高斯克呂格投影

盧福康編著

目　次

高斯克呂格投影

§ 1. 地圖投影的意義。

地球表面近似一個不可展開的旋轉橢圓面，所以測繪地圖就不可能把地形絕對正確地繪成地圖，只能依一定的法則把地面點的位置轉到平面上去，依據這些點，逐步描繪成地圖，使地圖在一定的條件下保持正確。這些條件視需要而定，例如實地和圖上的形狀在適當範圍內相似，方向距離的誤差儘量小，面積相等，由一點至各點的方位距離正確。但這些條件是不能兼籌並顧，須就用圖的目的而加以選擇。由旋轉橢圓面上點的座標依一定法則描寫到平面上去，這一步驟就是地圖投影。

現代地圖投影已成爲數學的一部份，"投影"一詞，在意義上也推廣一步，已經不僅是幾何上所包涵那種"投影"的意義。

正形地圖投影對方向距離都相當正確，所以在大比例尺圖，尤其是軍用地圖一般都採用正形投影，高斯克呂格投影亦稱橫麥卡托投影，爲正形投影之一種。首先由高斯(*Gauss Karl Friedish* 1777—1855)推得其計算公式，後經克呂格氏(*L*. *Krüger*)研究擴充，更加詳盡，所以後人稱此投影爲高斯克呂格投影。此投影亦如蘭孛氏正形圓錐投影分帶使用，惟按東西經差分帶，以經差3°或6°爲一帶，其座標格在鄰帶圖幅重叠一部份，以補救兩帶交接處圖幅用時座標格不致中斷。其有關算式之推演依次敘述之。

§ 2. 旋轉橢圓體的基本公式。

大地測量三角點之距離，方位角及經緯度都依托在旋轉橢圓面上計算。也就是說把地球的形狀作爲旋轉橢圓體來研究和處理問題，有關旋轉橢圓體的公式首先應加以敘述。如圖一所示：N 是地球的北極，ABA' 是赤道，OA 爲長半徑，也叫赤道半徑，ON

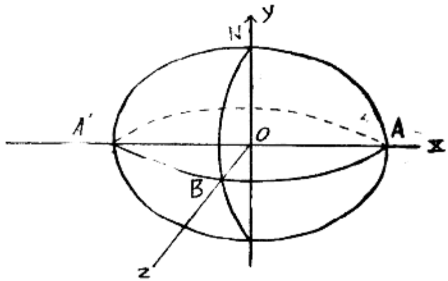


圖 一

爲短半徑也叫極半徑。長短半徑確定，旋轉橢圓體的大小形狀就確定了，設 $OA=a$ $ON=b$ 旋轉橢圓面的方程式如下：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

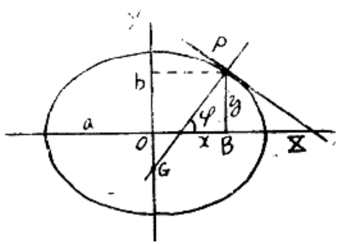


圖 二

通過任何一點的子午圈方程式應當是：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (1)$$

圖二爲地面上一點P的子午圈，這是個橢圓，我們把它幾個常數寫在下面：

扁率 $f=\dfrac{a-b}{a}$

第一偏心率 $e=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$

第二偏心率 $e'=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{b^2}}$ $n=\dfrac{a-b}{a+b}$

由此可導出下式：

$$e'^2=\frac{e^2}{1-e^2}\qquad e^2=\frac{e'^2}{1+e'^2}$$

$$(1-e^2)(1+e'^2)=1$$

$$f=1-\sqrt{1-e^2}\qquad e^2=2f-f^2$$

爲以下計算方便計：假設

$$c=\frac{a^2}{b}\qquad c=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$$

現在我們用的是蘇聯克拉索夫斯基旋轉橢圓體，

a =6378245公尺，00000

b =6356863公尺，01877

f =1：298.3 或0.003352329869

e^2 =0.006693421623

e'^2 =0.006738525415

由圖一可知作 P 點的切綫及法綫，PDB 角是 P 點的緯度，將（1）式微分得：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\quad\frac{b^2}{a^2}$$

因爲$\frac{dy}{dx}$是切綫的斜度，所以法綫的斜度應當是$-\frac{dx}{dy}$

而 $$\tan\varphi=-\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x}\cdot\frac{a^2}{b^2}=\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{(1-e^2)}\qquad (2)$$

由（1）得 $$x^2+\frac{y^2}{1-e^2}=a^2\qquad (3)$$

由（2）及（3）式可推得 x，y 的算式，因

$$x=\frac{y\cos\varphi}{(1-e^2)\sin\varphi}$$

代入（3）得 $$y^2\left(\frac{\cos^2\varphi+(1-e^2)\sin^2\varphi}{(1-e^2)^2\sin^2\varphi}\right)=a^2$$

故 $$y=\frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\qquad (4)$$

同理可得 $$x=\frac{a\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \tag{5}$$

子午圈爲一橢圓，其曲率半徑設爲M，按曲綫的曲率半徑公式爲：

$$M=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{6}$$

由(1)式知

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)=-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{y}}{y^2}\right)$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}\right)=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

代入(6)式：$M=-\dfrac{\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\dfrac{b^4}{a^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{b^4}{a^2y^3}}=-\dfrac{(y^2-(1-e^2)^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-e^2)^2}$

$$=-\frac{1}{a^2(1-e^2)^2}\left[\frac{a^2(1-e^2)^2\sin^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}+\frac{(1-e^2)^2a^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{7}$$

由圖一之P點作法綫與縱軸相交於G。

設 $PG=N$ 則 $N=x\sec\varphi$

故 $$N=\frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \tag{8}$$

此N值卽爲卯酉圈之曲率半徑。

爲計算推演時方便計，以字母代各算式。令$\dfrac{a^2}{b}=c$

$$W^2=1-e^2\sin^2\varphi,\qquad W=(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

則 x，y，M 可寫成下式 $\qquad N=\dfrac{a}{W}$

$$x=\frac{a\cos\varphi}{W}\qquad y=\frac{a(1-e^2)\sin\varphi}{W}\qquad M=\frac{a(1-e^2)}{W^3}\tag{10}$$

第二偏心率 $\quad e'^2=\dfrac{a^2-b^2}{b^2}=\dfrac{a^2}{b^2}-1\qquad \dfrac{a}{b}=(1+e'^2)^{\frac{1}{2}}$

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}\qquad \frac{b}{a}=(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$e^2=\frac{e'^2}{1+e'^2}\qquad\qquad \frac{a^2}{b}=c$$

故 $$x=\frac{a\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}=\frac{a\cos\varphi}{\left(1-\dfrac{e'^2}{1+e'^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{a\cos\varphi(1+e'^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+e'^2-e'^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\dfrac{a^2}{d}\cos\varphi}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{e\cos\varphi}{(1+e'^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

又命 $\quad V^2=1+e'^2\cos^2\varphi\quad \eta^2=e'^2\cos^2\varphi\quad V^2=1+\eta^2 \qquad (11)$

則 $$x=\frac{c\cos\varphi}{V}\tag{12}$$

同理可得 $$y=\frac{c\sin\varphi}{V(1+e'^2)}\qquad M=\frac{c}{V^3}\tag{13}$$

$$N=x\sec\varphi=\frac{c\cos\varphi}{V}\sec\varphi=\frac{c}{V}\tag{14}$$

$$\frac{N}{M}=\frac{c}{V}\bigg/\frac{c}{V^3}=V^2\qquad \text{或}\ \frac{N}{M}=\frac{W^2}{1-e^2}\tag{15}$$

§ 3. 正形投影的意義。正形投影在地圖投影上是一種重要的投影法。這種投影的條件，也就是它的特性，可以用下面的兩點來說明：

(A)實地上兩條交綫所夾的角，經投影後夾角的大小不變。(B)投影範圍內，實地上任何地點各方位的綫段和投影面上相應

綫段的長度比是一致的。

因此正形投影在小範圍內，實地的形狀和地圖上的形狀是相似的。經緯綫在正形投影的地圖上是正交的。正形投影的長度比雖然各點並不一致，但和其他投影比較就更近於一，（即實地長和投影長相差小）所以軍用地圖，其他大比例尺圖大都採用正形投影。

§ 4. 正形投影的一般理論：

正形投影的理論現在已成爲數學的一部份，首前研究這一問題的是蘭孛氏（*Heinrich Johann Lambert* 1728－1777），在他以前的學者研究地圖投影幾乎都限於用透視的方法來研究問題，到蘭孛氏他就用更高的觀點，數學方法來分析問題，將地形按正形條件描畫成地圖，如他研究所得的圓錐正形投影。正形的理論，以後經高斯進一步的研究，將這問題研究得很完整而且非常透澈，導出他關於正形投影的一般理論，稱爲高斯通解。

現在我們把旋轉橢圓面投影到平面上的正形投影敘述如下：假說地面有一點 P，它的地理座標是 φ 、λ，另一點 P' 座標是 $\varphi+d\varphi$ 、$\lambda+d\lambda$，投影到平面上 P 點的座標是 x 、y，p' 點的座標是 $x+dx$ 、$y+dy$ 如圖三所示，實地上 PP' 的距離是 dS，投影在平面上距離是 ds，由圖可知，$PQ=N\cos\varphi\, d\lambda$，$QP'=Md\varphi$，所以可得 dS 是：

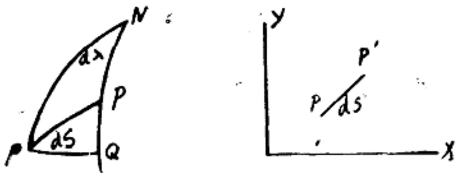


圖　三

$$dS^2=M^2d\varphi^2+N^2\cos^2\varphi\, d\lambda^2$$
$$=N^2\cos^2\varphi\left(\frac{M^2}{N^2\cos^2\varphi}d\varphi^2+d\lambda^2\right) \qquad (1)$$

投影面上相當的 ds 可以寫成下式　　$ds^2=dx^2+dy^2$　　(2)

長度比 m 由(1)(2)兩式可知：

$$m^2=\frac{ds^2}{dS^2}=\frac{dx^2+dy^2}{M^2\,d^2\varphi+N^2\cos^2\varphi\, d\lambda^2} \qquad (3)$$

現在我們假設 $d\theta=\dfrac{M^2}{N\cos\varphi}d\varphi$　　(4)

那麼(1)式就可以寫成下面簡單的形式：

$$dS^2=N^2\cos^2\varphi\,(d\theta^2+d\lambda^2) \qquad (5)$$

θ 值當然是緯度 φ 的函數，而且可以由(4)求得，我們輸入這 θ 值，可以使以後討論正形條件時很簡單，這 θ 值稱爲等量緯度。由前一節知道旋轉橢圓面的子午圈曲率半徑 M 卯酉圈曲率半徑 N 的算式是：

$$M=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \qquad N=\frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

代入(4)式得：$d\theta=\dfrac{(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}$　　(6)

把(6)式積分出來就可得到等量緯度 θ 和 φ 的關係式

$$\theta=\int_0^{\varphi}\frac{(1-e^2)\,d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$
$$+\frac{e}{2}\int_0^{\varphi}\frac{-e\cos\varphi\, d\varphi}{1-e\sin\varphi}-\frac{e}{2}\int_0^{\varphi}\frac{e\cos\varphi\, d\varphi}{1+e\sin\varphi}$$
$$=\ln\tan\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{e}{2}\ln(1-e\sin\varphi)$$
$$-\frac{e}{2}\ln(1+e\sin\varphi)=\ln\tan\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$+\frac{e}{2}\ln\frac{(1-e\sin\varphi)}{(1+e\sin\varphi)}$$
$$=\ln\left[\tan\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}\right]$$

或寫成 $$\varepsilon^{\theta} = \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}$$

再假設： $$\tan\left(45^\circ + \frac{X}{2}\right) = \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}$$

$$X = 90 - Z \qquad \varphi = 90^\circ - P$$

就可得 $$\tan\frac{Z}{2} = \tan\frac{p}{2}\cdot\left(\frac{1+e\cos p}{1-e\cos p}\right)^{\frac{e}{2}} \qquad (7)$$

如果依（7）式算各緯度相應的 z 值，編算成表，對正形投影座標計算可以方便些。

平面座標 x 、y 的推求，前面已經談及一定如下面的形式，

$$x = f_1(\varphi, \lambda) \qquad y = f_2(\varphi, \lambda)$$

我們再用 φ 的函數等量緯度 θ 輸入，討論起來有很多方便

假設： $$x = f_1'(\theta, \lambda) \qquad y = f_2'(\theta, \lambda) \qquad (8)$$

按微分公式可得 $$dx = \frac{\partial x}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda \qquad (9)$$

同理： $$dy = \frac{\partial y}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial\lambda}d\lambda \qquad (10)$$

代入(2)式 $$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2\right]d\theta^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2\right]\partial\lambda^2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)d\theta\, d\lambda \qquad (11)$$

再命

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 = E \qquad \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda} = F$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2 = G \qquad (12)$$

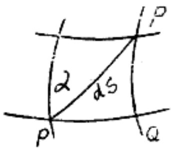
將(12)式代入(11)式各值：

$$ds^2 = Ed\theta^2 + 2Fd\theta\, d\lambda + Gd\lambda^2$$

所以(3)式的長度比又可以寫成下形：

$$m^2=\frac{E d\theta^2+2F d\theta\, d\lambda+G d\lambda^2}{N^2\cos^2\varphi(d\theta^2+d\lambda^2)} \tag{13}$$

再由圖4.和 dS 的方位角是 α 知



$$\tan(90-\alpha)=\frac{Qp'}{pQ}=\frac{M d\varphi}{N\cos\varphi\, d\lambda}$$

$$\tan\alpha=\frac{N\cos\varphi\, d\lambda}{M d\varphi} \tag{14}$$

由(4)式知 $d\theta=\frac{M}{N\cos\varphi}d\varphi$ 所以

$$d\varphi=\frac{N\cos\varphi\, d\theta}{M}$$

代入(14)式得

$$\tan\alpha=\frac{d\lambda}{d\theta} \qquad \text{或} \qquad d\lambda=\tan\alpha\, d\theta$$

將(13)式內的 $d\lambda$ 用上值代替

$$m^2=\frac{E d\theta^2+2F d\theta\cdot\tan\alpha\, d\theta+G\tan^2\alpha\, d\theta^2}{N^2\cos^2\varphi(\tan^2\alpha\, d\theta^2+d\theta^2)}$$

$$=\frac{d\theta^2(E+2F\tan\alpha+G\tan^2\alpha)}{N^2\cos^2\varphi\sec^2\alpha\, d\theta^2}$$

$$=\frac{E\cos^2\alpha+2F\sin\alpha\cos\alpha+G\sin^2\alpha}{N^2\cos^2\varphi}$$

正形投影的特性就是要長度比和方位角無關，才能達到某點任何方向的長度比都是一致的條件，所以應當有

$$E=G \qquad\qquad F=O$$

正形投影的條件是：

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}=O\text{，}\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2 \qquad \cdots\cdots(15)$$

由(15)式的第一式得

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}=-\frac{\frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\frac{\partial y}{\partial \theta}}$$

代入第二式：

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{e\theta}\right)^2=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}{\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

上式要是能彀成立，一定要有下列二種情况之一，

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2=O \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2$$

第一式顯然必須虛數才成立，可知第二情况是正形投影必要條件，即：

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=\pm\frac{\partial y}{\partial \theta} \tag{16}$$

先將(16)式用正號的關係代入(15)的一式，可得：

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=-\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

再取(16)式負號的關係式代入(15)的第一式可得：

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=+\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

由此可知，如x，y和θ，λ的關係合於下面兩組微分方程式的一種情况，就是正形投影：

$$(1)\qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda}=+\frac{\partial y}{\partial \theta},\ \frac{\partial x}{\partial \theta}=-\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda}=-\frac{\partial y}{\partial \theta},\ \frac{\partial x}{\partial \theta}=+\frac{\partial y}{\partial \lambda}. \tag{17}$$

(17)式的微分方程亦稱 *Riemann – Cauchyschen* 微分方程式，

上述正形投影的條件，也可以用複數推出來，假設：

$$v=\lambda+i\theta \tag{18}$$

$$Z=x+iy \tag{19}$$

$$Z=f(v) \tag{20}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \lambda} \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{21}$$

由(18)式知 $\frac{\partial v}{\partial \lambda}=1 \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta}=i$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial \lambda}=\frac{\partial z}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial \theta}=i\frac{\partial z}{\partial v}=i\frac{\partial z}{\partial \lambda} \tag{22}$$

將(19)式分別對λ，θ微分可以得到下二式：

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}=\frac{\partial x}{\partial \lambda}+i\frac{\partial y}{\partial \lambda},\qquad \frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial x}{\partial \theta}+i\frac{\partial y}{\partial \theta} \tag{23}$$

由(23)(23)可推出下例關係

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta}=\frac{\partial x}{\partial \theta}+i\frac{\partial y}{\partial \theta}=i\frac{\partial Z}{\partial \lambda}=\frac{\partial x}{\partial \lambda}i-\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

或是

$$\frac{\theta x}{\partial \theta}+i\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial y}{\partial \lambda}+i\frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

由(24)式將虛數部份和虛數部份相等，可以得下列兩式

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=-\frac{\partial y}{\partial \lambda}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial x}{\partial \lambda} \tag{25}$$

(25)式和上面推得正形條件的第一組情況完全一致，可見若是x，y和θ，λ的關係合於下面的形式

$$x+iy=f(\lambda+i\theta)$$

就是正形投影。函數f的形式可適當地選擇，就可以得到我們所需要一種投影。

用上述同樣推演方法，假設$V=\lambda-i\theta$，$Z=x+iy$ $Z=f(V)$可以得到正形投影的條件另一組微分方程式，就是

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=-\frac{\partial y}{\partial \theta}\ ,\ \frac{\partial x}{\partial \theta}=+\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

可見平面座標和θ,λ的關係只要適合下列形式

$$x+iy=f(\lambda\pm i\theta) \tag{26}$$

那麼這種投影就是正形投影了。不但如此，合於下列形式的也是

一樣。

$$x+iy=f(\theta\pm i\lambda) \tag{27}$$

我們上面所推的結果，(26)(27)的關係公式稱爲正形投影的高斯通解，凡是正形投影必須有(26)或(27)的關係。反過來說合乎(26)或(27)式關係的一定是正形投影。

§ 5. 高斯—克呂格投影的公式，

依據上節所述，高斯—克呂格投影的平面座標和地理座標的關係合於下式

$$x+iy=F(\theta+i\lambda) \tag{1}$$

又因高斯克呂格投影的中央子午圈投影後爲眞長。所以應有下列關係：

當 $\lambda=o$ $\qquad x=F(\theta)$ (2)

$F(\theta)$ 就是由座標原點到該點的子午圈弧長，以等量緯度表的函數，設以B表之，再將(1)式的右端用戴氏定律展開得：

$$F(\theta+i\lambda)=F(\theta)+i\lambda\frac{dF(\theta)}{d\theta}+\frac{1}{2}(i\lambda)^2\frac{d^2F(\theta)}{d\theta^2}+\frac{1}{6}(i\lambda)^3\frac{d^3F(\theta)}{d\theta^3}+\frac{1}{24}(i\lambda)^4\frac{d^4F(\theta)}{d\theta^4}+\cdots\cdots \tag{3}$$

由(1)及(2)的關係和

$i^2=-1 \qquad i^3=-i \qquad i^4=1$ 等值代入(3)式得，

$$x+iy=B+i\lambda\frac{dB}{d\theta}-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{d^2B}{d\theta^2}-\frac{1}{6}i\lambda^3\frac{d^3B}{dq^3}+\frac{1}{24}\lambda^4\frac{d^4B}{dq^4}+\frac{1}{120}i\lambda^5\frac{d^5B}{dq^5}-\frac{1}{720}\lambda^6\frac{d^6B}{dq^6}\cdots\cdots \tag{4}$$

使虛數部份等於虛數部份，實數等於實數。

$$x=B-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{d^2B}{d\theta^2}+\frac{1}{24}\lambda^4\frac{d^4B}{d\theta^4}-\frac{1}{720}\lambda^6\frac{d^6B}{d\theta^6} \tag{5}$$

$$y=\lambda\frac{dB}{d\theta}-\frac{1}{6}\lambda^3\frac{d^3B}{d\theta^3}+\frac{1}{120}\lambda^5\frac{d^5B}{d\theta^5} \tag{6}$$

(5)(6)兩式卽座標之算式，但必須求出各項之微分係數，才能

計算，由前節知：

$$dB = Md\varphi = \frac{c}{V^3}\,d\varphi \qquad d\theta = \frac{M}{N\cos\varphi}d\varphi = \frac{d\varphi}{V^2\cos\varphi}$$

故

$$\frac{dB}{d\theta} = \frac{c}{V^3}d\varphi \Big/ \frac{1}{V^2\cos\varphi}\,d\varphi = \frac{c}{V}\cos\varphi \qquad (7)$$

已知$\frac{dB}{d\theta} = \frac{c}{V}\cos\varphi$ 依次可以推出各次微分如下：

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dB}{d\theta}\right) = -\frac{c}{V^2}\,\frac{dV}{d\varphi}\cos\varphi - \frac{c}{V}\sin\varphi \qquad (8)$$

∵ $\quad V^2 = 1+\eta^2 \qquad\qquad \eta^2 = e'^2\cos^2\varphi$

又 $\quad 2V\frac{dV}{d\varphi} = 2\eta\frac{d\eta}{d\varphi} \qquad \frac{dV}{d\varphi} = \frac{\eta}{V}\,\frac{d\eta}{d\varphi}$

就 $\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi$ 求微分 $\qquad 2\eta\frac{d\theta}{d\varphi} = e'^2\cos\varphi\sin\varphi$

故 $\quad \frac{d\eta}{d\varphi} = -\eta\tan\varphi$

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{\eta}{V}\cdot(-\eta\tan\varphi) = -\frac{\eta^2}{V}\tan\varphi$$

爲便利計將 $\tan\varphi$ 代以 t 則 $\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2}{V}t.$ $\qquad (9)$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dB}{d\theta}\right) = -\frac{c}{V^2}\left(-\frac{\eta^2}{V}t\right)\cos\varphi - \frac{c}{V}\sin\varphi$$

$$= \frac{c}{V^3}\sin\varphi\,(\eta^2-(1+\eta^2))$$

因 $\quad \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{V^2\cos\varphi} \qquad$ 故$\frac{d\varphi}{d\theta} = V^2\operatorname{con}\varphi \qquad (10)$

以(10)乘之得

$$\frac{d^2B}{d\theta^2} = -\frac{c}{V^3}\sin\varphi\cdot V^2\cos\varphi = -\frac{c}{V}\sin\varphi\cos\varphi \qquad (11)$$

又將(11)式對φ微分：

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d^2B}{d\theta^2}\right) = -\frac{c}{V^2}\sin\varphi\cos\varphi\frac{dV}{d\varphi} - \frac{c}{V}\cos^2\varphi + \frac{c}{V}\sin^2\varphi$$

$$=\frac{c}{V^2}\sin^2\varphi\frac{\eta^2}{V}-\frac{c}{V}\cos^2\varphi+\frac{c}{V}\sin^2\varphi \tag{12}$$

將(12)乘以(10)得

$$\frac{d^3B}{d\theta^3}=\frac{c}{V}\sin^2\varphi\cos\varphi\cdot\eta^2-cV\cos^3\varphi+cV\sin^2\varphi\cos\varphi$$

$$=-\frac{c}{V}\cos^3\varphi\,(t^2\eta^2+V^2-V^2t^2)$$

$$=-\frac{c}{V}\cos^3\varphi\,(t^2\eta^2+1+\eta^2-t^2-\eta^2t^2)$$

$$=-\frac{c}{V}\cos^3\varphi\,(1-t^2+\eta^2) \tag{13}$$

又將(13)式對φ微分：

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d^3B}{d\theta^3}\right)=\frac{c}{V^2}\cos^3\varphi\frac{dV}{d\varphi}+\frac{3c}{V}\cos^2\varphi\sin\varphi-\frac{c}{V^2}\cos\varphi\sin^2\varphi$$

$$\frac{dV}{d\varphi}-\frac{c}{V}\sin^3\varphi+\frac{2c}{V}\cos^2\varphi\sin\varphi$$

$$+\frac{c}{V^2}\cos^3\varphi\,\eta^2\frac{dV}{d\varphi}+\frac{3c}{V}\cos^2\varphi\,\eta^2\sin\varphi$$

$$-\frac{2c}{V}\cos^3\varphi\,\eta\frac{d\eta}{d\varphi}=-\frac{c}{V^2}\cos^3\varphi\frac{\eta^2}{V}t$$

$$+\frac{3c}{V}\cos^2\varphi\sin\varphi+\frac{c}{V^2}\cos\varphi\sin^2\varphi\frac{\eta^2}{V}t$$

$$-\frac{c}{V}\sin^3\varphi+\frac{2c}{V}\cos^2\varphi\sin\varphi-\frac{c}{V^2}\cos^3\varphi\,\eta^4\frac{t}{V}$$

$$+\frac{3c}{V}\cos^2\varphi\sin\varphi\,\eta^2+\frac{2c}{V}\cos^3\varphi\,\eta^2t$$

上式乘以(10)式，得：

$$\frac{d^4B}{d\theta^4}=-\frac{c}{V}\eta^2t\cos^4\varphi+3cV\cos^3\varphi\sin\varphi+\frac{c}{V}\eta^2t\cos^2\varphi\sin^2\varphi$$

$$-cV\sin^3\varphi\cos\varphi+cV\cos^3\varphi\sin\varphi-\frac{c}{V}\eta^4t\cos^4\varphi$$

$$+3cV\eta^2\cos^3\varphi\sin\varphi$$

$$=\frac{c}{V}\sin\varphi\cos^3\varphi(-\eta^2+3V^2+\eta^2t^2-V^2t^2+2V^2-\eta^4$$
$$+3V^2\eta^2+2V^2\eta^2)$$
$$=\frac{c}{V}\sin\varphi\cos^3\varphi(-\eta^2+3+3\eta^2+\eta^2t^2-t^2-\eta^2t^2+2$$
$$+2\eta^2-\eta^4+3\eta^2+3\eta^4+2\eta^2+2\eta^4)$$

故 $$\frac{d^4B}{d\theta^4}=\frac{c}{V}\sin\varphi\cos^3\varphi(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4) \tag{14}$$

再將(14)式微分：

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d^4B}{d\varphi^4}\right)=-\frac{5c}{V^2}\sin\varphi\cos^3\varphi\frac{dV}{d\varphi}+\frac{5c}{V}\cos^4\varphi$$
$$-\frac{15c}{V}\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\frac{c}{V^2}\sin^3\varphi\cos\varphi\frac{dV}{d\varphi}$$
$$-\frac{3c}{V}\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\frac{c}{V}\sin^4\varphi$$
$$-\frac{9c}{V^2}\sin\varphi\cos^3\varphi\eta^2\frac{dV}{d\varphi}+\frac{9c}{V}\cos^4\varphi\eta^2$$
$$-\frac{27c}{V}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\eta^2+\frac{18c}{V}\sin\varphi\cos^3\varphi\eta\frac{d\eta}{d\varphi}$$
$$-\frac{4c}{V^2}\sin\varphi\cos^3\varphi\eta\frac{dV}{d\varphi}$$
$$+\frac{4c}{V}\cos^4\varphi\eta^4-\frac{12c}{V}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\eta^4$$
$$+\frac{16c}{V}\sin\varphi\cos^3\varphi\eta^3\frac{d\eta}{d\varphi}$$
$$=+\frac{5c}{V^3}\sin\varphi\cos^3\varphi\eta^2t+\frac{5c}{V}\cos^4\varphi$$
$$-\frac{15c}{V}\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\frac{c}{V^3}\sin^3\varphi\cos\varphi\eta^2t$$
$$-\frac{3c}{V}\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\frac{c}{V}\sin^4\varphi$$
$$+\frac{9c}{V^3}\sin\varphi\cos^3\varphi\eta^4t+\frac{9c}{V}\cos^4\varphi\eta^2$$