三　　　　角

成都电訊工程学院

一九七二年五月

毛主席语录

唯物辩証法的宇宙观主張从事物的内部，从一事物对他事物的关系去研究事物的发展，即把事物的发展看做是事物的必然的自己的运动，而每一事物的运动都和它的周圍其它事物互相联系着和互相影响着。

第二章　三　角

第一节　直角三角形的边角計算、銳角的三角函数

一、正弦和余弦

例　题

首先，我们通过一个简单的问题，说明直角三角形边角计算的分析方法。

例．我英勇的雷达兵牢记毛主席**“提高警惕，保卫祖国”**的伟大教导，日夜守卫着我国的神圣领空。设用雷达测示雷达到敌机的仰角为$\alpha=12°30'$，斜距为$\gamma=42$公里。问：

（1） 敌机的高度y是多少？

（2） 雷达到敌机的水平距离x是多少？

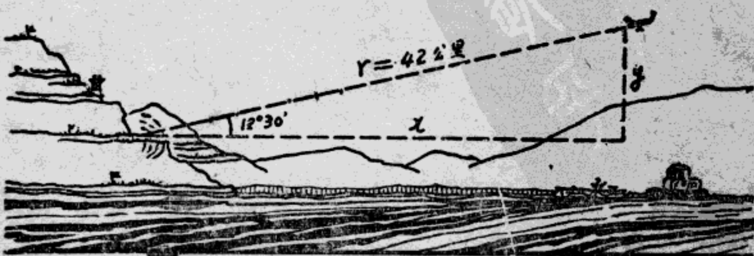


图　1.1

我们设想过敌机向地面作一条垂线，垂线与地面交于一点c，则雷达敌机、点c组成一个直角三角形，见图1.1，下面为了叙述方便起见，将直角三角形中

锐角α所对的边叫角α的对边，锐角α的相邻的直角边叫角α的邻边，直角所对的边

它们的对边和斜边的比总是某一个定值，邻边和斜边的比也总是某一个定值：

$$\frac{对边}{斜边}=\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}$$

$$\frac{邻边}{斜边}=\frac{AC}{AB}=\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC_2}{AB_2}$$

上例就是利用这两个比解出来的。

由此可见，直角三角形边和角之间有着自己的内部规律：

当一个锐角 α 给定后，不论各边的长短如何变化，它们的边比是固定的，只有当锐角 α 变化时，边比才会变化。就是说，直角三角形的边比只和锐角 α 的大小有关。

这种关系，就是一种函数关系，即是说，如果对于一个变量的任意一个确定的值，另一个变量就按照一定的规律，有一个确定的值和它对应，那末，第一个变量就叫做自变量，第二个变量叫做这个自变量的函数。函数也叫因变量。这里，边比随角 α 的变化而变化，所以边比就是角 α 的函数，角 α 是自变量。这个函数，叫做三角函数，又因角 α 是锐角，所以叫做锐角三角函数。

我们把锐角 α 的对边和斜边的比，叫做角 α 的正弦，记作

$$\sin\alpha=\frac{对边}{斜边}$$

邻边和斜边的比，叫做角 α 的余弦。记作

$$\cos\alpha=\frac{邻边}{斜边}$$

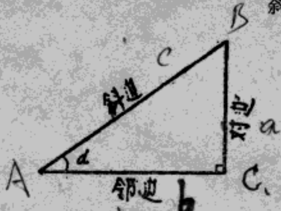


图1.4

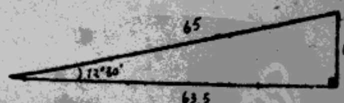


图1.5

例如，在前面的例题中，图1.5

$$\sin12°30'=\frac{14}{65}=0.215$$

$$\cos12°30'=\frac{63.5}{65}=0.977$$

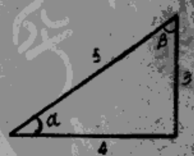


图1.6

由于直角三角形有两个锐角，因此在考虑对边、邻边时，必须注意是对哪一个锐角而定的。

例. 图1.6的直角三角形两个锐角分别用 α、β 表示，求 α、β 的正弦、余弦。

解：α 的对边为 3，邻边为 4，

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\qquad \cos\alpha=\frac{4}{5}$$

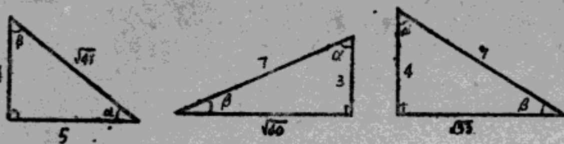
β 的对边为 4，邻边为 3，

$$\sin\beta = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5}$$

练　习

1　正弦的数值能不能大于 1？余弦的数值能不能大于 1？

2.　由以下直角三角形求 α、β 的正弦、余弦：



（第 2 题）

几个常用角的正弦、余弦

45°、30°、60° 是常用的特殊角，它们的正弦、余弦可以由三角形的性质求出。

1.　45° 角：

因为角度给定后，不论直角三角形的边长如何，边比都是一定的。因此，对45° 的角，可设两直角边为 1，如图 1.7 由勾股弦定理求出斜边为 $\gamma=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，因此。

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ 。$$

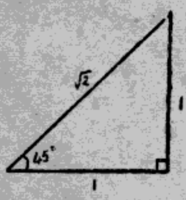


图1.7

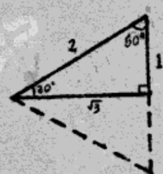


图1.8

2.　30° 和60° 角

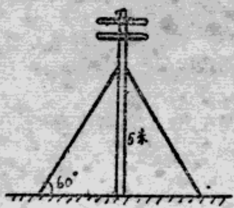
将等边三角形作一个角的平分线，就将等边三角形分为两个30° 的直角三角形。如图 1.8，由图可见，30°的对边为斜边的一半，设30° 的对边为 1，则斜边为 2，由勾股定理求出邻边为$\sqrt{3}$，（$x^2+1^2=2^2$，$x^2=2^2-1^2=3$，$x=\sqrt{3}$），因此，

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\ ,$$

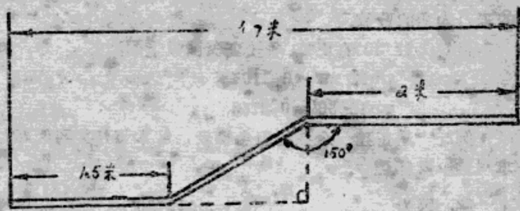
$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

为多少米？

5. 在离地面高5米处引拉线用以固定电线杆，拉线与地面成60°角，问每根拉线长多少米？拉线基础离杆底的距离是多少米？



（第5题）



（第6题）

6. 根据第6题图的尺寸求钢筋的总长。

7 计算下列数值

$2\sin30°$， $2\cos30°$，

$\sin30° + \sin60°$， $\sin60° + \cos30°$，

$\sin45° + \cos45°$ $\sin45° \cos45°$

$1-2\sin45°\cos45°$， $\sin60°-2\sin30° \cos30°$，

$\frac{1}{2}\sin60° + \cos45° - \sin30°\cos60°$

$(1-\cos45° + \sin30°)(1-\sin45° + \cos60°)$，

$\sin30°\cos60° + \cos30°\sin60°$，

$\cos30°\cos60° - \sin30°\sin60°$，

$\sin^2 45° + \cos^2 45°$，

$\sin^2 60° + \cos^2 60°$，

$3\sin45° - 4\sin^3 45°$，

$4\cos^3 30° - 3\cos30°$，

二、正弦、余弦表，正弦、余弦的应用

正弦、余弦表

各种角度的正弦、余弦都可查表求出，见《数学用表》。表的示意图如下：

正 弦

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′	
↓ 12°	→				→	0.2164						
24°	→				→	0.4147						
						0.9763 ←					←	12° ↑
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A

余 弦

正弦、余弦的簡单性质

前面说了如何查正弦、余弦表。看到表，大家会产生两个问题:

（1） 为什么正弦、余弦可以利用一张表?为什么 sin20°和 cos70°查出来是同一个数值?

（2） 表中每隔6′给一个角，表中沒有的角如何查正弦、余弦?

下面結合这两个问题，分析一下正弦、余弦的性质。

（1） 設角 α、β 之和为90°，$\alpha+\beta=90°$，叫做互为余角，由图1.13可见，α 的对边是 β 的邻边，α 的邻边是 β 的对边，因此，

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\cos\beta\ ,\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\sin\beta$$

因为 $\beta=90°-\alpha$，所以

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\alpha=\cos(90°-\alpha),\\&\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)\end{aligned}}$$

即：一角的正弦等于余角的余弦，

一角的余弦等于余角的正弦，如

$$\sin20°=\cos70°,\qquad \sin30°=\cos60°$$
$$\sin40°=\cos50°,\ \cdots\cdots$$

因此正弦、余弦可以利用同一张表。

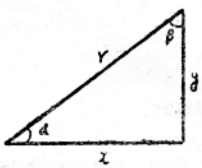


图1.13

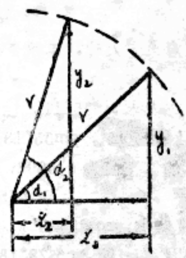


图1.14

（2）表中沒有的角如何查正弦、余弦? 这可利用表中右边三行的修正值，为了能正确地利用修正值，需要对正弦、余弦的变化情况作一分析

由表中看到:

当角度变大时，正弦变大，余弦变小;

当角度变小时，正弦变小，余弦变大。

这个性质可以一般証明如下:

設斜边 r 保持不变，由角 α_1 转到角 α_2，见图1.14，α_1、$<\alpha_2$，由图可见，这时对边由小变大，邻边由大变小: $y_1<y_2$，$x_1>x_2$。因此

$$\sin\alpha_1=\frac{y_1}{r}<\sin\alpha_2=\frac{y_2}{r}$$

解：
$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{27.5^2-22.6^2}$$
$$=\sqrt{(27.5+22.6)(27.5-22.6)}$$
$$=\sqrt{50.1\times4.9}=15.7$$
$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{22.6}{27.5}=0.822\ ,$$
$$\angle A=55^\circ18'$$
$$\angle B=90^\circ-55^\circ18'=34^\circ42'$$

下面举几个应用问题。

例3. 在离地面高4米处引拉线用以固定电线杆，拉线与地面成50°角，图1.17。问每根拉线长多少米？

解：问题就是对50°的直角三角形已知对边，要求斜边，由

$$\frac{4}{r}=\sin50^\circ\quad 即\quad r\times\sin50^\circ=4$$

所以每根拉线长为

$$r=\frac{4}{\sin50^\circ}=\frac{4}{0.766}=5.2(米)$$

有些问题并不是直接给出直角三角形问题，需要引一些辅助线化为直角三角形问题，举例如下：

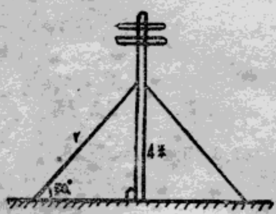


图1.17

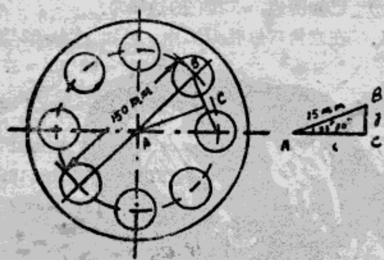


图1.18

例4. 图1.18是一个圆形工件的示意图，在设计图纸上给出：在和工件同圆心的一个直径为150mm的圆周上，要等距地钻八个孔，问相邻两孔的孔心距是多少毫米？

解：先分析一下解决问题的思路。

相邻两孔的孔心和圆心，三点连线，组成一个三角形，如图1.18，孔心距就是三角形的一条边长，这个三角形不是直角三角形，怎么解这个问题呢？

这个三角形是等腰三角形，我们作孔心连线的中垂线（辅助线），就把这个等腰三角形分为两个全等的直角三角形，一个锐角是22°30′，对边是孔心距的一半。因此只要求出对边，对边的2倍就是孔心距。

由图可见，直角三角形的斜边为75mm，锐角为22°30′，由

9.0
2/2
6.7.3

$$\frac{y}{75}=\sin 22°30'$$

所以

$$y=75\times\sin 22°30'=75\times 0.3827=28.7\text{mm}$$

相邻两孔的孔心距为

$$2y=2\times 28.7=57.4\text{mm}$$

例5. 皮带传动装置如图1.19，大圆轮半径为 $R=200$mm，小圆轮半径为 $r=80$mm，A、B、C、D为皮带与圆轮的切点，两圆的圆心距为 $l=600$mm，设不计实际安装时皮带的伸长与下垂，求皮带的全长(即求$AB+CD+\overset{\frown}{AmC}+\overset{\frown}{BnD}$)

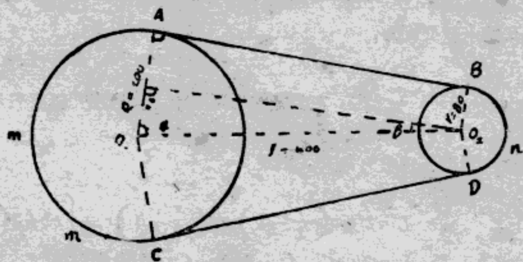


图1.19

解：(1)分析：

皮带的全长由四部分组成，两段是圆弧$\overset{\frown}{AmC}$及$\overset{\frown}{BnD}$，两段是直线AB及CD，圆弧长等于圆心角（用弧度表示）与圆半径的乘积，所以我们先求图1.19中的角α，因为在直角三角形O_1O_2E中，角α的邻边和斜边都知道，所以可求出角α，这样，$\overset{\frown}{BnD}$的圆心角为2α，$\overset{\frown}{AmC}$的圆心角为$360°-2\alpha$，有了这两个圆心角，就可以求出圆弧$\overset{\frown}{BnD}$与$\overset{\frown}{AmC}$的长。

再看直线长AB及CD的长，都等于图1.19中的O_2E，而O_2E可由直角三角形O_1O_2E求出。

总之，我们求出了角α，问题就迎刃而解了。

(2) 具体计算（下面是用计算尺算的）

因为 $O_1E=R-r=200-80=120$mm 所以

$$\cos\alpha=\frac{120}{600}=0.2 \qquad \alpha=78°30'$$

$\overset{\frown}{BnO}$圆心角 $2\alpha=2\times 78°30'=157°$

$\overset{\frown}{AmC}$圆心角 $360-2\alpha=360°-157°=203°$.

因为 $1°=0.0175$弧度，所以

$2\alpha=157\times 0.0175=2.743$弧度，

$\overset{\frown}{BnD}=2.74\times 80=219$mm；

$360°-2\alpha=203\times 0.0175=3\ 54$弧度，

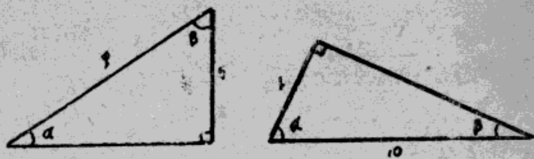
$\overset{\frown}{AmC}=3.54\times 200=708$mm

$$\text{tg}45° = \text{ctg}45° = \frac{1}{1} = 1;\qquad \text{tg}30° = \text{ctg}60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{tg}60° = \text{ctg}30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}\ 。$$

练　　习

1. 哪一个角的正切、余切都等于 1？哪些角的正切小于 1，余切大于 1？
2. 由下列直角三角形，求 α、β 的正切、余切。



（第 2 题）

3. 计算下列各式的数值：

① $\cos60° - \text{tg}45° + \frac{3}{4}\text{tg}^2 30° + \cos^2 30° - \sin^2 30°$；

② $\text{ctg}^2 30° + 2\sin60°\cos45° + \text{tg}45° - \text{ctg}60° - \cos^2 30°$；

③ $\dfrac{\text{ctg}60° - \text{tg}45°}{\text{tg}60° - \text{ctg}45°}$ 。

正切、余切表

各种角度的正切、余切都可查表求出，见《数学用表》。表的示意图如下，表的用法和正弦、余弦表类似。

正　　　　切

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′	
↓ 26°	0.4877										2.050	26° ↑
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A

余　　　　切

由表查出

$$\text{tg}26° = 0.4877,\qquad \text{ctg}26° = 2.050\ 。$$

例1. 现在来解本段开头的例题，就是求图1.20屋架的支撑杆高 $BC = y$。

解： $\dfrac{y}{10} = \text{tg}26°$　　　$y = 10\text{tg}26° = 10 \times 0.4877 = 4.88$米

答：支撑杆 BC 高为4.88米。

例2. 求图1.26直角三角形的对边 y。

$$\frac{y}{5}=\text{tg}36°,$$

$$y=5\text{tg}36°=5\times0.7265=3.633。$$

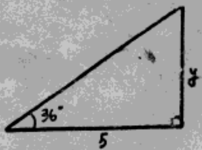


图1.26

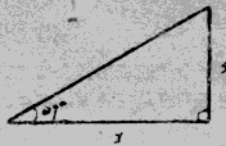


图1.27

例3. 求图1.27的直角三角形的邻边 x。

解： 可用余切求解：

$$\frac{x}{3}=\text{ctg}29°,$$

$$x=3\text{ctg}29°=3\times1.804=5.412。$$

也可用正切求解：

$$\frac{3}{x}=\text{tg}29°,\qquad x=\frac{3}{\text{tg}29°}=\frac{3}{0.5543}=5.412。$$

正切、余切的简单性质

我们研究以下两个问题：（1）为什么正切、余切可以利用同一张表？（2）表中没有的角如何求正切、余切？

（1）设 α、β 互有余角，图1.28，α 的对边为 β 的邻边，α 的邻边为 β 的对边，

$$\text{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\text{ctg}\beta,$$

$$\text{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\text{tg}\beta,$$

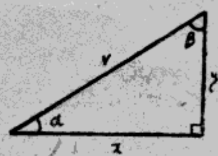


图1.28

因为 $\beta=90°-\alpha$，所以

$$\boxed{\text{tg}\alpha=\text{ctg}(90°-\alpha),\qquad \text{ctg}\alpha=\text{tg}(90°-\alpha)}$$

即：一角的正切等于其余角的余切，一角的余切等于其余角的正切。如

$$\text{tg}20°=\text{ctg}70°，\text{tg}30°=\text{ctg}60°，\text{tg}40°=\text{ctg}50°，\cdots\cdots$$

因此正切、余切可以利用同一张表。

（2）由表中看到：

当角度变大时，正切变大，余切变小；

当角度变小时，正切变小，余切变大。

这个性质可以一般证明如下：设邻边 x 保持不变，由图1.29可见，当角 α_1 变到 α_2 时，$\alpha_1<\alpha_2$，对边变大，$y_1<y_2$，因此

的钻床只能垂直钻孔，工人师傅将钢板一头垫高再钻孔。设在离钢板一端500mm处垫高，问需垫多高，就能钻出 85° 的斜孔？

解：由图 1.31 可见，只要将钢板倾斜 5°，就能垂直钻出 85° 的斜孔。设在离钢板一端 500mm 处垫高 $y$$mm$，则 $\frac{y}{500}=\text{tg}5°$，

$$y=500\text{tg}5°=500\times0.0875=43.8mm$$

例3. 某工件有一个V形槽，图纸上绘出尺寸如图1.32，问槽的深度是多少？

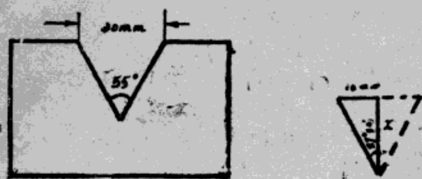


图1.32

解： 如图1.32，$\frac{10}{x}=\text{tg}27°30'$，所以

$$x=\frac{10}{\text{tg}27°30'}=\frac{10}{0.5206}=19.2mm$$

练　　习

1. 查表求下列数值：

$\text{tg}24°24'$，　$\text{tg}24°30'$，　$\text{ctg}69°54'$，　$\text{ctg}69°36'$。

2. 查表求下列角 α

$\text{tg}\alpha=0.3979$，　$\text{tg}\alpha=1.4605$，　$\text{ctg}\alpha=0.7265$　$\text{ctg}\alpha=1.1792$

3. 查表回答下列问题：

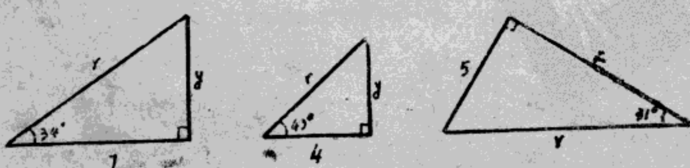
(1) $\text{tg}20°+\text{tg}40°$是不是等于$\text{tg}60°$？

(2) $\text{ctg}10°+\text{ctg}20°$是不是等于$\text{ctg}30°$？

(3) $\text{tg}40°$是不是等于 $2\,\text{tg}20°$？

(4) $\text{ctg}40°$是不是等于 $2\,\text{ctg}20°$？

4. 求下列直角三角形的未知边：



（第4题）

$$=0\ 。$$

例3. 求证 $1-\cos^2\alpha\mathrm{tg}^2\alpha=\cos^2\alpha$

解: $$1-\cos^2\alpha\mathrm{tg}^2\alpha=1-\cos^2\alpha\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=1-\sin^2\alpha$$

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，即$1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$，所以

$$1-\cos^2\alpha\mathrm{tg}^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$$

例4. 求证 $\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha)=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

解: $\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha)=\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha$,

因为 $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha=1$，则得

$$\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha)=1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

例5. 设α为锐角，化简 $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\cdot\mathrm{ctg}\alpha$

解: 由 $1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$，即$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\cos\alpha$，代入上式，

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$$

練 习

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{8}$，求 $\cos\alpha$，$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{ctg}\alpha$ 。
2. 已知 $\sin\alpha=0.7$，求 $\cos\alpha$，$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{ctg}\alpha$ 。
3. 已知 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{8}{5}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\mathrm{ctg}\alpha$ 。
4. 已知 $\cos\alpha=0.9$，求 $\sin\alpha$，$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{ctg}\alpha$ 。

5 证明下列等式

（1） $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$，　（2） $\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$

（3） $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$

6. 证明下列等式

（1） $\cos\alpha\mathrm{tg}\alpha=\sin\alpha$　（2） $\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{ctg}^2\alpha=1$

（3） $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0$　（4） $(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha=1$

（5） $\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$　（6） $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

（7） $\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}=1$

7. 化简下列各式:

（1） $\frac{\sin\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}$　（2） $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

1. 直角三角形边角的规律

直角三角形当一个锐角给定后，不论各边的长短如何，边比是固定的，只有当锐角 α 变化时，边比才会变化。就是说，直角三角形的边比和锐角 α 的大小有关。

2. 锐角的三角函数

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x} \quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x} \quad \csc\alpha=\frac{r}{y}$$

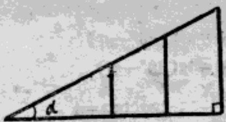


图1.38

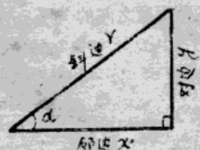


图1.39

当锐角 α 变大时：正弦变大，余弦变小，正切变大，余切变小；当锐角 α 变小时：正弦变小，余弦变大，正切变小，余切变大。

3. 特殊角的三角函数值

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sqrt{2}=1.414\ , \qquad \sqrt{3}=1.732$$

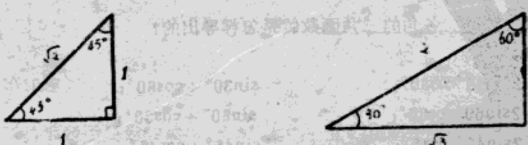
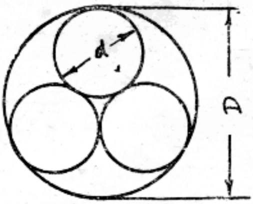


图1.40

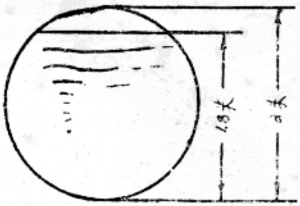
mm。现要作一个固定搬手，问这个搬手的开口 b 有多少毫米？

21．皮带传动装置的大圆轮半径为 $R=22.5\text{cm}$，小圆轮半径为 $r=12.5\text{cm}$，轮心距为 3 米，求皮带的全长。

22．用三根直径为 d 的钢絲拧成一股粗钢绳，求钢绳的直径。



（第22题）



（第23题）

23．直径为 2 米的涵洞，过水时量得水深为1.8米，求过水断面的面积。

24．三角形的两边长为16.2cm 及 18.9cm，这两边的夹角为65°42′，求两边上的三角形的高，又问如何求另一条边上的三角形之高？

25．化简下列各式：

（1） $\cos\alpha\,\text{tg}\alpha$　　（2） $\sin\alpha\,\text{ctg}\alpha$

（3） $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$　　（4） $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

（5） $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$　　（6） $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha}$

（7） $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\text{tg}^2\alpha$　　（8） $1-\sin\alpha\,\text{tg}\alpha\cos\alpha$

（9） $(1-\sin\alpha)\text{tg}^2\alpha(1+\sin\alpha)$　　（10） $\text{tg}42^\circ\text{ctg}42^\circ$

（11） $\text{tg}46^\circ\text{tg}44^\circ$　　（12） $\text{ctg}58^\circ\text{ctg}45^\circ\text{ctg}32^\circ$

（13） $\dfrac{1}{\text{tg}43^\circ}\cdot\dfrac{1}{\text{tg}47^\circ}$　　（14） $\dfrac{1}{\text{ctg}72^\circ}\cdot\dfrac{1}{\text{ctg}18^\circ}-\cos^2 30^\circ$

（15） $\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ-\alpha)$

26．证明下列恆等式：

（1） $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha=1$

（2） $\dfrac{1}{\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$

（3） $\text{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\text{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$

（4） $(\sin\alpha+\text{tg}\alpha)(\cos\alpha+\text{ctg}\alpha)=(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$。

（5） $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha(1-\text{tg}\alpha)(1+\text{tg}\alpha)$。

第二节　任意角的三角函数

毛主席教导我们：**“就人类认識运动的秩序說来，总是由認識个别的和特殊的事物，逐**

步地扩大到认識一般事物。”

本节说明如何将锐角三角函数推广到任意角的三角函数。

一、直角坐标与任意角

（1） 直角坐标 研究任意角的三角函数，要在直角坐标平面内来讨论，故先研究直角坐标。我们在代数里知道，实数可以用数轴来表示，所谓数轴，就是在一条直线上取定一点O叫做原点，一个单位长$OA=1$和指定的正方向（通常取以原点O的右端为正）用箭头表示。如图2.1。有了数轴的概念，实数就和直线上的点建立了一一对应关系。同样，我们可以把这种方法推广到平面上，也就是直角坐标。在平面上作两条互相垂直的直线，一条叫做x轴（或横轴），另一条叫做y轴（或纵轴），合称为坐标轴，它们的交点O叫坐标原点。在坐标轴上一般取相同的单位长。x轴在原点O的右方为正，左方为负；y轴在原点的上方为正，下方为负。这两条直线把平面分成四个部分，叫做四个象限。这就是平面的直角坐标系。图2.2

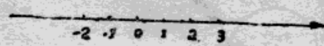


图 2.1

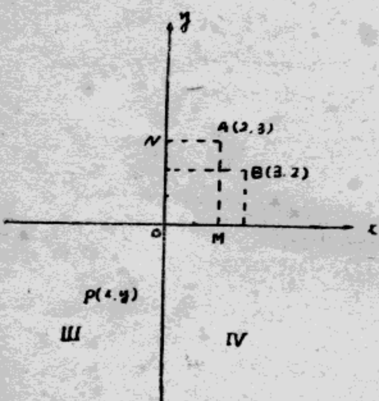


图 2.2

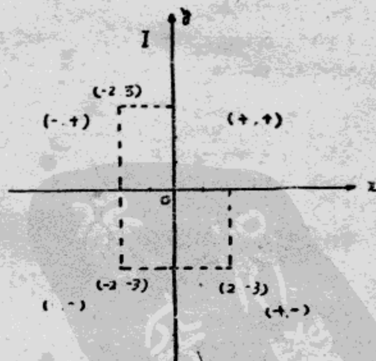


图 2.3

有了直角坐标，平面上的点就和一对实数建立起一一对应的关系。例如在第一象限内有一点A，它向x轴作垂线，在x轴的正方向交于点M，若$OM=2$，又向y轴作垂线，在y轴的正方向交于点N，若$ON=3$，我们就用这对数2、3来表示点A，并称为点A的坐标，记为A（2、3）如图2.2。反过来，如果有一点B，它的坐标是（3、2），我们就在x轴上正方向取3个单位长处作一垂线，而在y轴上的正方向取2个单位长处作一垂线，这两条垂线的交点就是B点，图2.2。一般我们就用一对实数x，y来表示平面上的一点P的坐标，记为P（x，y）。图2.2。由于不同象限的点到坐标轴的垂线，其垂足在坐标轴上所处的方向不同，因而不同象限的点它们的坐标也就有不同的正负号，其符号如图2.3所示。并画出

$$\frac{2\pi}{3}=120°,\ \pi=180°,\ \frac{3\pi}{2}=270°,\ 2\pi=360°,$$

$1=57°18'$，$2=114°36'$ 等等。

例1. $\sin\frac{\pi}{6}=\sin30°=\frac{1}{2}$，

$$2\cos\frac{\pi}{6}=2\cos30°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},$$

$$\cos1=\cos57°18'=0.5402\ 。$$

例2. $2\sin\frac{1}{2}$，前面的 2 是普通的数，$\sin\frac{1}{2}$中的$\frac{1}{2}$是弧度，

故 $$2\sin\frac{1}{2}=2\sin\frac{57°18'}{2}\approx2\sin28°39'$$

$$=2\times0.4795=0.9590\ 。$$

练　习

1. 在直角坐标系中画出下列各点：

$$(1,4),(-1.5,2),\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ -2\right),$$

$$(0,-1),(-2,0),(0,3)\ 。$$

2. 写出坐标原点和坐标轴上任意点的坐标。

3. 在直角坐标平面内作出下列各角，说明它们各是第几象限的角：

$30°$，$60°$，$120°$，$-150°$，$-210°$，$-240°$，$300°$，$330°$ 。

4. 飞轮每分钟转 300 转，问：

（1） 飞轮每分钟转多少角度？

（2） 飞轮每秒钟转多少角度？

5. 什么叫角的弧度？$0°$，$45°$，$90°$，$270°$ 各等于多少弧度？$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，π，2π，3π 各等于多少度？

6. 度与弧度是怎样换算的？

7. 将下列各角化为弧度：

$7.5°$，$15°$，$22°30'$ 。

8. 将下列各角的弧度化为度：

$\frac{3\pi}{2}$，$\frac{4\pi}{5}$，5π，$\frac{\pi}{8}$，1.5，3 。

9. 求下列各三角函数的数值：

$\sin\frac{\pi}{3}$，$\sin\frac{\pi}{4}$，$\cos\frac{\pi}{3}$，$\cos\frac{\pi}{4}$，$\sin1$，

$2\sin0.5$，$\frac{2}{3}\sin\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}$，$\mathrm{tg}1$，$\frac{3}{4}\mathrm{tg}\frac{3}{4}$ 。

10. 用弧度表示等边三角形，等腰直角三角形的各角。

11. 齿轮有 40 个齿，若它旋转了：

$$\frac{y}{r}=\sin\alpha，即\ y=r\sin\alpha$$

当 α 在 90° 到 180° 之间时，钝角 α 不能组成直角三角形。我们看到 α 的补角 $180°-\alpha$，是一个锐角，

$$\frac{y}{r}=\sin(180°-\alpha)，\quad 即\quad y=r\sin(180°-\alpha)\ 。$$

当 α 在 180° 到 270° 之间，和 α 在 270° 到360° 之间的情形，（注意这两种情形 y 都是负值），也可写出另外两个公式，請读者自行写出。

总之，当 α 由 0° 变到 360°，y 随 α 变化的规律，要分为四种情况写公式。

分析原因，就是由于我们只有锐角三角函数的概念。

还有一些问题，如果只限于锐角的三角函数，也会造成用公式表示时的繁琐现象，为了克服这个缺点，我们将锐角三角函数推广到任意角的三角函数。

任意角的正弦概念

设 α 为任意角，以角 α 的顶点为坐标原点 0，以正 x 轴为角 α 的始边。再以 0 为园心作半径为 r 的园，角 α 的终边与园交于点 A，A 的坐标为（x，y）如图2.9 。

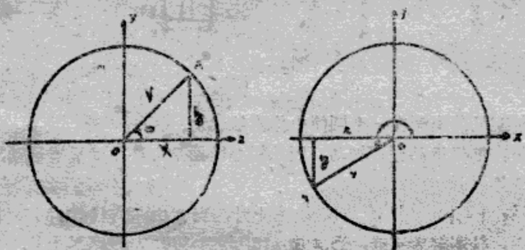


图2.9

由图 2.9 的右图看到，当 α 为锐角时，$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，因此，在坐标平面内，锐角的正弦是纵坐标 y 与半径 r 的比。

怎样推广到任意角的正弦呢？因为任意角包括了锐角，所以推广后的正弦，当任意角是锐角时，应当和原来的锐角正弦一致。因此，我们还是从纵坐标与半径的比来考虑。

我们看：不论角 α 在第几象限，也不论园的半径有多大，只要角 α 固定。则 A 点的纵坐标 y 与半径 r 的比，总是某个定值。

即 y 与 r 的比值只与角 α 有关，我们把这个比叫做任意角 α 的正弦：

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{y}{r}}$$

当任意角是锐角时，这个概念和原来的锐角正弦一致，但是，这里和前面不同的是，因为半径 r 总是正数，而坐标 y 有正有负，所以 $\sin\alpha$ 的正负，由纵坐标 y 的正负决定。