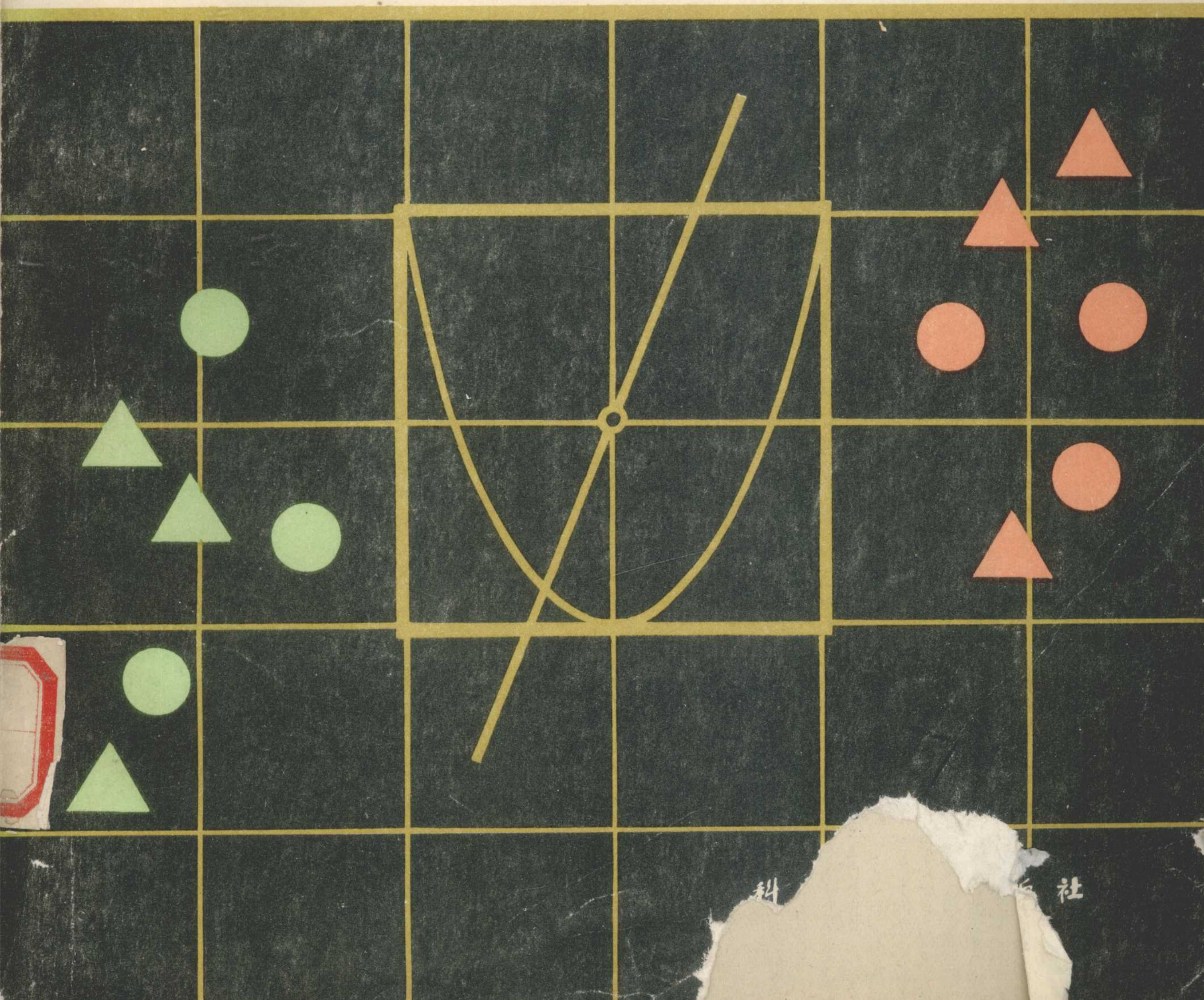
匈牙利奥林匹克数学竞赛题解

〔匈〕Й.库尔沙克　Д.诺依柯姆
Д.哈约希　Я.舒拉里

XIONGYALI AOLINPIKE SHUXUEJINGSAI TIJIE



科　　社

内　容　提　要

本书收集了1894年至1974年匈牙利奥林匹克数学竞赛的两百多个试题及解答，一题多解，并有理论说明。虽然用中学生学过的初等数学知识就可以解答这些试题，但是它又涉及许多高等数学的课题。参阅此书不仅有助于锻炼逻辑思维能力，对进一步学习高等数学也颇有好处。

本书可供中学生、中学教师及广大知识青年学习与参考。

Венгерские математические олимпиады

Й. Кюршак　Д. Нейкомм
Д. Хайош　Я. Шурани
МИР МОСКВА 1976

* * *

匈牙利奥林匹克数学竞赛题解

胡湘陵　译

*

科学普及出版社 出版（北京西郊友谊宾馆）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
中国人民解放军第七二一二工厂印刷

*

开本：787×1092毫米1/16　印张：20　字数：510千字
1979年12月第一版　1979年12月第一次印刷
印数：1－300,000册　定价：1.40元
统一书号：13051·1001　本社书号：0001

中 译 者 的 话

本书译自苏联世界出版社1976年出版的《Венгерские математические олимпиады》,包括1894年到1974年匈牙利奥林匹克数学竞赛的试题和解答。

匈牙利是举办中学数学竞赛最早的国家，自1894年匈牙利物理—数学协会通过了关于举办中学毕业生奥林匹克数学竞赛的决议起，每年十月举行这种竞赛。仅仅由于两次世界大战和匈牙利事件间断过 7 年。

在历届竞赛的优胜者中，有些成了世界著名学者,例如1897年的优胜者利波特・费叶尔，在富里叶级数的可和性理论方面做出了许多出色工作。1898年的优胜者忒奥多耳・冯・卡门是著名的应用力学家和工程师，对航空和航天技术的发展有过卓越的贡献，他的优秀学生中有我国著名科学家钱学森、郭永怀和钱伟长。1903年的优胜者阿尔伏瑞德・哈尔提出了哈尔测度。马赛尔・黎斯是1904年的优胜者，在泛函分析中提出了黎斯凸性定理。而1912年的优胜者嘎波尔・塞格，他和波里亚合著的《分析中的定理和问题》，至今仍享有盛名。

按照匈牙利的传统习惯，每次竞赛出三道题，限四小时做完，允许使用任何参考书。这些试题是别具风格的，虽然用中学生学过的初等数学知识就可以解答，但是又涉及许多高等数学的课题。中学生通过做这些试题，不但可以检查自己对初等数学掌握的程度，提高灵活运用这些知识解题以及逻辑思维的能力，还可以接触到一些高等数学的概念和方法，对于以后学习高等数学有很大帮助。

本书对所有试题都有详尽解答，叙述严谨，思想活跃。作者对每一道题都尽可能地从各种不同的角度入手，给出各种不同的解答，并通过某些解法，向读者介绍这些试题的来龙去脉，引导读者去研究改变试题条件时所发生的情况，以及在试题所给条件下所能得到的最好结果。只要有可能，作者还作了各种推广，介绍一些研究成果和目前的状况，使读者通过阅读一道题的解答获得较多的教益。

原书是匈牙利学者编的。在译成俄文时，除扩充了一些内容外，还把一些理论性的内容归并成为74条理论说明,即书中§1—§74。每节都涉及一道试题,题中星号★表示请读者参阅书中的这一部分。原书的试题、解答及理论说明是作为三部分分开排的。为了方便读者，我们将它们改排到一起。

这本书可以作为中学生的课外读物，以提高他们对数学的兴趣和思维能力，也可以作为中学数学老师的教学参考书和课外数学小组的辅导材料。此外，它还可以帮助我们研究匈牙利中学数学的教学经验和数学教育发展趋势。

中国科学院应用数学研究所方伟武、裴定一和徐伟宣同志仔细校订了本书译稿。在校订过程中，又得到秦元勋同志的支持。在这里一并向他们表示衷心感谢。

由于译者水平所限，不当之处，在所难免，恳请读者批评指正。

1979　于北京

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

一、1894年试题及解答

1．证明：对于同样的整数 x 和 y，表达式

$$2x+3y \quad 和 \quad 9x+5y$$

能同时被17整除.

【证明1】

1） 首先我们来弄清楚：如果表达式 $2x+3y$ 等于某个任意给定的整数 k，x 和 y 可以取怎样的整数值. 假设

$$2x+3y=k, \tag{1}$$

这时

$$x=\frac{k-3y}{2}=-y+\frac{k-y}{2}. \tag{2}$$

因此，仅当表达式 $\frac{k-y}{2}$ 等于某个整数 s 时，x 才能是整数. 由 $\frac{k-y}{2}=s$ 得

$$y=k-2s,$$

再由等式（2）即得

$$x=-y+s=3s-k.$$

因此仅当

$$x=-k+3s, \quad y=k-2s \tag{3}$$

时整数 x 和 y 才能满足等式（1），其中 s 是任意的整数.

反之，当 s 取任意的整数时，我们可以由公式（3）得到整数 x 和 y，它们满足等式（1）.

2） 用类似的方法我们可以求得：如果

$$9x+5y=l, \tag{4}$$

其中 l 是某个给定的整数，那么 x 和 y 能取什么整数值.

由等式（4）解出 y，得

$$y=\frac{l-9x}{5}=-2x+\frac{l+x}{5}. \tag{5}$$

因此，仅当表达式 $\frac{l+x}{5}$ 等于某个整数 t 时，y 才能取整数值. 但这时

$$x=5t-l,$$

再由等式（5）即得

$$y=-2x+t=-9t+2l.$$

因此仅当

$$x=5t-l, \quad y=-9t+2l \tag{6}$$

时，两个整数 x 和 y 才满足等式（4），其中 t 是任意整数.

反之，当 t 取任意的整数时，我们可以由公式（6）求得整数 x 和 y，它们满足等式(4).

3) 由1)中的证明知，若表达式 $2x+3y$ 是17的倍数(即等于形如 $17n$ 的整数，这里 n 是任意的整数)，则 x 和 y 一定可以表示成

$$x=-17n+3s, \quad y=17n-2s$$

的形式，其中 s 是任意的整数.

但这时

$$9x+5y=9(-17n+3s)+5(17n-2s)=17(-4n+s).$$

因此表达式 $9x+5y$ 所取的值也是17的倍数.

同样，从2)中的证明知，使表达式 $9x+5y$ 为17的倍数的整数 x 和 y，可以表示成

$$x=5t-17m, \quad y=-9t+34m.$$

这样一来，

$$2x+3y=17(-t+4m)$$

也是17的倍数★.

【证明 2】 为了简单起见，我们记

$$u=2x+3y, \quad v=9x+5y,$$

于是

$$3v-5u=17x.$$

上一关系式可以表示成

$$3v=5u+17x, \tag{1}$$

$$5u=3v-17x. \tag{2}$$

如果 x 和 y 是使 u 能被17整除的整数，那么由关系式(1)，$3v$ 也能被17整除. 因为乘积 $3v$ 的第一个因子不能被素数17整除，所以欲使整个乘积能被17整除，仅仅只有在 v 能被17整除时才有可能.

同样可以证明：如果 x 和 y 是使 v 能被17整除的整数，那么由关系式(2)，u 也能被17整除★.

§1. 整数的可除性及分类[1]

如果对于某个整数 a 和不为零的整数 b，可以找到这样一个整数 k，使得等式 $a=bk$ 成立，那么就说 a 能被 b 整除. 在这种情况下，数 a 叫做数 b 的**倍数**，数 b 叫做数 a 的**约数**.

整数 a，b，k 并不一定是正的，它们之中的任何一个都可以是负的，而数 a 和 k 甚至可以为零.

如果 a 能被 b 整除，而 b 能被 c 整除，那么 a 能被 c 整除.

如果 a 和 a' 能被 b 整除，那么 $a+a'$ 和 $a-a'$ 也能被 b 整除.

如果 b 是不为零的整数 a 的约数，那么 b 的**绝对值**不能超过 a 的**绝对值**[2]. 因此，每一个不为零的整数只有有限个不同的约数. 例如，数12的约数为±1，±2，±3，±4，±6，±12.

通常在求整数的约数时，仅限于求它的**正**约数，因为所有的负约数可以通过改变正约数

[1] 为了进一步理解上述题解，这里给出相应的数学知识，下同.

[2] 正数或零的**绝对值**就是它自己。负数的**绝对值**是一个正数，和原来的数仅仅是符号不同. 数 a 的绝对值用 $|a|$ 来表示。例如，$|5|=|-5|=5$.

的符号而得到.

正单位和负单位（即数＋1和－1）除了1以外，没有其它的正约数．所有绝对值大于1的整数至少有两个正约数：它自身的绝对值和1．

如果绝对值大于1的整数 p，除了 $|p|$ 和1以外，没有其它的正约数，那么 p 就叫做**素数**.

如果某个绝对值大于1的整数 a，至少有一个不同于 $|a|$ 和1的正约数（我们用 b 表示这个约数），那么 a 可以表示成 $a=kb$ 的形式，这里的 b 和 k 表示整数，且满足不等式 $1<|k|<|a|$．这样一来，在这种情况下，数 a 可以表示成两个整数乘积的形式，这两个整数的绝对值大于1而小于 $|a|$．这样的数 a 叫做**复合数**.

零可以被任何整数整除.

这样一来，整数可以被分成四类：

正单位和负单位，

素数，

复合数，

零（构成单独的一类）.

数论研究数的可除性和许多与它相近的问题．它的基础早在欧几里得的书,《几何原本》的卷Ⅶ－Ⅸ中就奠定了.

§2．素数的一个重要性质

第1题的证法2利用了下面的素数的性质.

1）**如果两个整数中的任何一个都不能被某一个给定的素数 p 整除，那么它们的乘积也不能被 p 整除.**

为了证明这个论断，只要研究自然数❶就行了，因为一方面，任何数 N 和 $-N$ 具有相同的约数，另一方面，任何一个数的负约数乘上（－1）以后就变成了它的正约数.

于是，我们可以把上述论断变成下面的形式来进行证明：

如果某一个自然数 a 不能被素数 p 整除，那么乘积 ab 仅当 p 能除尽第二个因子 b 的时候才能被 p 整除.

于是，假设给定了正素数 p 和某一个不能被 p 整除的数 a．设 B 是自然数 b 的集合，这里的 b 是那些使乘积 ab 能被 p 整除的自然数（显然，集合 B 包含数 p 本身和它的倍数）．我们来求包含在 B 中的最小的数．这样的数是存在的．事实上，只要在数

$$a\cdot 1,\quad a\cdot 2,\quad \cdots,\quad a\cdot(p-1),\quad a\cdot p \qquad (1)$$

之中寻求能被 p 整除的数就行了．显然，$a\cdot p$ 一定能被 p 整除．如果在序列（1）中，$a\cdot m$ 是第一个能被 p 整除的数，那么 m 是集合 B 中最小的数.

我们来证明，一方面，**所有包含在 B 中的数都能被 m 整除**，而另一方面，数 m **只可能是素数 p**.

事实上，假设属于集合 B 的某一个数 b 不能被 m 整除．设在比 b 小的 m 的倍数中，mq 是最大的，即

$$b=mq+r,$$

---

❶ 通常把正整数叫做自然数．有点名气的数学家布尔巴吉还把0算作自然数．在我们的命题里，任何一个数都不会是0，因为已知它们不能被 p 整除，而0可以被任何数整除．——俄译编辑注.

其中 r 表示数 1，2，…，$m-1$ 中的某一个．我们来证明，在这种情况，小于 m 的数 r 应该包含在集合 B 中，尽管这与数 m 的定义相违背．事实上，将等式两边乘以 a，我们得到

$$ab=amq+ar,$$

由此

$$ar=ab-(am)\cdot q.$$

右端的第一项能被 p 整除．第二项也能被 p 整除，因为括弧中的乘积能被 p 整除．因此，ar 也能被 p 整除，但这是不可能的，因为 $0<r<m$，而在和 a 的乘积为 p 的倍数的正整数中，m 是最小的数．

所得到的矛盾证明了，任何一个属于 B 的数 b 应该能被 m 整除．

因为数 p 本身属于集合 B，所以根据上面所证明的，p 能被 m 整除．但是 p 只有两个正约数：1 和 p，而 $m\neq 1$，因为根据假设数 $a\cdot 1=a$ 不能被 p 整除．因此必须满足等式 $m=p$．这就证明了第二个断言，因而证明了上面所说的定理．

1）中的定理可以有下面的推广．

2） **如果数**

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots$$

中的任何一个数都不能被素数 p 整除，那么乘积

$$ab,\ abc=(ab)c,\quad abcd=(abc)d,\cdots$$

中的任何一个都不能被 p 整除．

3） 用类似于我们选取数 m 的方法可以证明下面简单的论断，我们今后将不止一次地用到它．

如果 A 是非空的集合，它的元素是某些自然数，那么在 A 所包含的数中，有一个最小的数．

事实上，如果 a 是属于集合 A 的任一自然数，那么当我们依次来研究数

$$1,\ 2,\ \cdots,\quad a-1,\quad a$$

时，我们会遇到（不迟于第 a 次）第一个属于集合 A 的数，而这个数将是构成集合 A 的所有数中最小的数．

应该特别着重指出，我们是在由自然数组成的集合 A 中寻求最小的数．如果不是这样，例如，在所有的（不一定是正的）偶数中，或者是在所有的倒数为自然数（不一定是整数）的数中寻求最小的数，那么是不可能找到最小数的．

§3．数学归纳原理[1]

1） 在§2中，下面的论断——称之为**最小数原理**——占有重要的地位．

如果 A 是非空的集合，它的元素是某些自然数，那么在 A 所包含的数中有最小的数．

我们回想一下这个论断是怎样被证明的．因为这个集合 A 是非空的，所以必存在一个属于它的自然数 a．依次来看自然数 1，2，…，a．在这些数中，第一个属于 A 的数将是这个集合中最小的数．

对这个论证的完善性很容易产生怀疑．特别是，为什么从 1 开始我们一定能够到达任一给定的自然数 a？自然地会回答："因为只有有限个小于 a 的自然数"．但这样的回答是不

[1] 由俄译编辑补加的．

能令人满意的，因为"有限个数"意味着什么呢？借口这是"实践经验的推广"几乎也是无济于事的．在日常生活中，我们不仅不和"任何给定的"自然数打交道，甚至也不和很大的数打交道．(例如，谁数过9^{9^9}个物体？我想，即使是在十亿个数的范围内，也不会有人依次选取这些自然数的．)因此，在这些骤然看来没有什么不对的话中，例如"任一自然数 a"这句话，已经不明显地包含了比粗糙的感性经验更多的什么东西．这里有巨大的质的飞跃：从若干（不是非常之多）具体的、个别的有限集合（一匹马，两只皮靴，三棵树）中进行抽象，我们得到无穷的自然数序列的概念，它的项使我们有可能讨论任一有限集合的元素的个数❶．阿基米德的《沙粒的计算》是一部优秀的著作，它说明了我们可以想像并说出任意大的自然数．命数法（即关于自然数命名的学说）曾长时间地作为一种单独的算术运算不是没有原因的（例如，$M \cdot B \cdot$罗蒙诺索夫学习过的$Л \cdot$马格里兹基的《算术》就是这样的）．

我们的怀疑好像是牵强附会的：这一切是如此显然的或几乎是显然的，在繁琐的论证上花费时间和提出荒诞的问题是值得的吗？但是，实际上所涉及到的是非常本质的问题：关于数学论证的基本原理．自然数以及它的性质在数学的所有分支中都要用到，而我们甚至于并不总是明显地意识到这一点的．

2) 数学家在进行证明时所采用的法则，要求精确地叙述原始命题——公理，而所有其它命题应该按照逻辑法则从它们推出来．在公理中，要指明某种数学理论中必不可少的**对象**以及这些对象所满足的必不可少的**关系**．最常用的自然数列的一组公理是由意大利数学家皮亚诺（1852—1932）提出的．他成功地指出了，从下面最简单的关系出发：a紧跟在b后面或b紧靠在a前面（在这里说"$a=b+1$"还为时过早，因为加法还没有定义），可以定义所有的算术运算，并能证明自然数的一切性质．皮亚诺公理是：

1．在自然数中有这样一个数，没有任何自然数紧靠在它的前面，这个数我们用1来表示；

2．对于任何一个自然数，有而且只有一个自然数紧跟在它后面；

3．任何一个自然数有不多于一个紧靠在它前面的数；

4．（归纳公理）任何一个自然数集合A，若：

① 1属于A；

②如果某个自然数属于A，那么紧跟在它后面的自然数也属于A，

则A和整个自然数集合重合．

正象我们已经指出的，这四条公理对于建立整个算术已经足够了（见《初等数学百科全书》，卷1，国家技术出版社，莫斯科，1951❷）．因此在今后，代替"紧跟在n后面的自然数"，我们将简单地写作$n+1$．

3) 归纳公理用精确的逻辑术语表达了自然数列的这样一种性质，这种性质在直观上用"从1开始，一个一个地选取可以到达任何一个自然数"这句话来表达．它是一种形式上方便的办法，使得能够一下子把整个自然数的无穷集合引入到论证中去．这多半借助于数学归纳原理（也叫做数学归纳法或完全归纳法）来实现．

数学归纳原理．假设$P(n)$是依赖于自然数n作为参数的命题．如果$P(1)$成立，且由$P(n)$成立可推出$P(n+1)$成立，那么$P(n)$对所有的自然数n都成立．

为了从归纳公理引出数学归纳原理，我们用A表示使$P(n)$成立的自然数n的集合．这

❶ 为了回答什么是"有限集合"这个问题，应该比较深入地研究数学的基础（可见§60）．

❷ 还可参考艾·兰道著《分析基础》．有中译本（刘绂堂译）．——中译者注．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

时A包含1，因为$P(1)$成立，且若A包含n，那么$P(n)$成立，这时$P(n+1)$也成立，这意味着A包含紧跟在n后面的自然数$n+1$. 根据归纳公理，A包含所有的自然数，即$P(n)$对所有的n都成立.

命题$P(1)$如果成立，叫做**归纳基础**. 关于$P(n)$成立的假设叫做**归纳假设**.

作为例子，我们证明下面的命题.

$p(n)$：**自然数n或者是1，或者是跟在某一个自然数后面的数.**

$P(1)$（归纳基础）显然成立. 假设$P(n)$成立（归纳假设）. 这时n是某一个自然数，而$n+1$是紧跟在它后面的数. 这就意味着$P(n+1)$成立. 根据归纳原理，$P(n)$对所有的n都成立.

在这本书中，我们以后会遇到许多应用归纳原理的例子. 现在我们感兴趣的是下面的事实：前面所说的最小数原理和归纳公理是等价的并可以代替它.

4）**由归纳公理推出最小数原理**. 假设A是自然数列的某一个集合. 我们假设在这个集合中没有最小的数. 我们构造一个集合M，它含有这样的自然数m，如果所有满足条件$n \leqslant m$的自然数n不属于集合A.[1] 这时：

1属于M；不然的话，1应该属于A并且是A中最小的数.

如果自然数m属于M，那么所有满足条件$n \leqslant m$的自然数n不属于A. 因而数$m+1$也不可能属于A，因为不然的话，它就是A中最小的数. 因此$m+1$也属于M.

根据归纳公理，M和整个自然数集合重合，但若A是非空的时候，这是不可能的.

5）**由最小数原理推出归纳公理**. 设M是归纳公理的条件中所说的集合. 我们取补集A，它由所有不属于M的自然数构成. 如果M不和整个自然数列重合，那么A是非空的. 根据最小数原理，在A中有最小数a. 因为1属于M，所以$a \neq 1$. 根据上面所证明的，a紧跟在某一个自然数n的后面. 因为a是A中最小的数，所以n不属于A，于是n属于M，而紧跟在它后面的自然数a不属于M，这和集合M的定义相矛盾. 这个矛盾表明，A是空的，于是M和整个自然数集合重合.

2. 给定一个圆和圆内的点P和Q. 求作内接于这个圆的直角三角形，使它的一个直角边通过点P，另一个直角边通过点Q. 点P和Q在什么位置时，本题无解？

【解】对线段PQ所张的角为直角的点的轨迹是以PQ为直径所画的圆k'（图1）. 圆k'和已知圆k的交点即是内接于圆k且**直角边或直角边的延长线通过点**P和Q的直角三角形的顶点. 为了使得直角边本身而不是它们的延长线通过点P和Q，这两个点应该在圆k内.

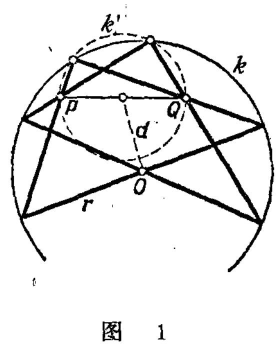


图 1

如果点P和Q在圆k内，圆k和k'有几个交点，本题就有几个解，因此，

1）如果$\frac{1}{2}PQ > r-d$（其中r是圆k的半径，d是圆k的圆心到线段PQ的中点的距

[1] 注意，我们认为所有的算术运算已经建立了. 特别是，我们已经会比较自然数的大小. 1是所有自然数中最小的数.

离),则有两个解.

2） 如果$\frac{1}{2}PQ=r-d$，则只有一解.

3） 如果$\frac{1}{2}PQ<r-d$，则无解. 因为圆k'的圆心到圆k的最短距离等于$r-d$.

3. 三角形的边构成公差为d的等差数列，三角形的面积等于S. 求三角形的边长和角. 再对$d=1$，$S=6$这个特殊情况，求解本题.

【**解**】我们将三角形的边表示成$a=b-d$，b，$c=b+d$，这里 $0<d<b$. 将表达式

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3b}{2},\qquad p-a=\frac{b}{2}+d,$$

$$p-b=\frac{b}{2},\qquad p-c=\frac{b}{2}-d$$

代入海伦公式

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

我们得到

$$S^2=\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4}-d^2\right).$$

把它看作是（关于b^2的）二次方程，我们解得

$$b^2=2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right).$$

开平方（两个根号都取正号，因为b是三角形的一个边长，所以是正的），我们得到

$$b=\sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right)},\qquad a=b-d,\qquad c=b+d.$$

a及b所对的角α和β一定是锐角❶，且

$$S=\frac{bc}{2}\sin\alpha,\qquad S=\frac{ac}{2}\sin\beta.$$

最后，c所对的角$\gamma=180°-(\alpha+\beta)$.

如果$d=1$，$S=6$，那么从上面所得到的公式求得$b=4$. 于是$a=3$，$c=5$，且

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\qquad \sin\beta=\frac{4}{5}=\cos\alpha.$$

因此，$\alpha=36°52'$，$\beta=90°-\alpha=53°8'$，$\gamma=90°$.

---

❶ 事实上，在三角形中，最大的边所对的角才可能是钝角. 在我们的情形中，只有边c所对的角才可能是钝角. ——俄译者注

二、1895年试题及解答

4．有两类卡片，每类卡片都有无穷多张．试证：从这些卡片中，有 $2(2^{n-1}-1)$ 种方法挑选出这样的组，它由 n 张有序的卡片组成，而且每一类卡片至少含有一张．

【证明】 我们约定认为，包含在一组中的卡片编了号码，并且我们来研究由 n 张卡片构成一组的所有可能的方法，而两种"不允许的"情况（整个一组全由一类卡片构成）以后再除去．

当 $n=2$ 时，可以有下面一些组：

$$AA,\quad AB,\quad BA,\quad BB, \tag{1}$$

这里 BA 表示这样的组，第一张卡片是 B 类的，第二张卡片是 A 类的．

当 $n=3$ 时，由两类不同卡片可以构成 $2\times4=8$ 个有序组．为了得到这些组，必须对（1）中所列举的两个字母的有序组添加第三个字母（A 或 B）．由三张卡片构成的组的全部情况看来是

$$AAA,\quad ABA,\quad BAA,\quad BBA,$$
$$AAB,\quad ABB,\quad BAB,\quad BBB.$$

例如，字母组合 BAB 表示这样的组：第一张卡片是 B 类的，第二张卡片是 A 类的，第三张卡片又是 B 类的．

当每一组的卡片数增加 1 张时，由两类卡片构成有序组的个数增加一倍．因此，有 2^n 种由 n 张两类卡片构成的不同有序组．这些组对应于**由两个字母 A 和 B 构成的 n 位重复排列**．★

从总的组数中除去本题条件不允许的两个组（完全由一类卡片构成的组），我们得到，对于 n 张两类卡片构成的组来说，所允许的有序组的总个数等于 2^n-2．不满足本题条件的两个卡片组对应于同一个字母 A 或 B 的 n 位重复排列．

如果在由两个字母 A 和 B 的 n 位重复排列中，用数字 1 来代替 A，用数字 2 来代替 B，那么本题断言可以叙述如下：

有 2^n-2 个不同的 n 位数，这些 n 位数是由数字 1 和 2 构成的，且在这些 n 位数中，两个数字都至少出现一次．

§4．关于重复排列

不难看出，前面在计算字母 A 和 B 的 n 位可重复排列的排列个数时，所得到的结果是下面比较一般的断言的特殊情况：

m 个元素的 n 位可重复排列的排列个数等于 m^n．

关于重复排列的比较详细的知识不是没有用处的，尽管它们和题 4 没有直接的关系．

对于 m 个元素，用所有可能的方法把它们放在 n 个编了号的位置上，我们便得到 m 个给定元素的 n 位**重复排列**．在重复排列中，每个元素可以出现若干次．

通常我们把放元素的位置排成**一排**（排成一水平直线），但是位置的排法并非绝对必须如

此，例如，它们可以**绕着圆周放在圆内接正 n 边形的顶点上**，这些顶点是用某种办法编了号的.

我们用所指出的方法在圆周上放好 n 个元素，然后将它绕圆心旋转$\frac{360^\circ}{n}$（我们将认为，仅仅旋转放在圆周上的元素，而内接正 n 边形仍然在原来的地方）. 原来的排列作**循环置换**后，产生了新的排列.

例如，在图 3 中，字母 A，B，C的排列可借助于循环置换由图 2 所示的字母排列得到，而图 4 所示的排列可借助于循环置换由图 3 所示的排列得到. 再进行一次循环置换，我们由图 4 所示的排列又得到图 2 所示的原来的排列[1].

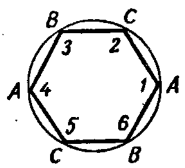


图 2

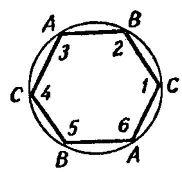


图 3

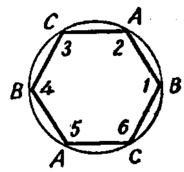


图 4

循环置换的特点是：在循环置换时，每一个元素从它在置换之前所占据的位置变到相邻的位置上，而占据第一个位置的元素在置换以后变到了最后一个位置上.

如果进行一次或若干次循环置换，可以从一个排列U变到另一个排列V，那么只要进行一定的循环置换，由V变到U的逆过程也可以实现. 这样一来，循环置换可以将排列U和V中的任何一个变到另一个.

我们假设进行 k 次循环置换可以由排列U变到排列V，而进行 l 次循环置换，可以由排列V变到排列W. 这时由排列U进行 $k+l$ 次循环置换可以得到排列W.

如果把循环置换看成是转动圆周，那么上面的两个断言简直是显然的.

我们将排列进行分类，只有进行一次或若干次循环置换可以互相变换的排列而且仅仅只有这些排列属于同一类.

属于任何一类排列的个数等于数 n 的某个约数.

事实上，我们来研究某一类排列，且假设U_0是属于它的一个排列. 构成这类排列的每一个排列和下面的排列

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_r,\ \cdots\ \ U_s,\ \cdots \qquad (1)$$

中的一个相同，这里的U_r 表示由U_0 进行 r 次循环置换所得到的排列. 因此，为了计算包含在这一类的排列的个数，必须确定在序列(1)中包含有多少个不同的排列.

如果排列U_r 和U_s 重合，那么U_{r+1} 和U_{s+1} 也是同一个排列. 反之，如果U_r 和U_s 是不同的排列，那么U_{r+1} 和U_{s+1} 也不相同.

假设U_s 是**第一个**和前面某一排列相重合的排列. 显然，前面那个排列的附标r应等于零，因为要不然的话，排列U_{s-1} 将和排列U_{r-1} 重合.

这样一来，序列（1）的每一项和排列

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_{s-1} \qquad (2)$$

中的某一个重合，而（2）中的各项是互不相同的. 因此，我们所研究的类包含 s 个排列.

---

[1] 在通常的记法中，和三个字母 A，B，C相应的 6 位排列具有下面的形式：$ACBACB$，$CBACBA$，$BACBAC$.

和排列 U_0 重合的是序列(1)中下面的那些项:

$$U_0,\quad U_s,\quad U_{2s},\cdots.$$

因为 U_n 和 U_0 重合，所以附标 n 等于数 s，$2s$，$3s$，… 中的一个数．因此，s 是数 n 的约数，这就是所要证明的．

§5. 关 于 组 合

1) 可以试一试用下面的方法来解答第4题：用所有可能的方法把字母 A 放在1，2，3，…，$n-2$ 或 $n-1$ 个位置上，而在其余的位置上写上字母 B．如果字母 A 占据 k 个位置（$k=1,2,\cdots,n-1$），那么它们以怎样的次序占据这些位置是无关紧要的（所有的字母 A 都是相同的）．但是如果有两个组，在一组中某一个位置上放的是字母 A，而在另一组中这个位置被字母 B 占据了，这两组就认为是不同的．

这样一来，试题的答案可以这样得到：**计算由 n 个不同的元素（卡片）中选取 k 个元素，如果不计所选取的元素的先后次序，总共有多少种不同的方法**．选取的元素叫做**由 n 个元素中选取 k 个元素的组合，而这种组合的个数通常用 C_n^k 来表示**．数 C_n^k 也叫做**二项式系数**．(关于二项式系数见§25．)

借助于二项式系数，根据本题的条件，字母 A 和 B 的 n 位重复排列的排列个数可以表示成

$$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^{n-1}\qquad(1)$$

的形式．当然，所得到的表达式仅在有简单的办法来计算二项式系数时才有价值．

2) 为了确定由 n 个元素中取 k 个元素的组合数，我们来看一看，从由 n 个元素中取 $k-1$ 个元素（$k>1$）的某个组合出发，可以得到多少个由 n 个元素取出 k 个元素的组合．对于由 $k-1$ 个元素构成的每一个组合，可以补加 $n-k+1$ 个未取的元素中的任意一个元素．当对所有由 n 个元素中选取 $k-1$ 个元素的组合都补加完之后，我们得到由 n 个元素中选取 k 个元素的所有组合，而且每一个组合出现 k 次，这是因为"后来补加的元素"是这个组合的 k 个元素中的任一个．

因此，我们可以断定

$$(n-k+1)C_n^{k-1}=kC_n^k,$$

或者

$$C_n^k=\frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}.\qquad(2)$$

此外，显然有

$$C_n^1=n.$$

假设在公式(2)中令 $k=2$，3，…，我们求得

$$C_n^2=\frac{n-1}{2}C_n^1=\frac{n(n-1)}{2},$$

$$C_n^3=\frac{n-2}{3}C_n^2=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3},$$

$$C_n^4=\frac{n-3}{4}C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times2\times3\times4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

继续使 k 的值每次增加 1，最后我们得到

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{1\times2\times3\times\cdots\times k}. \tag{3}$$

3） 自然数的乘积 $1\times2\times3\times\cdots\times k$ 通常表示成 $k!$ 并叫做 k 的阶乘．如果将公式（3）中右边的分子和分母乘以

$$(n-k)!=(n-k)\times(n-k-1)\times\cdots\times3\times2\times1,$$

那么二项式系数可以变成新的形式：

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\times\cdots\times3\times2\times1}{k!\ (n-k)!}=$$

$$=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}. \tag{4}$$

由这个表达式看出

$$C_n^k=C_n^{n-k},$$

即二项式系数具有对称性．

由公式（3）令 $k=n$ 或者直接根据二项式系数的含义，显然有

$$C_n^n=1.$$

虽然“由 n 个元素中取 0 个元素的组合”这种说法以及这种组合的个数是没有意义的，但通常认为

$$C_n^0=1.$$

这个假设和早先所指出的二项式系数的对称性是一致的．如果对上面所给出的定义补充规定 $0!=1$，那么公式（4）当 $k=0$ 时仍然有效．

现在我们已经具备了所有必要的知识来讨论本题的第二种证法．利用二项式系数的性质——以后再证明它们（见 § 25），不难证实

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n.$$

4）二项式系数有一个经常用到的性质，即

$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},$$

它能计算两个相邻的二项式系数的和．

可以用直接计算的办法来证实这一点，将左边的两个表达式通分，得

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(k+1)+n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)[(k+1)+(n-k)]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}=C_{n+1}^{k+1}.$$

5．给定一个直角三角形 ABC．在这个三角形内求一点 N，使 $\angle NBC$，$\angle NCA$，$\angle NAB$ 相等．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com