-17}$$

$$C_n^b = \begin{bmatrix} C_{X_bX_n} & C_{X_bY_n} & C_{X_bZ_n} \\ C_{Y_bX_n} & C_{Y_bY_n} & C_{Y_bZ_n} \\ C_{Z_bX_n} & C_{Z_bY_n} & C_{Z_bZ_n} \end{bmatrix} \tag{1-18}$$

那么式(1—16)可以简化为

$$r^b = C_n^b r^n \tag{1-16'}$$

由式(1—18)表示的矩阵 C_n^b 是由两个坐标系坐标轴之间的九个方向余弦组成，所以经常被称为方向余弦矩阵。而式(1—16)或(1—16′)则是通过方向余弦矩阵表示的同一向量在两个不同参考坐标系投影分量之间的转换关系。

注意式(1—16′)所用符号的规则是：方向余弦矩阵 C_n^b 的上标 b 应与等式左边的上标相同，C_n^b 的下标应与其右相邻项的上标相同。例如我们要通过方向余弦矩阵表示向量 r 在 $0-x_iy_iz_i$ 与 $o-x_py_pz_p$ 之间的转换关系，则应写成

$$r^i = C_p^i r^p$$

如果反过来用 r^i 表示 r^p 则应为

$$r^p = C_i^p r^i$$

方向余弦矩阵的上下标与其九个元素的下标之间的规则是：方向余弦矩阵 C_n^b 的上标对应矩阵元素的第一个下标；方向余弦矩阵的下标对应元素的第二个下标。而第一个下标的三个不同元素按列的次序排除，而行不变；第二个下标按行的次序排列而列不变，如下表所示：

$$C_n^b: \quad \begin{array}{c|ccc} & x_n & y_n & z_n \\ \hline x_b & C_{X_bX_n} & C_{X_bY_n} & C_{X_bZ_n} \\ y_b & C_{Y_bX_n} & C_{Y_bY_n} & C_{Y_bZ_n} \\ z_b & C_{Z_bX_n} & C_{Z_bY_n} & C_{Z_bZ_n} \end{array}$$

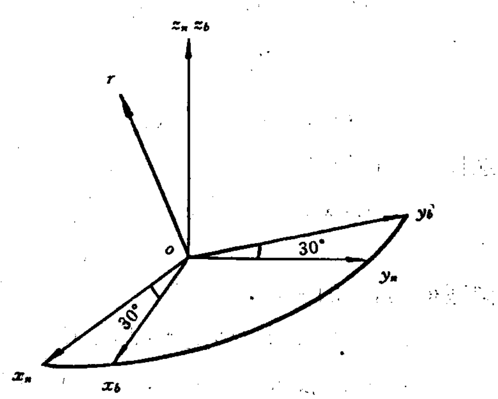

图 1—6

例：$o-x_ny_nz_n$ 与 $o-x_by_bz_b$ 的相对位置如图 1—6 所示，$o-x_by_bz_b$ 绕 oz_n 轴向右转动 30°，已知：

$$r^n = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}; \quad 求 \quad r^b = \begin{bmatrix}x_b\\y_b\\z_b\end{bmatrix} = ?$$

解：利用式(1—16′)，已知 r^n，则可求出 r^b

$$r^b = C_n^b r^n$$

下面求 C_n^b 中的诸元素：

$$C_{X_bX_n} = \cos(X_b\hat{,}X_n) = \cos30° = 0.866$$

$$C_{Y_bX_n} = \cos(Y_b\hat{,}X_n) = \cos120° = -0.5$$

$$C_{Z_bX_n} = \cos(Z_b\hat{,}X_n) = \cos90° = 0$$

$$C_{X_bY_n} = \cos(X_b\hat{,}Y_n) = \cos60° = 0.5$$

$$C_{Y_bY_n} = \cos(Y_b\hat{,}Y_n) = \cos30° = 0.866$$

$$C_{Z_bY_n} = \cos(Z_b\hat{,}Y_n) = \cos90° = 0$$

$$C_{X_bZ_n} = \cos(X_b\hat{,}Y_n) = \cos90° = 0$$

$$C_{Y_bZ_n} = \cos(Y_b\hat{,}Y_n) = \cos90° = 0$$

$$C_{Z_bZ_n} = \cos(Z_b\hat{,}Z_n) = \cos30° = 1$$

将这九个元素代入 C_n^b 中，则得

$$r^b = C_n^b r^n = \begin{bmatrix}0.866 & 0.5 & 0\\ -0.5 & 0.866 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.232\\ -0.134\\ 3.000\end{bmatrix} \qquad 解毕$$

三、方向余弦矩阵的正交性

通过上面的分析，我们得到了由方向余弦矩阵表示的两个坐标系之间的转换关系

$$r^b = C_n^b r^n \tag{1-16'}$$

按照前面讲的规则，可以反过来写成

$$r^n = C_b^n \cdot r^b$$

如果前者表示了用 r^n 来求得 r^b，那么后者则表示用 r^b 来求得 r^n。不难看出，这两个表达式中的方向余弦矩阵上下标的位置颠倒了。现在我们来看看 C_n^b 与 C_b^n 之间有什么关系。

为此我们可以根据式(1—13)，(1—14)，(1—15)的方法，求得 x_b, y_b, z_b 表示的 x_n, y_n, z_n 的表达式：

$$x_n = x_bC_{X_nX_b} + y_bC_{X_nY_b} + z_bC_{X_nZ_b} \tag{1-19}$$

$$y_n = x_bC_{Y_nX_b} + y_bC_{Y_nY_b} + z_bC_{Y_nZ_b} \tag{1-20}$$

$$z_n = x_bC_{Z_nX_b} + y_bC_{Z_nY_b} + z_bC_{Z_nZ_b} \tag{1-21}$$

同样可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{X_nX_b} & C_{X_nY_b} & C_{X_nZ_b} \\ C_{Y_nX_b} & C_{Y_nY_b} & C_{Y_nZ_b} \\ C_{Z_nX_b} & C_{Z_nY_b} & C_{Z_nZ_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \tag{1-22}$$

上式可以简写成：

$$r^n = C_b^n r^b \tag{1-23}$$

只要将式(1－8)与式(1－22)中的方向余弦矩阵的诸元素比较，就可以找到 C_n^b 与 C_b^n 之间的关系。

我们知道，方向余弦矩阵中的元素是坐标轴之间的方向余弦，各元素的两个下标即表示相应的两个轴，显然两个下标交换位置并不改变方向余弦值的大小，例如：

$$C_{X_bX_n} = \cos(X_b \hat{,} X_n)$$

$$C_{X_nX_b} = \cos(X_n \hat{,} X_b)$$

由于 x_n 与 x_b 的夹角与 x_b 与 x_n 的夹角指的同一个角，自然有 $\cos(x_b \hat{,} x_n) = \cos(x_n \hat{,} x_b)$，亦即有 $C_{X_bX_n} = C_{X_nX_b}$。

由此可见，如果把式(1－22)中方向余弦矩阵 C_b^n 中诸元素两上标的位置互换一下，矩阵内容不变，即

$$C_b^n = \begin{bmatrix} C_{X_bX_n} & C_{Y_bX_n} & C_{Z_bX_n} \\ C_{X_bY_n} & C_{Y_bY_n} & C_{Z_bX_n} \\ C_{X_bZ_n} & C_{Y_bZ_n} & C_{Z_bZ_n} \end{bmatrix} \tag{1-24}$$

将式 1－24 表示 C_b^n 的诸元素与式(1－18)表示 C_n^b 的诸元素比较一下，不难发现：C_n^b 中的元素与 C_b^n 的元素只是行和列的位置转置了。也就是说 C_n^b 和 C_b^n 是互为转置矩阵。如果用通常的转置矩阵符号 T，那么上述关系可表示为

$$C_b^n = [C_n^b]^T \tag{1-25}$$

这一关系说明了方向余弦矩阵符号中上下标的物理意义，它们的位置不能随意交换，否则就变成原矩阵的转置矩阵了。利用这个关系很容易推出方向余弦矩阵的正交性。

因有

$$r^n = C_b^n r^b \tag{1-26}$$

$$r^b = C_n^b r^n \tag{1-27}$$

利用式(1－25)，式(1－27)可写成

$$r^b = [C_b^n]^T r^n \tag{1-27'}$$

在式(1－26)两边，同时左乘以 C_b^n 的逆矩阵$[C_b^n]^{-1}$，得

$$[C_b^n]^{-1} r^n = [C_b^n]^{-1} C_b^n r^b$$

注意到矩阵乘以自身的逆矩阵是单位矩阵，即

$$[C_b^n]^{-1} C_b^n = [I]$$

代入上式得

$$r^b = [C_b^n]^{-1} r^n \tag{1-28}$$

将式(1－28)与式(1－27′)比较，不难看出

$$[C_b^n]^{-1} = [C_b^n]^T \tag{1-29}$$

这一结论证明了方向余弦矩阵的一个重要性质："方向余弦矩阵的逆矩阵等于它自身的转置矩阵"。这个重要的性质称方向余弦矩阵的正交性。亦称方向余弦矩阵为正交矩阵。具有正交性的矩阵，在求其逆矩阵时，可省去许多繁琐的运算，只要简单的转置一下就行了。这里还要不加证明地说明一下，两个正交矩阵之和，一般不再具有正交性；但两个正交矩阵之积仍然是正交矩阵。

上面我们讨论了两个坐标系之间的转换关系，这种转换关系也可以推广到两个以上坐标系之间的转换。

如果向量 r 在 $o-x_1y_1z_1$ 和 $o-x_2y_xz_2$ 之间的转换关系表示为：

$$r^2 = C_1^2 r^1$$

那末 r 在 $o-x_2y_2z_2$ 和 $o-x_3y_3z_3$ 中的转换关系可表示为：

$$r^3 = C_2^3 r^2 = C_2^3 C_1^2 r^1$$

令：

$$C_1^3 = C_2^3 C_1^2$$

那末：

$$r_1^3 = C_1^3 r^1 \tag{1-30}$$

这是向量 r 相对 $o-x_3y_3z_3$ 和 $o-x_1y_1z_1$ 之间的转换关系，其转换矩阵 C_1^3 可以直接从 $o-x_3y_3z_3$ 和 $o-x_1y_1z_1$ 之间的九个方面余弦得到，也可以通过中间矩阵 C_2^3 之间的做乘法运算得到，结果是相同的。需要注意的是：$C_1^3=C_2^3C_1^2$ 的乘法次序不能交换，因为在一般的情况下，矩阵乘法没有交换律。

由此可知，对任意两个坐标系之间的转换关系，可以下式表：

$$C_b^n = C_G^n C_p^G C_i^p C_b^i \tag{1-31}$$

四、刚体在空间的位置

所谓刚体是指：如果有某些不等于零的力系作用在一个系统的某些质点或所有的质点上，在任意时刻，两点之间的距离始终保持不变，称该系统（物体）为刚体。刚体上的点，对于固结于刚体上的坐标系是没有相对运动的，因此，利用固结在刚体上的坐标系来表示相对于参考坐标系的位置和运动是很方便的。

一个在空间自由运动的刚体，如果将刚体上的一个点固定，那么这个刚体将受到该固定点的约束，只能绕固定点转动，失去了平动的自由。如果我们再固定一个点，那末刚体将受到进一步的约束，只能作定轴转动（绕二个固定点转动）。假如这时再固定第三点（三点不在同一根连线上），那末刚体连定轴转动也不再可能了，从而完全失去运动的自由。由此我们得到结论：刚体的位置和运动，可以用刚体上三个不共线的点的位置和运动来表示。

通过数学的证明，我们只需用六个独立参数表示自由刚体在参考坐标系中的相对位置，其中三个是刚体质心的平动自由度。另外三个是刚体绕质心的转动自由度。前者反映的是刚体质心的位置变化，后者反映的是刚体方位的变化，通常用刚体的姿态角表示。

在陀螺理论中，陀螺仪是作定点转动的刚体，由于定点转动的刚体失去了平动的自由度，因此只具有三个自由度，只需用三个独立参数就能完全确定它的相对位置。通常采用三个角度参数表示。

由于刚体与坐标系固结，这个与刚体固结的坐标系的位置就代表了刚体的位置。从而把刚体的定位问题，简化为确定两个坐标系之间的相对位置。而两个坐标之间的相对位置可以用它们之间的方向余弦矩阵来表示。用大写字母 C 表示一个一般的方向余弦矩阵，用小写字母 C_{ij}

表示矩阵元素，其中下标 $i,j=1,2,3$，那么表示刚体相对位置的方向余弦矩阵为

$$C=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix} \tag{1-32}$$

矩阵 C 中实际只有三个相互独立的量，即二个坐标系之间的方向余弦角，也就是欧拉角和与欧拉角相似的卡尔丹角(亦称广义欧拉角)。

(一) 刚体定位的欧拉角：

选用三个独立的角度来表示具有一个固定点的刚体的相对位置，最早是欧拉(Euler)在1776 年提出来的。所以通常将这三个角称为欧拉角。下面我们用两个共原点坐标系的相对关系来引进欧拉角。

图 1－7 表示了共原点 o 的两个坐标系 $o-x_ny_nz_n$ 和 $o-x_by_bz_b$ 的相对位置。这一相对位置我们可以看成是通过以下的转动过程而最后形成的：最初 $o-x_by_bz_b$ 与 $o-x_ny_nz_n$ 完全重合，而后顺序经过三次简单地的转动达到图示的位置，这三次简单的转动是：

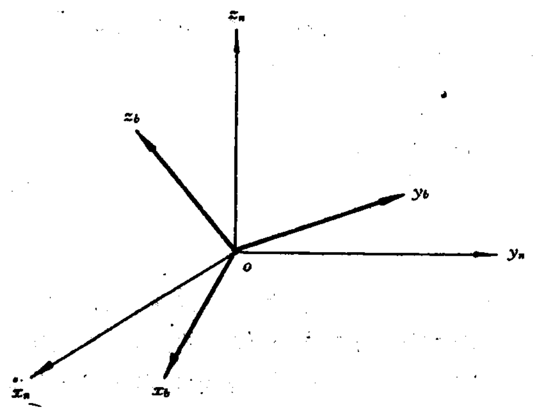

图 1－7

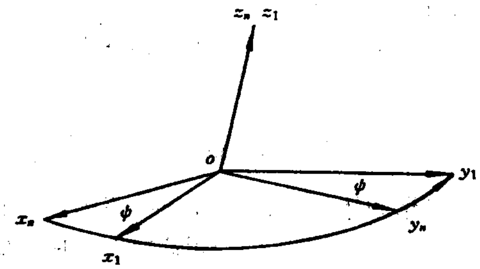

图 1－8

第一次绕 z_n 转一个 ψ 角，使 $o-x_by_bz_b$ 由最初与 $o-x_ny_nz_n$ 重合的位置转到 $o-x_1y_1z_1$ 的位置，如图 1－8 所示。这样 $o-x_ny_nz_n$ 与 $o-x_1y_1z_1$ 之间的方向余弦矩阵 C_1^n 可写成

$$C_1^n=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1-33}$$

第二次是绕 x_1 轴转 θ 角，使 $o-x_1y_1z_1$ 到达新的 $o-x_2y_2z_2$ 位置，如图 1－9 所示。这样 $o-x_1y_1z_1$ 与 $o-x_2y_2z_2$ 之间的方向余弦矩阵 C_2^1 可表示成：

$$C_2^1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{1-34}$$

第三次是绕 x_2 轴转 φ 角，使 $o-x_2y_2z_2$ 到达 $o-x_by_bz_b$ 的最终位置，如图 1－10 所示。这样 $o-x_2y_2z_2$ 与 $o-x_by_bz_b$ 之间的方向余弦矩阵为

$$C_b^2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-35}$$

一般情况下，通过上述三次简单转动，即可得到两个共原点坐标系之间的任意的位置，三次转动角的 ψ,θ,φ 叫做欧拉角。利用坐标变换的基本公式，

$$C_b^n = C_1^n C_2^1 C_b^2 \tag{1-36}$$

将式(1—33)、(1—34)、(1—35)的结果代入，得：

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi & \cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\psi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1-37}$$

这样就得到用三个欧拉角 ψ,θ,φ 表示的任意两个坐标系之间的方向余弦矩阵。

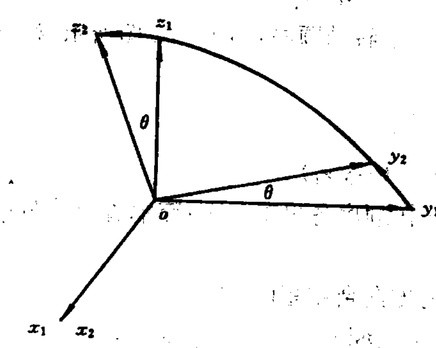

图 1—9

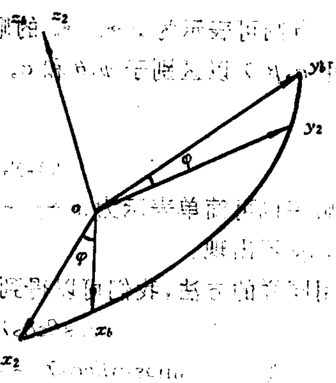

图 1—10

将三个简单转动的图 1—8、1—9、1—10 合成迭加画在一起，就得到用三个欧拉角表示两个坐标系相对位置的综合图，如图 1—11 所示。

从式(1—37)看出，用欧拉角表示的方向余弦矩阵，是很繁琐的，通常多用于经典的刚体动力学，其中欧拉角 ψ,θ,φ 为有限角位移。但实际应用的陀螺仪，由于高速旋转具有的稳定性，这些角位移只是小角位移。这就可以进行线性化处理，以避开式(1—37)中繁琐的三角函数运算。当我们进一步把 ψ,θ,φ 看成一阶小量，并略去二阶以上小量时，式(1—37)变为

$$C_b^n = \begin{bmatrix} 1 & -(\psi+\varphi) & 0 \\ (\psi+\varphi) & 1 & -\theta \\ 0 & \theta & 1 \end{bmatrix} \tag{1-38}$$