

福州大学

八七届毕业设计论文

选 辑

福州大学教务处

1987年12月

目 录

数 学 系

关于图Dominating圈的存在性.....陈豪 (1)

计 算 机 科 学 系

关于色散方程 $u_t = uu_{xxx}$ 的两个显式差分格式.....杨梅芬 (6)

游戏程序 Night Crawlers的分析报告李斌奇、谢莞菁、薛由春、成春辉 (11)

物 理 学 系

离子敏场效应晶体管敏感膜的研究.....邱良忠 (18)

无 线 电 工 程 系

图象处理专用微机系统设计.....陈丽华、杨孝宇 (28)

恒包络连续相位的研究.....黄雪琳 (43)

化 学 系

滴汞电极2.5次微分电分析法测定微量 NO_2^- 的研究 (I)林文薛文伟 (65)

快速气相色谱测定食用油中脂肪族直链酸的探讨.....齐国敏、凌红 (71)

二水甲酸铈晶体生长动力学的研究.....王茂生、詹光煌 (78)

化 学 工 程

塔设备设计及动力分析.....刘文同 (88)

机 械 工 程

机械加工精度统计分析微机实验的开发.....张忠强 (92)

普通车床三轴滑移进给系统优化设计.....李志雄 (97)

圆孔拉刀的计算机辅助设计及绘图.....陈建心 (117)

电 气 工 程 系

三相同步发电机及带有微处理器控制的复合励磁系统.....芦贤良 (140)

二维平面,轴对称恒定电磁场有限元通用计算程序研究.....石磊 (155)

应用微型机及绘图仪进行避雷针保护范围图形的显示与绘制.....陈一新 (175)

中速电梯制动平层系统.....郭健 (208)

土 木 建 筑 工 程 系

同安双溪大桥设计.....赵福年 (224)

龙津溪枋洋水利枢纽工程设计.....李国选 (228)

工 业 管 理 工 程 系

屏南县万吨纸浆厂予可行性研究报告.....龚应章 (234)

物资销售管理系统软件设计.....王贵军 (249)

关于图的Dominating圈的存在性

应用数学专业 陈 豪

指导教师 林可容、罗由学

§ 引言

本文未加说明的记号、术语均属于 J. A. Bondy 与 U. S. R. Murty 合著《graph theory with Application》一书。

图 G 的两个子图 G_1, G_2 称为相邻的, 如果 G_1, G_2 不相交, 且存在 $e \in E(G)$, e 连接 G_1 中一点与 G_2 中一点, 即存在 $v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$, 使得 $v_1 v_2 = e \in E(G)$, 如果 G_1, G_2 不相交且不相邻, 则称 G_1, G_2 为分离的。

对图 $G, e = uv \in E(G)$, 设 $N(e) = N(u) \cup N(v) - \{u, v\}$, 即 $N(e)$ 为 G 中 e 的所有相邻点的集合, 我们称 $|N(e)|$ 为 G 中 e 的度数, 记为 $d_e(e)$, 在只讨论一个图时, 简记为 $d(e)$ 。

图 G 中的圈 C 称为 Dominating 圈, 如果对 $\forall e = uv \in E(G)$, 条件 (i) $u \in V(C)$, (ii) $v \in V(C)$ 至少有一个成立, 简称为 D-圈。如果图 G 含 Dominating 圈, 则称 G 为 Dominating 圈的图, 简称为 D-图。

关于图的 D-圈的存在性, H. J. Veldman 在 1983 年《Discrete Mathematics》No. 2—3 中的《Existence of Dominating Cycles and Paths》一文中曾给出了下面定理:

定理 A: 设 G 为不是树的简单图, 如果对于 G 中任一对分离边 e, f , 有

$$d(e) + d(f) \geq n - 2, \text{ 其中 } n = |V(G)|, \text{ 则 } G \text{ 是 D-图。}$$

同时, H. J. Veldman 给出了一类例子 $G: K_1 \vee (K_2 + K_{v-3})$ ($v \geq 5$), 它们满足: 对任一对分离边, 其度数和大于等于 $n - 3$ ($n = |V(G)|$)。但不包含 D-圈, 从而说明定理 A 的结果是最好结果。但是, 能否通过加强其他某些条件, 而减小定理中不等式右边的值, 而使定理结论照样成立呢? 本文试图在这方面作出一些尝试, 为了证明主要结果, 我们先证明下列引理。

引理 1 设 G 是圈长 $l \geq 5$, 且不是森林的图, 如果对于 G 的任一对分离的边 e, f , 有 $d(e) + d(f) \geq n - 4$, 则 G 是连通图, 或由一个连通分支和若干孤立点组成 ($n = |V(G)|$)。

证明: 假设 G 不连通。

若 G 有两个分支 G_1, G_2 , 有 $|V(G_1)| \geq 2, |V(G_2)| \geq 2$, 则

$\because G$ 不是森林, $\therefore$ 至少有一个分支, 不妨设 G_1 包含圈。

$\because l \geq 5$, $\therefore$ 对 G_1 中任一圈上任一边 e , 取 ω 为离 e 一个端点距离为 2 的圈上的一点, 则 $\omega \in V(e)$

$\therefore$ 对 $\forall f \in E(G_2)$, e, f 分离, 且 $d(e) + d(f) \leq |V(G_1)| - 1 - 2 + |V(G_2)|$

$-2 \leq n-5$, 这与引理条件矛盾, 引理得证。

引理 2、设 G 的围长 $l \geq K (K \geq 5)$, 且 G 不是森林, 如果对 G 的任一对分离边 e, f , 有 $d(e) + d(f) \geq n - K + 1$ ($n = |V(G)|$), 则 G 或是连通图, 或是由一个连通分支与若干孤立点组成。

证明: 对一个长大于等于 K 的圈上的任一分离边 e, f , 因 $l \geq K$, 设圈上至少有 $K-4$ 个点与该边不相邻, 因此, 类似引理, 可证明引理 2。

§ 2、主要结果

定理 1 设 G 围长 $l \geq 5$, 且不是森林, 如果 G 中任一对分离边 e, f 有 $d(e) + d(f) \geq n - 3$ ($n = |V(G)|$), 则 G 包含 D -圈。

证明: 由条件及引理 1, 若 G 不连通, 设 G_1 为 G 的唯一不是孤立点的分支, 则对 G 中任一对分离边 e, f , 有 $e, f \in E(G_1)$, 且 $d(e) + d(f) \geq n - 3 \geq |V(G_1)| + 1 - 3 = |V(G_1)| - 2$, 由定理 A, G 存在 D -圈, 即图 G 包含 D -圈。

若 G 为不是树的连通图, 可设 C 是使得 $|E(G - V(C))|$ 最小的最长的圈。我们称圈 C' 优于圈 C , 若 $|E(G - V(C'))| \leq |E(G - V(C))|$, $|V(C')| > |V(C)|$ 或 $|E(G - V(C'))| < |E(G - V(C))|$, $|V(C')| \geq |V(C)|$ 。

不妨设 $C = v_1 v_2 \dots v_m$, $m = |V(C)|$, 给 C 定义一个正方向, 下标按正向排列, 假设 G 不包含 D -圈, 则 $e = u_1 u_2 \in E(G)$, 但 $u_1 \notin V(C)$, $u_2 \notin V(C)$ 且 u_1, u_2 中有一个, 不妨设为 u_1 , 与 C 上一点 v 相邻。

取 W_1 为按正向 v 在 C 上的连续点, 记 $N_C(u)$ 为 u 在圈 C 上的相邻点集合, $N_T(u)$ 为 u 在圈 C 外的相邻点的集合。

情形 1, $N(\omega_1) \subset V(C)$, 即 $N_T(\omega_1) = \Phi$

取 ω_2 为顺着正方向 ω_1 的连续点, 设 $f = \omega_1 \omega_2$, 则 e, f 分离, 否则, u_1, ω_1 相邻, u_1, ω_2 相邻, u_2, ω_1 相邻都以 $l \geq 5$ 矛盾。若 u_2, ω_2 相邻, 则圈 $C': v \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \omega_2$, 再沿 C , 由 ω_2 顺着正方向到 v , 比 C 更优, 这与 C 定义矛盾。

设: $z_1 = \{u \in V(C) | u^- \in N(u_1)\}$

$z_2 = \{u \in V(C) | u^- \in N(u_2)\}$

其中 u^- 为顺反向, u 的连续点。

$\because u \rightarrow u^-$ 是 $V(C)$ 到 $V(C)$ 的一一对应。

$\therefore |z_1| = |N_C(u_1)|, |z_2| = |N_C(u_2)|$

显然, $N_T(u_1) \cap N_C(W_1) = \Phi, N_T(u_1) \cap z_1 = \Phi$ 。

$N_C(W_1) \cap N_T(W_1) = \Phi, z_1 \cap N_T(W_1) = \Phi$

($i = 1, 2; j = 1, 2$)

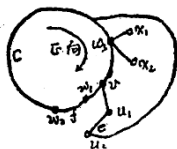
另外: $\because l \geq 5, \therefore N_T(u_1) \cap N_T(u_2) = \Phi$

$N_C(\omega_1) \cap N_C(\omega_2) = \Phi$

$z_1 \cap z_2 = \Phi$

$N_T(\omega_1) \cap N_T(\omega_2) = \Phi$ 。

又有: $N_T(u_1) \cap N_T(\omega_2) = \Phi$, 否则, 设 $u \in N_T(u_1) \cap N_T(\omega_2)$ 。则 $v \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow u \rightarrow \omega_2$, 再沿 C 由 ω_2 顺正向到 v 构成比 C 更优的圈。同样地, $N_T(u_2) \cap N_T(\omega_1) = \Phi$,



$N_C(\omega_1) \cap z_1 = \Phi$, 否则, 设 $u \in N_C(\omega_1) \cap z_1$, 则由 ω_1 沿 C 顺正向到 u^- , 再由 $u^- \rightarrow u_1 \rightarrow v$, 再由 v 沿 C 顺反向到 u , 再到 ω_1 , 构成比 C 更优的圈。

同样地有: $N_C(\omega_1) \cap z_2 = \Phi$, $N_C(\omega_2) \cap z_2 = \Phi$

$N_C(\omega_2)$ 与 z_1 除 ω_1 外, 再无其他相交点。

$$\therefore d(e) = |N_T(u_1)| + |N_T(u_2)| - 2 + |N_C(u_1)| + |N_C(u_2)| \\ = |N_T(u_1)| + |N_T(u_2)| - 2 + |z_1| + |z_2|$$

$$d(f) = |N_C(\omega_1)| + |N_C(\omega_2)| - 2 + |N_T(\omega_1)| + |N_T(\omega_2)|$$

下面证明 $\forall \omega \in V(G)$, $\omega \notin N_T(u_i)$, $\omega \notin N_C(\omega_i)$, $\omega \notin z_i$, $\omega \notin N_T(\omega_i)$ ($i=1, 2$)

取 ω_3 为 C 上顺反向的 v 的连续点, 即 $\omega_3 = v^-$

则 $\because m \geq 1 \geq 5$, $\therefore \omega_3 \notin N_C(\omega_i)$ ($i=1, 2$), $\omega_3 \notin z_1$

显然, $w_2 \notin N_T(u_i)$, $w_3 \notin N_T(w_i)$ ($i=1, 2$)

若 $\omega_3 \notin z_2$, 则取 $\omega = \omega_3$, 否则:

假设 $\omega_3 \in z_2$, 则 $|N_T(\omega_3)| \geq 2$ 。否则, 由 v 沿 C 顺正向到 W_j^- , 再到 $u_2 \rightarrow u_1 \rightarrow v$ 构成优于 C 的圈。 $\therefore$ 可设 x_1, x_2 为 $N_T(\omega_3)$ 中两点。

$\because 1 \geq 5$, $x_i \notin N_T(u_i)$, $x_i \notin N_T(\omega_1)$ ($i=1, 2$)

x_1, x_2 又不能同时属于 $N_T(\omega_1)$ 或 $N_T(\omega_2)$

不妨设: (1) $x_1 \in N_T(u_2)$, (2) $x_i \in N_T(\omega_2)$

若 (i) 式不成立, 则可取 $\omega = x_i$ ($i=1$ 或 2)

若 (1)、(2) 两式同时成立, 则由 ω_3 沿 C 顺正向到 $\omega_3^- \rightarrow u_2 \rightarrow x_1 \rightarrow \omega_3$, 构成比 C 更优的圈, $\therefore$ (1)、(2) 式中, 一定有一个不成立。

因此, 或者 ω_3 为满足要求的 ω , 或者 $x \in N_T(\omega_3)$ 为满足要求的 ω 。

$$\therefore d(e) + d(f) = |N_T(u_1)| + |N_T(u_2)| - 2 + |z_1| + |z_2| + |N_T(\omega_1)| + |N_T(\omega_2)| \\ + |N_C(\omega_1)| + |N_C(\omega_2)| - 2 \leq (n-1) + 1 - 4 = n-4$$

这与定理条件矛盾。 $\therefore$ 定理成立。

情形 2 $N_T(\omega_1) \neq \Phi$

取 ω_2 为 $N_T(\omega_1)$ 中任一点, $f = \omega_1 \omega_2$, 同样 e, f 分离

取 $\omega_3 = v^-$, 则 $\omega_3 \notin N_T(\omega_i)$, $\omega_3 \notin N_C(\omega_i)$ ($i=1, 2$)

$\omega_3 \notin z_1$, $\omega_3 \notin N_T(u_i)$ ($i=1, 2$)

若 $\omega_3 \notin z_2$, 取 $\omega = \omega_3$, ω 满足情形 1 中要求。

若 $\omega_3 \in z_2$, 则类似情形 1 可证存在满足情形 1 中要求的 ω

$\therefore d(e) + d(f) \leq n-4$, 与定理条件矛盾。 $\therefore$ 定理成立。

定理证毕。

如果 G 的围长 $l=4$, 则可以找到如下—类图, 定理结论不成立。



由于同时不属于 $N(\omega_i)$, $N_-(\omega_i)$, z_i , $N_+(u_i)$ ($i=1, 2$) 的点的数目随着图的围长的增大而有所增加, 因此更一般地有下列结果:

定理 2 设 G 围长 $l \geq K$ ($K \geq 7$) 且不是森林, 如果对 G 的任一对分离边 e, f , 有 $d(e) + d(f) \geq n - K + 2$, 则 G 包含 D -圈. ($n = |V(G)|$)

证明: 证明中一切记号及 D 取法同定理 1 证明.

情形 1 $N_-(\omega_1) = \Phi$

$\because l \geq K \geq 7$, $\therefore$ 完全类似定理 1 可证明:

除 $N_-(\omega_2) \cap z_1 = \omega_1$ 外, $N_-(\omega_i)$ ($i=1, 2$), $N_+(\omega_i)$ ($i=1, 2$), z_i ($i=1, 2$), $N_+(u_i)$ ($i=1, 2$) 中其他任意两个不相交.

取 $v_1, v_2, \dots, v_{k-5}$ 为沿 C 按反向 v 后的连续 $R-5$ 个点.

$\because l \geq K \geq 7$, 设 $v_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-5}\}$, 则:

$$V_0 \cap z_i = \Phi, V_0 \cap N_-(\omega_i) = \Phi,$$

$$V_0 \cap N_+(\omega_i) = \Phi, V_0 \cap N_+(u_i) = \Phi, (i=1, 2)$$

否则出现长小于 K 的圈.

取 v_0 为沿 C 正向, 离 ω_2 距离为 2 的点, 则:

由于 $l \geq K \geq 7$, 因而有 $v_0 \notin N_-(\omega_i)$ $v_0 \notin N_+(\omega_i)$

$$v_0 \notin N_-(u_i), v_0 \notin z_i \quad (i=1, 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore d(e) + d(f) &= |N_-(u_1)| + |N_-(u_2)| - 2 + |z_1| + |z_2| + |N_-(\omega_1)| \\ &\quad + |N_-(\omega_2)| + |N_-(\omega_1)| + |N_-(\omega_2)| - 2 \\ &\leq [n - (k - 5 + 1)] + 1 - 4 = n - k + 1 \end{aligned}$$

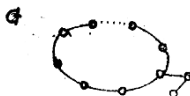
这与定理条件矛盾. $\therefore$ 定理成立.

情形 2 $N_-(\omega_1) \neq \Phi$, 取 ω_2 为 $N_-(\omega_1)$ 中任一点, $f = \omega_1 \omega_2$, 同情形 1 一样可以证明定理成立.

由定理 A, 显然定理 2 在 $l=4$ 时成立, 由定理 1, 定理 2 在 $l=5$ 时也成立, 但在 $l=6$ 时, 由下面反例可看出定理 2 不成立.



由一条边将一个 K 圈 ($K \geq 7$) 与 K_2 中一点相连, 便得一类图 G , 每对分离边度数和大于等于 $3 = E(G) - l(G) + 1 = n - R + 1$, 但 G 不是 D -图, 因此定理 2 中不等式不能再改进了.



参考文献

- [1] 《Graph Theory with Application》
by Bondy and Murty
- [2] 《Discrete Mathematics》 No. 2—3 1983.
《On Existence of Dominating Cycles and paths》
by H. J. veldman.

关于色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的两个显式差分格式

计算数学专业

杨梅芬

指导教师

林鹏程

一、前言

本文对色散方程 $u_t = au_{xxx}$ (a 为常数, a 可正可负) 构造了两个三层显式差分格式, 其截断误差为 $O(\tau + h)$, ($\tau = \Delta t$, $h = \Delta x$), 稳定条件为 $|r| \leq 2.240209$, $r = a\tau/h^3$.

为了研究差分方程的稳定性, 先叙述 Mil'e 准则:

设 $f(\lambda)$ 是复平面上的 n 次多项式 $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$, $a_0 a_n \neq 0$ (1.1)

定义多项式 $f^*(\lambda) = \overline{a_n} + \overline{a_{n-1}}\lambda + \dots + \overline{a_0}\lambda^n$, (1.2)

这里 $\overline{a_i}$ 表示 a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) 的共轭复数。

如果恒等式 $f^*(0)f(\lambda) \equiv f^*(\lambda)f(0)$ (1.3)

成立, 则 $f(\lambda) = 0$ 的全部根按模小于 1 的充要条件为 $f'(0) = 0$ 只有按模小于等于 1 的根。

二、格式的构造

网格由求解区域上的点集, (x_m, t_n) 构成, 这里 $x_m = x_0 + mh$, $t_n = t_0 + n\tau$, m, n 为整数, 在结点 (x_m, t_n) 处, 用 U_m^n 表示微分方程的解, 用 V_m^n 表示差分方程的解。

对本文色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 可构造如下差分格式:

$$\frac{U_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} - U_{m+\frac{1}{2}}^n + U_{m-\frac{1}{2}}^n - U_{m-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2\tau} = \frac{a}{16h^3} [T(U^n, m-2) + 4T(U^n, m-1) + 6T(U^n, m) + 4T(U^n, m+1) + T(U^n, m+2)] \quad (2.1)$$

$$\frac{U_{m+\frac{1}{2}}^n - U_{m+\frac{1}{2}}^{n-1} - U_{m+\frac{1}{2}}^{n-1} - U_{m-\frac{1}{2}}^n}{2\tau} = \frac{a}{16h^3} [T(U^n, m-2) + 4T(U^n, m-1) + 6T(U^n, m) + 4T(U^n, m+1) + T(U^n, m+2)] \quad (2.2)$$

其中 $T(U^n, m) = U_{m+\frac{3}{2}}^n - 3U_{m+\frac{1}{2}}^n + 3U_{m-\frac{1}{2}}^n - U_{m-\frac{3}{2}}^n$

化简 (2.1) 得到本文的第一个差分格式:

$$U_{m+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{8}r(U_{m+\frac{1}{2}}^n + U_{m+\frac{3}{2}}^n - 3U_{m+\frac{1}{2}}^n + 3U_{m-\frac{1}{2}}^n - U_{m-\frac{3}{2}}^n - U_{m-\frac{5}{2}}^n - U_{m-\frac{7}{2}}^n)$$

$$+ (1 - \frac{3}{8}r)(u_{m+\frac{1}{2}}^n - u_{m-\frac{1}{2}}^n) + u_{m-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (2.3)$$

化简 (2.2) 得到本文的第二个差分格式:

$$u_{m-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{8}r(u_{m+\frac{1}{2}}^n + u_{m+\frac{3}{2}}^n - 3u_{m+\frac{1}{2}}^n + 3u_{m-\frac{1}{2}}^n - u_{m-\frac{1}{2}}^n - u_{m-\frac{3}{2}}^n) \\ - (1 + \frac{3}{8}r)(u_{m+\frac{1}{2}}^n - u_{m-\frac{1}{2}}^n) + u_{m-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (2.4)$$

其中 $r = a\tau/n^2$

三、稳定性分析

用分离变量法分析:

$$\text{令 } u_m^n = \lambda^n e^{im\theta} \quad |\theta| < \pi \quad (3.1)$$

将 (3.1) 代入 (2.3) 式加以简化而得

$$e^{i\frac{\theta}{2}} \lambda^2 - e^{-i\frac{\theta}{2}} - 2i \sin \frac{\theta}{2} \lambda = -2r \lambda i \sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.2)$$

化简 (3.2) 式:

$$e^{i\frac{\theta}{2}} \lambda^2 - 2b \lambda i - e^{-i\frac{\theta}{2}} = 0$$

$$\text{其中 } b = \sin \frac{\theta}{2} - r \sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\text{令 } f(\lambda) = e^{i\frac{\theta}{2}} \lambda^2 - 2b \lambda i - e^{-i\frac{\theta}{2}}$$

$$f^*(\lambda) = -\lambda^2 e^{i\frac{\theta}{2}} + 2b \lambda i + e^{-i\frac{\theta}{2}}$$

容易验证 (1.3) 式: $f^*(0)f(\lambda) \equiv f^*(\lambda)f(0)$ 恒成立

于是, 由 Mil'e 准则, 需要考查 $f'(\lambda) = 2\lambda e^{i\frac{\theta}{2}} - 2bi = 0$ 的根 $\lambda = bie^{-i\frac{\theta}{2}}$ 按模小于等于 1 的条件.

∵ $|\lambda| = |b|$, ∴ 由 $|\lambda| \leq 1$ 得到差分格式 (2.3) 的稳定性条件

$$-1 \leq \sin \frac{\theta}{2} - r \sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2} \leq 1 \quad (3.3)$$

不难看出, 1 不是特征方程 $f(\lambda) = 0$ 的重根, 因此, 按 (3.3) 式导出的条件就是差分方程的稳定条件.

当 $\sin \theta = 0$ 时, (3.3) 式恒成立.

今设 $\sin \theta \neq 0$, 在 $a > 0$ 时有 $r > 0$, 由 (3.3) 式导出

$$r \leq \frac{1 + \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}}, \quad \text{当 } \sin \theta > 0 \quad (3.4)$$

$$r \leq \frac{\sin \frac{\theta}{2} - 1}{\sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}}, \quad \text{当 } \sin \theta < 0 \quad (3.5)$$

注意到三角函数的周期性, 上面两个不等式对 r 的限制完全一致, 在 $a < 0$ 时, 有 $r < 0$, 由 (3.3) 式导出差分格 (2.1) 的稳定条件为

$$|r| \leq \frac{1 - \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}} \quad (0 < \theta < \pi) \quad (3.6)$$

综上所述, 差分格式 (2.3) 的稳定条件为

$$r \leq \frac{1 + \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}} = F(\theta), \quad \text{在 } a > 0, \quad 0 < \theta < \pi \quad (3.7)$$

$$\text{在 } a < 0 \text{ 时, 稳定条件为 } |r| \leq \frac{1 - \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}} = G(\theta), \quad 0 < \theta < \pi \quad (3.8)$$

将 (3.1) 代入 (2.4) 式, 可得 (2.4) 的特征方程为

$$\lambda^2 e^{-i\frac{\theta}{2}} + 2bi\lambda - e^{-i\frac{\theta}{2}} = 0, \quad b = \sin \frac{\theta}{2} + r \sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}$$

重复上面的讨论, 知格式 (2.4) 的稳定条件为 $|\lambda| = |b| \leq 1$, 即

$$-1 \leq \sin \frac{\theta}{2} + r \sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2} \leq 1$$

$$\text{因此, 格式 (2.4) 在 } a > 0 \text{ 时, 稳定条件为 } r \leq \frac{1 - \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}}, \quad 0 < \theta < \pi \quad (3.9)$$

$$\text{在 } a < 0 \text{ 时, 稳定条件为 } -r \leq \frac{1 + \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}}, \quad 0 < \theta < \pi \quad (3.10)$$

下面, 用数值表出稳定条件 (3.7) 与 (3.8), 即估出函数

$$F(\theta) = \frac{1 + \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}}, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$G(\theta) = \frac{1 - \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta \cos \frac{\theta}{2}}, \quad 0 < \theta < \pi$$

的下确界, 为此, 先求出 $F'(\theta) = 0$, $G'(\theta) = 0$ 的全部根以找出它们的极值点, 然后比较相应的极值, 找出其最小值。

如果记 $F'(\theta) = \frac{Q(\theta)}{(\sin^2 \theta \cos \frac{\theta}{2})^2}$, $0 < \theta < \pi$

则有 $Q(\theta) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \theta - (1 + \sin \frac{\theta}{2})(3 \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}) \sin^2 \theta$

于是, 由 $F'(\theta) = 0$ 导出方程

$$Q(\theta) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \theta - (1 + \sin \frac{\theta}{2})(3 \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}) \sin^2 \theta = 0 \quad (3.11)$$

在区间 $[0, \pi]$ 上用分半法求出方程 (3.11) 的根, 然后代入 (3.7) 得到

$$\inf F(\theta) = 2.240209$$

$$0 < \theta < \pi$$

同理, 可得 $\inf G(\theta) = 0.3766388$

$$0 < \theta < \pi$$

所以, 格式 (2.3) 的稳定条件为

$$\begin{aligned} a > 0, r \leq 2.240209 \\ a < 0, -r \leq 0.3766388 \end{aligned} \quad (3.12)$$

类似地有格式 (2.4) 的稳定条件为

$$\begin{aligned} a > 0, r \leq 0.3766388 \\ a < 0, -r \leq 2.240209 \end{aligned} \quad (3.13)$$

四、数值例子

考虑初值问题 $\begin{cases} u_t = au_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = 2x^2 + 4 \end{cases} \quad (4.1)$

$$u(x, 0) = 2x^2 + 4 \quad (4.2)$$

其解为 $u(x, t) = 12at + 2x^2 + 4 \quad (4.3)$

为了验证稳定条件 (3.12), 我们在 P C 机上进行计算, 定义误差

$$E_m^n = u_m^n - V_m^n$$

这里 $u_m^n = u(x_m, t_n)$ 表示用 (4.3) 算出了准确解, 而 V_m^n 表示用格式 (2.3) 算出了差分解, 下面是误差 E_m^n 的部份数值表。

表 1

格式 (2.3): $a = 1, h = 0.01, r = 2.24$

$m \backslash n$	2	150	170	181
800	0	6.225586 E - 03	8.666992 E - 03	1.062012 E - 02
820	-1.220703 E - 04	1.000977 E - 02	1.184082 E - 02	1.538086 E - 02
840	1.220703 E - 04	1.953125 E - 03	9.765625 E - 03	6.103516 E - 03

表 2
格式 (2.3) : $a = 1$, $h = 0.01$, $r = 2.25$

$m \backslash n$	2	100	137	141
800	0	9.039181	309.6528	1189.8205
820	$-1.220703 \text{ E} - 04$	-7.80249	520.8018	1824.2512
840	$1.220703 \text{ E} - 04$	-2.241699	-937.3976	1285.8989

表 1 的数据说明, 当 $r = 2.24$ 时, 计算过程是稳定的

表 2 的数据说明, 当 $r = 2.25$ 时, 计算过程是不稳定的

计算结果与稳定条件 (3.12) 符合

主要参考文献:

〔1〕 黎益, 李北杰, 关于色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的两个显式差分格式
计算数学, 8 : 3 (1986)

〔2〕 邱华漠, 一类具有高稳定性的三层显式格式 H_3 .

〔3〕 秦孟兆, 色散方程 $u_t = au_{xxx}$ 的差分格式, 计算数学, 6 (1984) H_3 .

游戏程序Night Crawlers的分析报告

软件专职 李斌奇、谢亮普、薛由春、成春辉

指导教师 张毅、慕容林

一、前言

从1946年出现第一台电子计算机以来，在短短的四十多年中，计算机的研究、生产和使用以迅猛的速度发展着。目前，计算机已深入到人类生活的几乎一切领域，但我国计算机的生产、装备和普及、应用情况与国外比较起来落后很多。为了尽快缩短距离，我们需要引进和学习国外先进的东西，善于剖析别人的系统，吸收其设计的精华，以利于“洋为中用”，并通过学习他人的设计技巧，以实际情况出发自己设计适应本单位本部门的系统。因此，如何剖析一下系统，怎样才能尽快掌握一个未知系统，对我们即将走向工作岗位的毕业生来说是有现实意义的。

近年来，随着计算机的不断普及深入，几乎所有的青少年都迷上了计算机游戏。于是在毕业前夕，我们提出设计一个游戏程序的实习课题。我们的指导张毅老师认为毕业实习主要是为了锻炼分析问题和解决问题的能力，为独立工作，走向工作岗位后善于分析处理实际问题打下良好基础，考虑到实习时间不长及剖析程序的意义，于是建议我们剖析一个游戏程序。我们知道，游戏程序要求较高的运行速度，因此一般由汇编语言编写，占用的内存都比较大。考虑到时间问题，我们通过显示文件目录选择了一个占用内存较小（18K）的游戏程序Night Crawlers。我们没有任何说明该游戏的资料，只有磁盘里记录的该游戏的一串机器代码。通过运行该程序，我们了解到，该游戏是通过按空格键由炮台发射炮弹，打中一些静止不动的障碍物或移动的目标、夜行者、怪物等，按打中的多少累计分数，但要防止炮台被移动的目标或怪物撞到，否则该轮游戏结束，看谁一轮游戏打中的分数最多。

接下来，我们就开始探索游戏王国的奥秘了。

二、分析过程简介

我们在内存为64K的APPLE机上实习，使用的是6502汇编。首先，我们把游戏从磁盘调入内存，然后反汇编打印出来。这种反汇编程序，可读性很差，原因是①程序部分与数据部分混在一起，分不清哪些是程序，哪些是数据。②跟汇编原程序对比起来，由机器代码反汇编出来的程序没有任何注解和说明。针对这个问题，我们的首要任务就是分清数据与程序，子程序与主程序。首先，我们根据转子指令JSR找子程序入口，对于JMP指令，还有一些条件转移指令也进行考虑，因为它们转去的地址有时也是子程序的入口。然后，我们小组四人在小组指导老师慕容林的指导下进行分工，每人负责详细分析若干个子程序，要求画出流程找出输入/出参数、功能等。几天后，我们进行讨论，交流分析结果，发现进展很慢，

大多数子程序未分析出来。大家纷纷提出了卡住自己思路的地方。例如：游戏本来应是围绕屏幕图形的变化处理的，但程序几乎见不到对屏幕内存单元的处理，某些明显固定使用的内存单元的功能及用法不清楚；子程序调用一层套一层，思路常常被复杂的嵌套关系搞乱等等。针对我们分析中遇到的问题，我们总结出四点继续进行分工：

- 1、搞清楚屏幕地址的分布及其在程序中的用法。
- 2、搞清楚程序中用到的内存单元的用法及功能。
- 3、掌握主程序脉络，对照原始数据进一步分析子程序。
- 4、了解所调用到的监控子程序及监控所用到的数据单元。

由于子程序调用关系很复杂，层次多，于是我们画了一张简略的嵌套关系表，并简略注明其功能，这样，我们对整个程序的层次及结构就越来越清晰了，而且对我们分析子程序功能起了很大作用。对于含有大量数据处理的子程序，例如入口为\$6F8C的子程序，主程序开头就连继24次调用它，对24K数据块作同样的处理，起先我们没有结合数据分析该子程序，结果没搞清这些数据初始化的道理，影响了我们对整个程序的分析。后来我们按程序提供的的数据，仿照机器执行该程序，这需要耐心和不厌其烦的态度，终于我们搞清了所有的图形数据，并给我们分析其他有关图形的程序带来启示。对于那些与屏幕显示有关的子程序，我们通过在其前或其后设置断点，或改变某些数据单元，然后上机运行，仔细观察屏幕的变化情况，较容易地获得了这些子程序的功能，然后回头仔细阅读这些子程序的每一条指令，其中的处理方法和细节就迎刃而解了。例如，程序中几乎处处可见的入口为\$6EF5的子程序，根据不同的输入参数调用它，就可显示或消失炮台或者目标或者夜行者等等图形，我们就是通过设置断点使程序不能执行这段子程序而获得这个子程序功能的。为了有条理地分析程序，我们根据子程序嵌套关系，从最低层的子程序分析起，然后是其上层的子程序，依次类推，整个程序的分支及各部分功能就一目了然了。

在整个程序都分析清楚之后，我们小组四人又进行了总结和汇总，整理并写出了分析结果，框图及功能表，总共35个子程序的入口及功能表请详见附录，程序还用到5个监控子程序，其功能及整个程序的框框图也在附录中。最后，我们还互相交流了心得体会。

三、程序设计技巧问题及体会。

毕业实习时间虽然不长，但我们却学到了许多课本上学不到的东西，特别是我们的分析问题的能力，解决问题及独立思考的能力都得到了锻炼和提高，为我们走向工作岗位打下良好的基础。

虽然我们分析的程序并不很复杂，却起到了“解剖麻雀”的效果。很多程序设计的技巧是值得我们借鉴的：

1、程序基本上按功能进行设计，按不同的功能编写子程序，使用少量参数与调用程序相联系。例如入口为\$6EF5的子程序，输入参数为\$05，\$06单元（即屏幕所对应地址的低字节和高字节）和累加器A（其值为\$01~\$17、\$81~\$83），表示图形的种类亦即形状）功能为在屏幕确定的位置（根据\$05和\$06单元而定）显示或消失一个14×8点的图形。主程序和子程序都多次调用到它，理解了这个子程序，整个程序如何在屏幕上显示移动的各种图形也就搞清楚了。再如入口为\$13E8的子程序是显示或消除子弹痕迹的功能，其思想方法类似\$6EF5子程序。每个子程序都有各自特定的功能，下面详细介绍一下入口为\$6EF5

的子程序:

```
6EF5—C980  CMP  # $80; 累加器A与值$80比较, 不同的图形累加器
6EF7—9005  BCC  $6EFE; A的值有所不同 (这是由设计者定的)
6EF9—2903  AND  # $03
6EFB—18    CLC
6EFC—6903  ADC  # $03
6EFE—0A    ASL; A的内容  $\times 2 \rightarrow A$ 
6EFF—A8    TAY; A  $\rightarrow Y$ 
6F00—B954F LDA  $6F54, Y; 从数据块$F54~6F89中取出不同图形数据的始址
6F03—8D356F STA  $6F35;
6F06—8D426F STA  $6F42
6F09—B9556F LDA  $6F55, Y
6F0C—8D366F STA  $6F36
6F0F—8D456F STA  $6F43
6F12—A506  LDA  $06; 图形位置的纵坐标  $\rightarrow A$ 
6F14—8501  STA  $01; A  $\rightarrow$  $01 (临时单位)
6F16—A605  LDX  $05; 横坐标  $\rightarrow x$ 
6F18—BC2879 LDY  $7928, x; 从数据块$7928~7AE7取出该横坐
6F1B—BE846F LDX  $6F84, Y; 标在某个字节的第i(i=0, 1, —, 6)位
6F1E—A908  LDA  # $08
6F20—8500  STA  $00; # $08  $\rightarrow$  $00 (临时单元) (为了循环8次, 即每个图形占8
行)
6F22—A401  LDY  $01;
6F24—B9DA74 LDA  $74DA, Y; 图形所在行第一个字节的地址高位和地址低位送
单元$03, $02 (以便间接寻址)
6F27—8503  STA  $03;
6F29—B9E275 LDA  $75E2, Y;
6F2C—8502  STA  $02
6F2E—A405  LDY  $05
6F30—B90978 LDA  $7809, Y; 图形横坐标所在的字节 (设为第j个字节) 送往A
6F33—A8    TAY;
6F34—BD7961 LDA  $6179, X; 取出原图形数据, 与将显示的新图形数据异或
6F37—5102  EOR($02), Y;
6F39—0980  ORA  # $80
6F3B—2564  AND  $64
6F3D—9102  STA  ($02), Y; 异或后数据写入显示位置
6F3F—C8    INY
6F40—E8    INX; 取出下一字节
```

6F41—BD7961 LDA \$6179, X; 对第二个字节再进行异或处理
 6F44—5102 EOR(\$02), Y
 6F46—0980 ORA # \$80
 6F48—2564 AND \$64
 6F4A—9102 STA(\$02), Y
 6F4C—E8 INX
 6F4D—E601 INC \$01; 纵坐标增1 (即处理下一行)
 6F4F—C600 DEC \$00
 6F51—DOCF BNE \$6F22; 循环8次, 因为每个图形占用8行, 每行2个字节
 6F53—60 RTS;

2、这个程序的最大特点是用存储空间来换取运行时间的思想方法, 也是主要的技巧之一。程序中用8K存储量来存放显示游戏框架用的数据, 避免了程序开始时初始化屏幕单元的大量运行时间, 加速了程序的运行速度。另外, 程序中还用了几K的存储空间来存储一些简单而有规律的数据, 使程序方便地使用它们, 避免了耗时的乘除运算。

例如: 内存单元\$7928~\$7AE7存放64组数 (程序中只用到前面24组, 其余的并没有用到, 这是浪费的), 每组7个单元, 连续存放0到6, 64组数均是如此。它的作用是根据内存单元\$05 (存放横坐标) 的内容, 确定所显示的图形从某字节的第几位 (设为第*i*位) 开始, 这里, $i = (\$7928 + (\$05))$, 只要用两条简单的取数指令:

```
LDX $05
LDA $7978, X
```

就可实现 (*i*值在累加器A中), 这种实现方法运行速度很快, 常在游戏程序中采用。要是用除法运算也可实现该功能: ($\$05 + 7$) 的余数就是*i*的值, 但这要花费多出数十倍的运行时间 (除法运算要用几十条指令), 这样, 游戏程序运行起来很慢, 玩起来也就没意思了。

数据块\$76EA~7808, \$74DA~7599, \$7809~7927等都是为了避免复杂的运算而使用大量的存储空间存放数据。

3、游戏中图形的产生、消失和移动是个关键, 那么图形是如何移动的呢? 在未分析本程序之前, 我们认为应是先清除这些单元的值 (*i*即原图形所对应单元), 然后在所移到的位置所在的内存单元写上新的图形数据, 这样不仅时间花得较多, 而且很难处理几个图形的重叠、部分重叠及重叠后分开的情况。分析了程序之后, 我们发现并非如此, 从中我们学到了一种崭新的技术, 即用一个子程序来显示或消除各种图形。例如入口为\$6EF5的子程序, 若原先屏幕上某位置没有图形, 则调用一次该子程序便可显示出某个图形, 若在这个基础上再调用一次, 那么图形便消失了。这样, 要移动图形只要改变屏幕地址这一输入参数分别两次调用该子程序即可。

那么, 同样是入口为\$6EF5的子程序, 为什么能实现显示图形的功能, 又能实现消除图形的功能呢? 原来, 这里采用了“异或”的方法, 把要显示的数据与屏幕所在单元的数据“异或”后写入屏幕所在地址单元。我们知道, $0 \oplus A = A$, $A \oplus A = 0$ 这就是为什么第一次调用会显示出图形, 而再次调用时就消失了的原因。

入口为\$13E8的子程序是产生子弹并发生移动的功能，也是采用这种方法。

4、分析中可以发现，很多数据块（或其可用部分）均是256或小于256个单元。观察游戏所用的屏幕图形分布，共40个字节280位，但右边16个字节用来显示得分等，图形移动部分仅左边24个字节168位，小于256，这些安排都是为了适应8位机的特点，用作位移量的变址寄存器X和Y都是8位，如果要处理的数据超过256个，则处理上很不方便，必定要花费很多运行时间。

5、子程序中多次用进位位C作为输出参数，以确定返回调用程序后的分支跳转方向，这是一种简便的方法。

6、以时间换空间的思想方法。为了不浪费存盘空间，程序采取数据移动的方法，经过压缩后才存到软盘中。运行之前先执行一段数据移动的子程序，以适应内存有固定分布的APPLE机。我们知道，屏幕显示内存单元在高分辨率第一区（\$2000~\$3FFF），而程序必须存于这一区域的前后，但存盘时不必浪费这8K空间，为了充分利用外存资源，花少量时间进行数据移动是值得的。由于程序经过了移动，因此执行前与执行后的子程序入口是不尽相同的，在子程序功能表（附录）中给出的就是这样的两种入口地址。

7、程序中还利用机器码这一特点，在程序中灵活改变一些单元（指令码）内容，以便程序在动态中变化。

通过这次毕业实习，我们也获得了一些分析一个未知系统的经验，或许对没有分析过程的同学可以有所帮助，少走一些弯路。

当我们接到一个没有提供任何资料的程序时，不要忙于分析程序，首先应先搞清楚该程序的硬件和软件背景，对它们越熟悉，就越能顺利地分析程序。其次，打印出程序，然后根据转子指令，或者转跳指令以及其他有关的指令，找出各个子程序入口，分清主程序与子程序的界限，粗略地掌握整个程序的来龙去脉，最好能画出他们的嵌套关系，有利于我们了解整个程序的层次结构，对程序的粗线条一目了然。在这个基础上，我们选择最低层的子程序入手，其次是上一层的子程序，依次类推，分析起来就有条有理，也容易理解作者的思路，这就是自底向上的方法。我们在分析过程中也使用了程序设计中经常使用的自顶向下的方法。例如我们从整个程序的大功能入手，然后分析出需要什么子功能，较容易地找出其对应的子程序，知道了子程序的功能，再去分析其中的指令就很容易理解了。在分析过程中，应随时记下自己搞不清的问题，以便询问和针对性地查询有关资料（如监控子程序），并将仔细阅读程序与上机调试密切结合，特别要指出这两方面缺一不可，要重视上机调试，否则对程序的理解很可能是不准确的。贯穿整个分析过程的应是要注意合作交流，总结和整理已分析出的资料，特别在分析过程中，要有严谨的科学态度，一个小疏忽，很可能就是一个转折点，这一点我们这次分析也曾碰壁过，因此深有体会。

总之，这次毕业实习，经过我们的密切合作和努力，在老师的指导下，圆满地完成了任务，各自都得到了锻炼和提高，为走向工作岗位打下了基础。