王普电路学

目　　錄

第一章　定義與電路參數

1-1　庫倫定律 (Coulomb's Law)

公元 1785 年法國物理學家庫倫 (Charles Coulomb) 以實驗確立了兩帶電體間之作用與其間距離之關係。即

兩帶電質點 q 與 q' 間之作用力 F 與各帶電質點所帶電量之乘積成正比，與兩帶電質點間距離 r 之平方成反比。

$$F \propto \frac{qq'}{r^2} \quad 或 \quad F = k\frac{qq'}{r^2}$$

此處 k 為一具有因次 (Dimension) 之比例常數，由電荷，距離及力所用之單位而定。若電荷 q 及 q' 距離 r，力 F，分別用庫倫 (Coulombs)，米 (Meters)，牛頓 (Newtons) 為單位，則

$$k = 9\times10^9 \text{ 牛頓-米}^2/\text{庫}^2 \ (\text{nt}-\text{m}^2/\text{coul}^2)$$

若我們定另一常數　$\epsilon_0 = \frac{1}{4k\pi} = 8.85\times10^{-12}$ 庫^2/牛頓-米^2

則　$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{qq'}{r^2}$$

若帶電體周圍的介質不是真空，則介質中由感應而起的電荷會減小原帶電體間的作用力。若減小的程度為 $1/k$

則兩帶電質點在介質中之作用力為 $F = \frac{1}{4\pi k\epsilon_0}\ \frac{qq'}{r^2}$

此處 k 為一沒有因次的比例常數，稱為電介質常數 (Dielectric Constant)

若令　$\epsilon = k\epsilon_0$　則　$F = \frac{1}{4\pi k\epsilon_0}\ \frac{qq'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\ \frac{qq'}{r^2}$

我們稱 ϵ 為介質之誘電係數 (Permittivity)，ϵ_0 為真空之誘電係數。

所以就真空而言 $k=1, \epsilon=\epsilon_0$，空氣之誘電係數 ϵ 比真空之誘電係數 ϵ_0 大得非常有限，通常可以 ϵ_0 視之。

由上述可知一庫倫之電荷，相當於帶有相等電荷之兩帶電質點，在真空中距離 1 米，其間之作用力恰為 9×10^9 牛頓時，各質點所帶之電量。

1-2　電位差 (Potential Difference)

兩點間之電位差 v 等於將一單位電荷由一點移到另一點所需作的功。若將一庫倫之電荷由一點移到另一點所需的功為一焦耳，則此兩點間之電位差為一伏特 (Volt)。即

1 伏特 (Volt)＝1 焦耳/庫倫 (Joule/Coulomb)

若電路上兩點間之電位差爲 v，則一帶電量爲 q 之電荷從高電位那一點經由此兩點間之電路，移動到低電位那一點，共作功 qv。

一種裝置，例如電池或發電機，如果能對經過其間的電荷作功，亦卽電荷從此裝置的低電位端移動到高電位端可獲得能量時，我們稱此裝置具有電動勢 (Electromotive Force) $e.m.f$。一裝置之 $e.m.f.$ 就是當不通電時，其高低電位兩端之間的電位差。

1-3 電流 (Current)

物質含有自由電子 (Free electrons)，能在原子間移動者，稱爲導體 (Conductor)。有電位差的電場可以使這些自由電子產生運動。

當導體中有電荷 q 從一點向另一點運動時，我們稱此導體中有電流 (Current)。如果電荷保持一定的速率由一點向另一點運動，則稱此電流爲定電流 (Constant Current)。如果運動的速率恰爲每秒一庫倫則稱此電流之大小爲一安培 (Ampere)。卽

1 安培＝1 庫倫/秒

如果電流的大小不是定値而隨時間有變化的時候，則任何時刻之瞬時電流 (Instantaneous Current)

$$i(t)\ 安培=\frac{dq(t)}{dt}\ 庫倫/秒$$

電流的方向，按習慣約定，定爲反電子移動的方向爲電流之正方向。

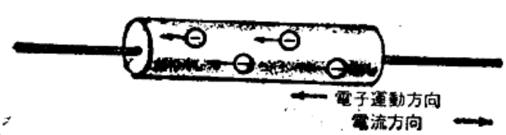

圖 1-1

1-4 功率 (Power)

電功率 P 等於外加電壓 v 與所產生之電流 i 之乘積

$$P\ (瓦特)=v\ (伏特)\times i\ (安培)$$

由定義，正電流的方向與電壓電源同方向，如圖 1-2 所示，卽正電流方向由電壓電源之正極流出。若 P 爲正値，則表電源供給電路能量。

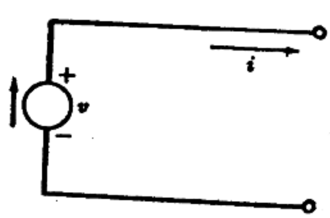

圖 1-2

如果功率 P 是時間 t 的週期函數，又週期爲 T 時，則

$$平均功率\quad P=\frac{1}{T}\int_0^T P\,dt$$

1-5　能量 (Energy)

因為功率 P 是能量轉換 w 對於時間之變率。即

$$P=\frac{dw}{dt}$$

所以由 t_1 至 t_2 一段時間內能量之轉換

$$W=\int_{t_1}^{t_2} P\,dt$$

1-6　電阻 (Resistance)

純電阻器兩端的電位差 $v(t)$ 與通過之電流 $i(t)$ 成正比。比例常數 R 就稱為此電阻器之電阻 (Resistance)。其單位以伏特/安培或歐姆 (Ohms) 表之。即

$$v(t)=Ri(t) \qquad i(t)=\frac{v(t)}{R}$$

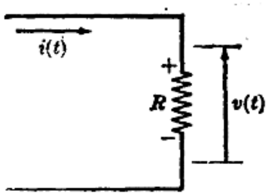

圖 1-3

至於電壓 $v(t)$ 及電流 $i(t)$ 是否為定值(如直流)或是時間的正弦或餘弦函數並無限制，上面的式子仍然適用。

英文字母之小寫 ($v.i.p.$) 表一般時間的函數，大寫 ($V.I.P$) 表定值。極大值則在右下角加註，以 V_m, I_m, P_m 表之。

1-7　電感 (Inductance)

電路中之電流變化時，與電路相鏈的磁力線亦隨之變化。此磁力線的變化，使電路因感應而生電動勢 ($e.m.f.$) v。若導磁係數為定數，則感應電動勢 v 與電流 (對於時間) 之變化率成正比。比例常數 L 就稱為電路之自感 (Self-Inductance) 或電感 (Inductance) 如圖 1-4 所示。即

$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt} \quad 或 \quad i(t)=\frac{1}{L}\int v\,dt$$

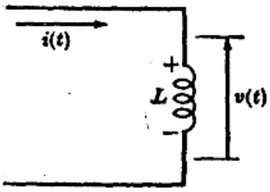

圖 1-4

若 v 以伏特為單位 di/dt 以 安培/秒 為單位。則 L 的單位為 伏特-秒/安培 或亨利 (Henries)。如果電流之變化率為每秒 1 安培在電路中的感應 $e.m.f.$ 恰為 1 伏特時，此電路之自感即 1 亨利 ($1h$)。

1-8　電容 (Capacitance)

電容器 (Capacitor) 兩端之電位差 v 與電容器所帶之電荷 q 成正比，比例常數 C 稱為此電容器之電容 (Capacitance)。即

$$q(t)=Cv(t) \quad 或 \quad i=\frac{dq}{dt}=C\frac{dv}{dt}, \quad 或 \quad v(t)=\frac{1}{C}\int i\,dt$$

如 q 以庫倫爲單位，v 以伏特爲單位，則電容 C 的單位就是

庫倫/伏特　或　法拉 (Farads)。

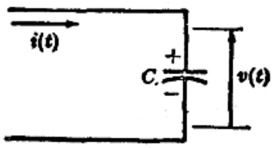

圖 1-5

若使電容器兩極板間之電位差每增加 1 伏特所需之電荷 q 恰爲 1 庫倫時，此電容器之電容就是 1 法拉 ($1f$)。因法拉單位實在過大，較常用的單位有

1 微法 (Microfarad) $=1\mu f=10^{-6}f$

及 1 微微法 (Micromicro farad) $=1\mu\mu f=10^{-12}f$

1-9 克希荷夫定律 (Kirchhoff's Laws)

(1) 克希荷夫電流定律：流入接合 (Junction) 的電流總量等於流出此接合的電流總量。如果流入接合的電流當作「正」，流出的電流當作「負」，則克希荷夫電流定律即等於說，流入或流出任一接合電流之代數和爲零。

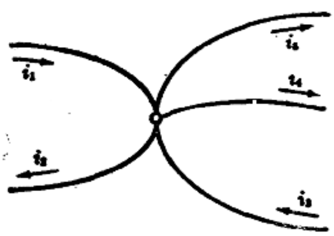

圖 1-6　Σ 流入之電流 = Σ 流出之電流

即　$i_1+i_3=i_2+i_4+i_5$

或　$i_1+i_3-i_2-i_4-i_5=0$

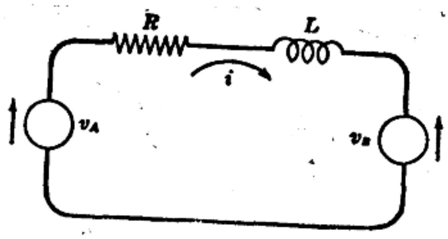

圖 1-7　Σ 電壓升 = Σ 電壓降

即　$v_A+v_B=R_i+L\left(\frac{di}{dt}\right)$

或　$v_A-v_B-R_i-L\frac{di}{dt}=0$

(2) 克希荷夫電壓定律：沿任何「通路」(Closed Circuit) 之全部壓升必等於其全部壓降，換句話說就是：沿著一通路之全部電位差之代數和爲零。如果通路上的電源電壓不止一個，而且方向互相均不一致時，則與所假設之電流方向之電源電壓就當作正的。

電路元件與電壓，電流之關係

元　件	兩端之電位差	其中的電流
電　阻　R	$v(t)=Ri(t)$	$i(t)=\frac{v(t)}{R}$
電　感　L	$v(t)=L\frac{di}{dt}$	$i(t)=\frac{1}{L}\int v\,dt$
電　容　C	$v(t)=\frac{1}{C}\int i\,dt$	$i(t)=C\frac{dV}{dt}$

公制所用的單位

量	單　位	量	單　位
長 度 l	公尺 m （米）	電 荷 Q,q	庫倫 C （庫）
質 量 m	公斤 kg （瓩）	電 位 V,v	伏特 V （伏）
時 間 t	秒 sec （秒）	電 流 I,i	安培 amp（安）
力 F,f	牛頓 nt （牛頓）	電 阻 R	歐姆 Ω （歐）
能 量 W,w	焦耳 j （焦）	電 感 L	亨利 h （亨）
功 率 P,p	瓦特 w （瓦）	電 容 C	法拉 f （法）

【例　　題】

1-1　如圖 1-8 所示之電路，外加電壓 $V=45$ 伏特，求電流，各個電阻兩端之電位差及各個電阻所損耗之功率。

【解】　由克希荷夫電壓定律

$V=I(2)+I(6)+I(7)$,　　$45=15I$,　　$I=3$ 安

2 歐姆電阻兩端之壓降 $V_2=IR_2=3(2)=6$ 伏。同理

$V_6=3(6)=18$ 伏，　$V_7=21$ 伏。

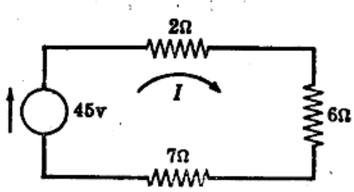

圖 1-8

2 歐姆電阻所耗功率　$P_2=V_2I=6(3)=18$ 瓦，　或

$P_2=I^2R_2=3^2(2)=18$ 瓦，　同理 $P_6=V_6I=54$ 瓦，　$P_7=V_7I=63$ 瓦。

1-2　兩個定電壓電源 V_A 及 V_B 作用於同一電路，如圖 1-9 所示。求各電源所輸出的功率。

【解】　由克希荷夫電壓定律

$20-50=I(1)+I(2)$　　$I=-10$ 安

V_A 輸出之功率 $=V_AI=20(-10)=-200$ 瓦

V_B 輸出之功率 $=V_BI=50(10)=500$ 瓦。

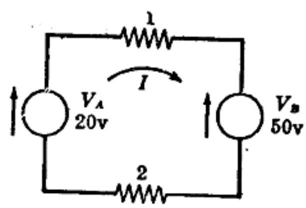

圖 1-9

1-3　如圖 1-10(a) 之電路，電源電壓 $v(t)=150\sin\omega t$ 求電流 $i(t)$，瞬時功率 $P(t)$ 及平均功率 P。

【解】　$i(t)=\frac{1}{R}v(t)=\frac{150}{25}\sin\omega t=6\sin\omega t$ 安

$P(t)=v(t)i(t)=(150\sin\omega t)\ (6\sin\omega t)$

$=900\sin^2\omega t$ 瓦

$$P=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 900\sin^2\omega t\,d(\omega t)=\frac{900}{\pi}\int_0^\pi\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\ d(\omega t)$$

$$=\frac{900}{2\pi}\left[\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t\right]_0^\pi=450\text{ 瓦。}$$

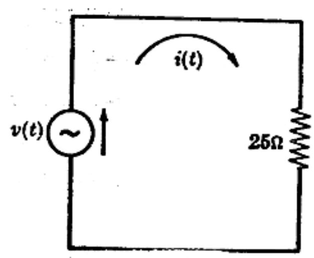

圖 1-10(a)

由圖 1-10(b) 可見，電壓 $v(t)$，電流 $i(t)$ 與常數 R 之關係。瞬時電壓及電流均同方向，因此其乘積亦恆爲正。因此，不論通過電阻之電流方向如何，電功率恆由電源所輸出。

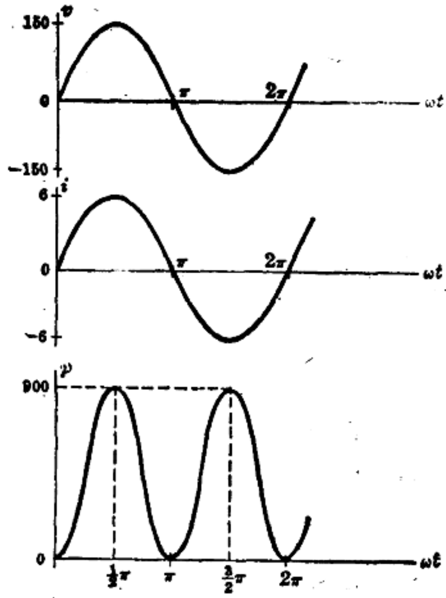

圖 1-10(b)

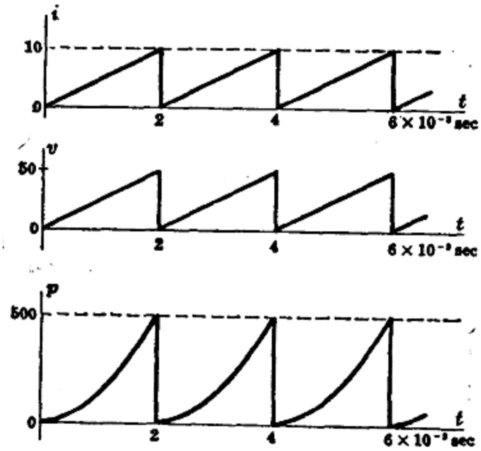

圖 1-11

1-4 如圖 1-11 所示電流函數爲週而復始的鋸齒，若此電流通過 —5Ω 的純電阻。求 $v(t)$ $p(t)$ 及平均功率 P。

【解】 因 $v(t)=Ri(t)$， $v_{max}=Ri_{max}=5(10)=50$ 伏，

當 $0<t<2\times10^{-3}$ sec， $i=\dfrac{10}{2\times10^{-3}}t=5\times10^3t$， 則 $v=Ri=25\times10^3t$，

$p=vi=125\times10^6t^2$，

$$P=\frac{1}{2\times10^{-3}}\int_0^{2\times10^{-3}}125\times10^6t^2dt=167 \text{ 瓦。}$$

1-5 如圖 1-12 之電路，5 歐電阻中的電流 $i(t)=6\sin\omega t$ 安。(a) 求 10 歐及 15 歐兩電阻中的電流及 a 至 b，b 至 c 間的電位差。(b) 求各電阻所消耗的瞬時功率及平均功率。

【解】 (a) 5 歐及 15 歐兩電阻間之電位差同爲 v_{bc}，

$v_{bc}=i_5R_5=(6\sin\omega t)(5)$

$=30\sin\omega t$ (伏)

$i_{15}=v_{bc}/R_{15}=2\sin\omega t$。(安) 而

$i_{10}=i_{15}+i_5=8\sin\omega t$ (安) 及 $v_{ab}=i_{10}R_{10}$

$=80\sin\omega t$ (伏)。

(b) 瞬時功率 $p=vi$ 因此

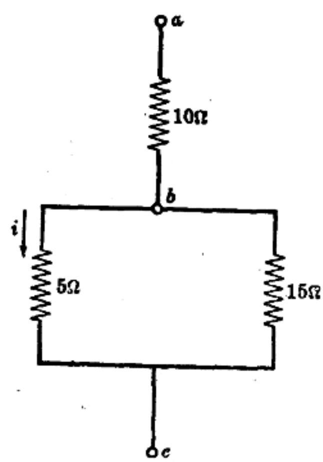

圖 1-12

$p_5=(30\sin\omega t)(6\sin\omega t)=180\sin^2\omega t$（瓦）　同理

$p_{15}=60\sin^2\omega t$（瓦），　$p_{10}=640\sin^2\omega t$（瓦），　5 歐電阻之平均功率

$P_5=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}180\sin^2\omega t\,d(\omega t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}180\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\omega t\right]d(\omega t)=90$ 瓦　同理

$P_{15}=30$ 瓦，　$P_{10}=320$ 瓦。

1-6　一純電感 $L=0.02$ h，外加電壓 $v(t)=150\sin 1000t$，求電流 $i(t)$，瞬時功率 $p(t)$ 及平均功率 P。

【解】 $i(t)=\frac{1}{L}\int v(t)dt=\frac{1}{0.02}\int 150\sin 1000t\,dt$

$=\frac{150}{0.02}\left(\frac{-\cos 1000t}{1000}\right)=-7.5\cos 1000t$ 安

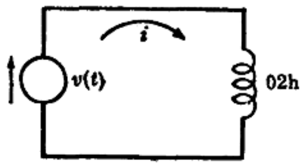

圖 1-13(a)

$p=vi=-150(7.5)\left(\frac{1}{2}\sin 2000t\right)$

$=-562.5\sin 2000t$ 瓦，　$\left[\text{因 } \sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\right]$

平均功率 P 由圖 1-13(b) 可見顯然為零。

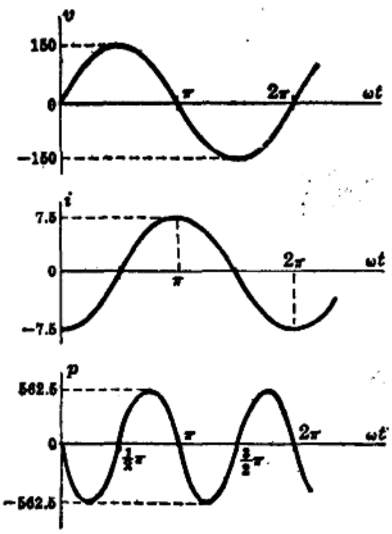

圖 1-13(b)

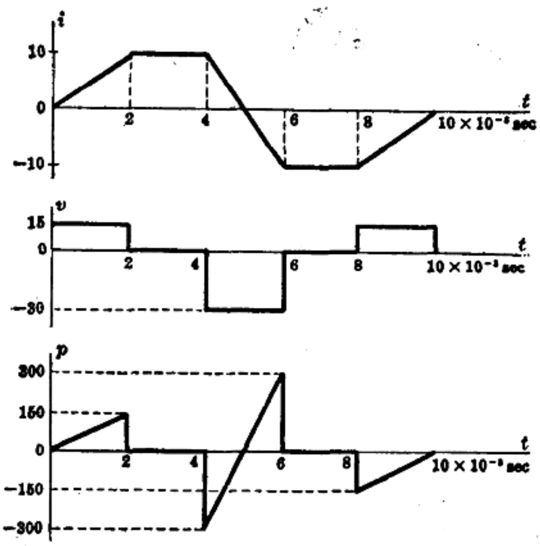

圖 1-14

1-7　一純電感 $L=3\times10^{-3}$ h，通過如圖 1-14 波形之電流。試求並劃出電壓 $v(t)$ 及瞬時功率 $p(t)$ 之圖形。又平均功率 P 多少？

【解】 瞬時電流 $i(t)$ 如圖 1-14 所示

(1) $0<t<2\times10^{-3}$ 秒　　$i=5\times10^3 t$

(2) $2\times10^{-3}<t<4\times10^{-3}$ 秒　　$i=10$

(3) $4\times10^{-3}<t<6\times10^{-3}$ 秒　　$i=10-10\times10^3(t-4\times10^{-3})=50-10\times10^3 t$

(4) $6\times10^{-3}<t<8\times10^{-3}$ 秒　　$i=-10$

(5) $8\times10^{-3}<t<10\times10^{-3}$ 秒　　$i=-10+5\times10^3(t-8\times10^{-3})=-50+5\times10^3t$

對應之電壓爲

(1) $v_L=L\frac{di}{dt}=3\times10^{-3}\frac{d}{dt}(5\times10^3t)=15$ 伏

(2) $v_L=L\frac{di}{dt}=3\times10^{-3}\frac{d}{dt}(10)=0$

(3) $v_L=L\frac{di}{dt}=3\times10^{-3}\frac{d}{dt}(50-10\times10^3t)=-30$ 伏，等。

對應之瞬時功率爲

(1) $p=vi=15(5\times10^3t)=75\times10^3t$ 瓦

(2) $p=vi=0(10)=0$ 瓦

(3) $p=vi=-30(50-10\times10^3t)=-1500+300\times10^3t$ 瓦，等。

平均功率 P，顯然爲零。

1-8　一電壓 $v(t)$ 加於兩串聯電感 L_1 及 L_2，求一等效電感 (Equivalent Inductance) L_e，而能代此二串聯電感並產生同樣之電流。

【解】 $v(t)=L_1\frac{di}{dt}+L_2\frac{di}{dt}=L_e\frac{di}{dt}$,　　所以 $L_e=L_1+L_2$。

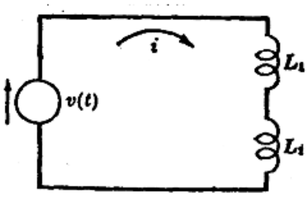

圖 1-15

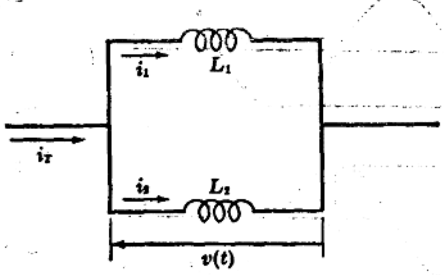

圖 1-16

1-9　如圖 1-16 求並聯電感 L_1 及 L_2 之等效電感 L_e。

【解】 設並聯電感兩端之電位差爲 $v(t)$ 又電感 L_1 及 L_2 中的電流各爲 i_1 及 i_2。

由克希荷夫電流定律若總電流 i_T 則

$$i_T=i_1+i_2 \quad 或 \quad \frac{1}{L_e}\int v\,dt=\frac{1}{L_1}\int v\,dt+\frac{1}{L_2}\int v\,dt$$

所以 $\frac{1}{L_e}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$　或　$L_e=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}$　即

等效電感之倒數等於各個並聯電感倒數之和。

1-10　通過一純電感之電流 $i(t)=I_m\sin\omega t$。假如當 $t=0$ 時，存於磁場中的能量爲零。試計算並劃出能量函數 $\omega(t)$ 之圖。

【解】 $v(t)=L\frac{d}{dt}(I_m\sin\omega t)=\omega LI_m\cos\omega t$

$$p(t)=vi=\omega LI_m^2\sin\omega t\cos\omega t=\frac{1}{2}\omega LI_m^2\sin 2\omega t$$

$$w(t)=\int_0^t \frac{1}{2}\omega LI_m^2 \sin 2\omega t\,dt=\frac{1}{4}LI_m^2[-\cos 2\omega t+1]=\frac{1}{2}L_1I_m^2\sin^2\omega t$$

在 $\omega t=\pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2$，等時，儲存之能量爲極大值 $\frac{1}{2}LI_m^2$。在 $\omega t=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$ 等時，儲存之能量爲零。如圖 1-17。當 $p(t)$ 爲正時能量流向負載，則儲存之能量增加。當 $p(t)$ 爲負時，能量由電感器之磁場送回電源。在純電感中並無能量之消耗。因此平均功率爲零。也就是沒有淨能量之轉換。

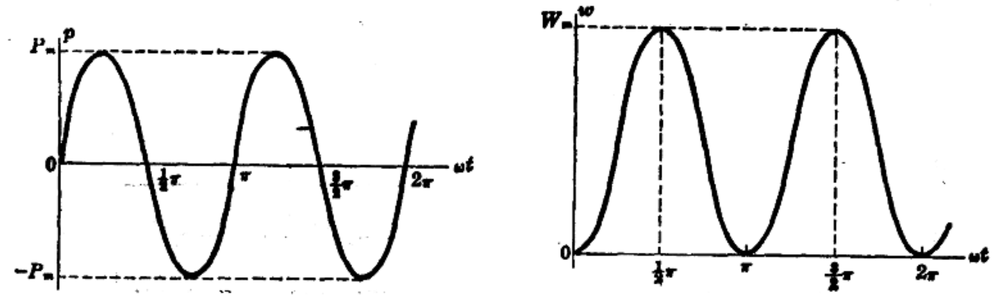

圖 1-17

1-11　有一純電容，外加電壓 $v(t)=V_m\sin\omega t$，求電流 $i(t)$，功率 $p(t)$ 電荷 $q(t)$ 及儲存於電場中的能量 $w(t)$。假設 $t=0$ 時，$w(t)=0$。

【解】 $i(t)=C\frac{dv}{dt}=\omega CV_m\cos\omega t$ 安，　　$p(t)=vi=\frac{1}{2}\omega CV_m^2\sin 2\omega t$ 瓦，

$q(t)=C_v=CV_m\sin\omega t$ 庫，　$w(t)=\int_0^t p\,dt=\frac{1}{4}CV_m^2(1-\cos 2\omega t)=\frac{1}{2}CV_m^2\sin^2\omega t$ 焦，

當 $\omega t=\pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2$ 等時，儲存之能量達極大值 $\frac{1}{2}CV_m^2$ 焦，當 $\omega t=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$ 等

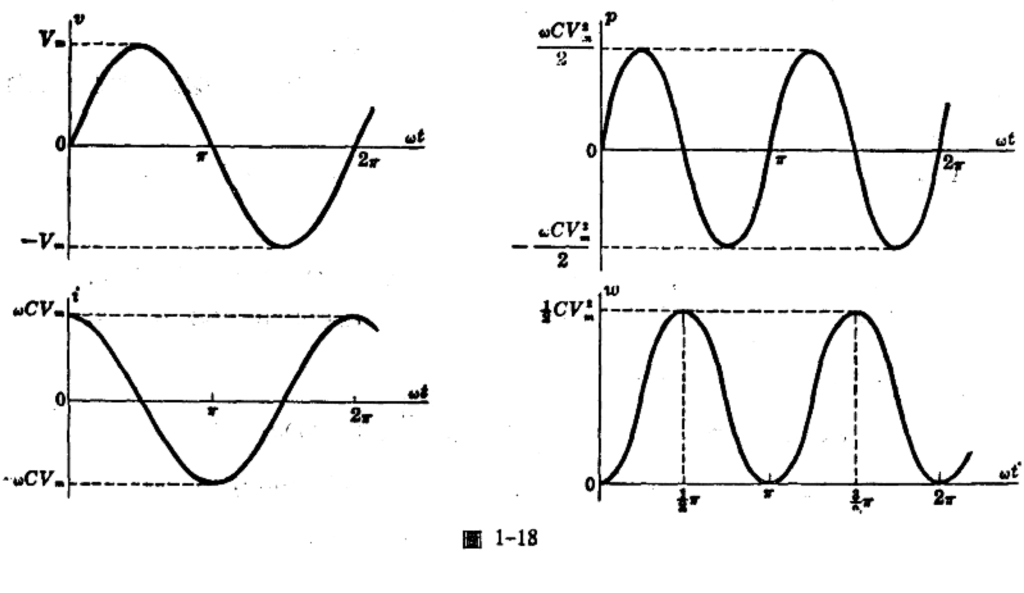

圖 1-18

時，儲存之能量爲零。如圖 1-18，當 $p(t)$ 是正的時候，表示能量由電源向電容器，而儲存於電容器電場中的能量 $w(t)$ 增加。當 $p(t)$ 是負的時候，此儲存於電場中的能量又送回電源。因此平均功率 P 是零，當然也就沒有淨能量的轉換。

1-12 求如圖 1-19 兩電容器 C_1 及 C_2 並聯後之等效電容 C_e。

【解】 設兩電容器並聯後兩端之電位差爲 $v(t)$，通過 C_1 及 C_2 之電流各爲 i_1 及 i_2，總電流爲 i_T。則由克希荷夫電流定律

$$i_T=i_1+i_2 \quad \text{或} \quad C_e\frac{d}{dt}v(t)=C_1\frac{d}{dt}v(t)+C_2\frac{d}{dt}v(t) \quad \text{或} \quad C_e=C_1+C_2$$

所以電容並聯後之等效電容等於各個電容之和。

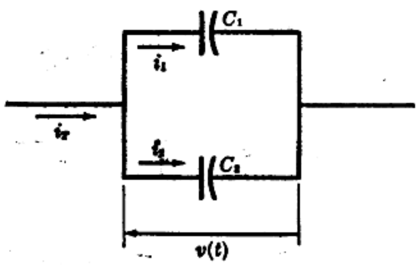

圖 1-19

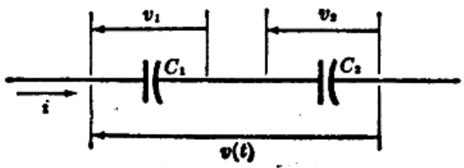

圖 1-20

1-13 如圖 1-20 求兩串聯電容 C_1 及 C_2 之等效電容 C_e。

【解】 假設 C_1 及 C_2 串聯電路之兩端有一電位差，則此電位差若等於 C_1 及 C_2 兩電容器電位差之和，

即 $$\frac{1}{C_e}\int i(t)dt=\frac{1}{C_1}\int i(t)dt+\frac{1}{C_2}\int i(t)dt$$

則 $$\frac{1}{C_e}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} \quad \text{或} \quad C_e=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

所以電容串聯後之等效電容之倒數等於各個電容倒數之和。

1-14 通過一串聯電路之電流 $i(t)$ 如圖 1-21 所示，求各個元件兩端之電位差，並以同一時間座標軸劃出各電壓圖形。並劃出電容器上電荷 $q(t)$ 的圖形。

【解】 電阻器兩端 $v_R=Ri$ 所以 v_R 與電流函數圖形相同，唯最大値 $2(10)=20$ 伏，

電感器兩端 $v_L=L\dfrac{di}{dt}$。

(1) $0<t<1\times10^{-3}$ 秒， $i=10\times10^3t$， $v_L=(2\times10^{-3})(10\times10^3)=20$ 伏。

(2) $10^{-3}<t<2\times10^{-3}$ 秒， $i=10$ 安， $\therefore\ v_L=(2\times10^{-3})(0)=0$ 伏 等。

電容器兩端 $v_0=\dfrac{1}{C}\int idt$。

(1) $0<t<1\times10^{-3}$ 秒， $v_C=\dfrac{1}{500\times10^{-6}}\displaystyle\int_0^t(10\times10^3t)dt=10\times10^6t^2$ 伏。

(2) $10^{-3}<t<2\times10^{-3}$ 秒， $v_C=10+\dfrac{1}{500\times10^{-6}}\displaystyle\int_{10^{-3}}^t(10)dt$

$=10+20\times10^3(t-10^{-3})$ 伏。

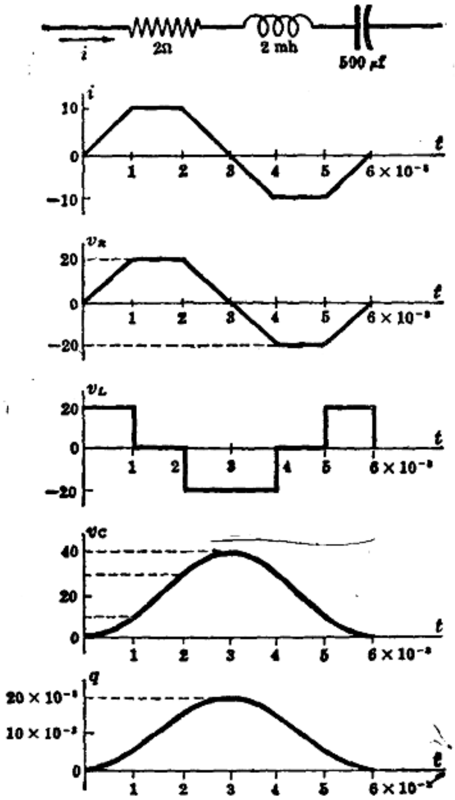

圖 1-21

$q(t)$ 之圖形，亦可由 $q=Cv_C$ 之關係立刻劃出。注意，當 i 是正時 q 與 v_c 均遞增，亦即電容器上電荷與電容器兩端之電位差均遞增；當 i 是負時，則兩者均遞減。

【習　　題】

1-1　三電阻器 R_1, R_2, R_3 串聯，外加電壓 V。若 R_1 兩端爲 20 伏，R_2 消耗功率 25 瓦，R_3 之電阻爲 2 歐，通過之電流爲 5 安培。求電壓 V_0。

1-2　兩並聯電阻 R_1 及 R_2 之等效電阻 R_e 爲 10/3 歐姆。設一電流以 2 與 1 之比通過此並聯電路之兩電阻。求電阻 R_1 與 R_2 之值。

1-3　如圖 1-22 (a) 求此電路中四電阻之等效電阻 R_e。

(b) 若外加電壓 $V=100$ 伏，那一電阻之功率最大？

圖 1-22

1-4　兩定電壓電源加於如圖 1-23 之電路中。求各電源所供給電路之功率 P。