建立数学模型实例研究

(美) 威廉E. 博伊斯

(William E. Boyce) 著

天问电脑公司

信息部编译

目 录

作者一览表……………………………………………………（Ⅰ）
序言……………………………………………………（2）
第一章 除草剂耐受性的数学模型……………………………………（3）
1．1 引言……………………………………………………（3）
1．2 数学模型的建立……………………………………………（4）
1．3 解……………………………………………………（8）
1．4 讨论……………………………………………………（10）
第二章 梯系统的数学模型…………………………………………（14）
2．1 引言……………………………………………………（15）
2．2 电梯的一般知识……………………………………………（16）
2．3 电梯运行时间的简单模型……………………………………（16）
2．4 环行时间和时间间隔…………………………………………（18）
2．5 一组电梯的运送时间…………………………………………（22）
2．6 简单电梯分组的优化…………………………………………（23）
2．7 一般电梯分组的优化…………………………………………（25）
2．8 一般分组的数字例子…………………………………………（27）
2．9 分组优化的结论……………………………………………（29）
2．10 电梯系统的计算机模拟……………………………………（29）
2．11 乘客运输发生器……………………………………………（31）
2．12 简单（但效率高）的调度方案………………………………（34）
第三章 交通流的数学模型…………………………………………（37）
3．1 交通指示灯截住的车队长度…………………………………（37）
3．2 交通流理论……………………………………………（42）
3．2．1 基本方程……………………………………………（42）
3．2．2 扰动的传播…………………………………………（44）
3．3 车辆贯行理论……………………………………………（52）
3．3．1 引言……………………………………………（52）
3．3．2 加州准则……………………………………………（52）
3．3．3 车流率——车流密度关系图………………………………（53）
3．3．4 一个典型问题的解…………………………………………（54）
3．3．5 有延迟的车辆贯行理论……………………………………（55）

3．3．6　车辆贯行模型的稳定性……………………………………（58）
3．3．7　非线性的车辆贯行模型……………………………………（61）
3．4　均衡速度分布……………………………………………………（65）
3．5　交通流的博尔兹曼型研究………………………………………（72）
3．6　间隔分布…………………………………………………………（77）
第四章　半导体晶体的生长…………………………………………（81）
4．1　引言………………………………………………………………（81）
4．2　问题的背景………………………………………………………（82）
4．2．1　半导体………………………………………………………（82）
4．2．2　杂质…………………………………………………………（82）
4．2．3　把杂质掺进晶体……………………………………………（83）
4．2．4　切克劳斯基（Czohralski）生长法…………………………（83）
4．2．5　分凝…………………………………………………………（83）
4．2．6　扩散…………………………………………………………（84）
4．2．7　对流…………………………………………………………（84）
4．2．8　控制…………………………………………………………（85）
4．2．9　实验结果……………………………………………………（85）
4．2．10　猜想…………………………………………………………（85）
4．3　建立数学模型……………………………………………………（85）
4．4　伯顿——普里姆——斯利克特模型……………………………（86）
4．4．1　杂质原子守恒………………………………………………（87）
4．4．2　质量守恒……………………………………………………（87）
4．4．3　轴向速度……………………………………………………（88）
4．4．4　边界条件……………………………………………………（88）
4．4．5　微分方程的解………………………………………………（89）
4．4．6　一个较粗糙的模型…………………………………………（90）
4．5　晶体生长模型……………………………………………………（91）
4．5．1　初步想法……………………………………………………（91）
4．5．2　模型…………………………………………………………（91）
4．5．3　基本守恒原理………………………………………………（92）
4．5．4　边界条件和初始条件………………………………………（92）
4．5．5　无量纲的守恒方程…………………………………………（93）
4．5．6　一个重要的突破……………………………………………（94）
4．5．7　边界条件……………………………………………………（95）
4．5．8　初始条件……………………………………………………（97）
4．6　问题的层次………………………………………………………（98）
4．7　偏微分方程的求解程序…………………………………………（99）
4．7．1　POST（关于空间和时间的常微分方程与偏微分方程解算器）……………………………………………………………（99）

4.7.2 特点……(100)
4.8 物理参数值……(101)
4.9 熔体中的流体流速……(101)
4.9.1 历史背景……(102)
4.9.2 平衡结果：无空吸（a＝0）……(105)
4.9.3 平衡结果：有空吸（a＞0）……(107)
4.9.4 比较……(108)
4.10 稳态晶体生长……(110)
4.10.1 对R的依赖关系……(110)
4.10.2 对K_0的依赖关系……(110)
4.10.3 对S_c和a的依赖关系……(112)
4.10.4 开始过程……(112)
4.10.5 计算上的困难……(112)
4.10.6 结果：有效分配系数……(113)
4.10.7 结果：熔体中的密度……(113)
4.10.8 结果：扩散边界层厚度……(114)
4.11 与时间相关的晶体生长……(117)
后记……(117)
第五章 网络中的最短通道……(122)
引言……(122)
第Ⅰ部分 求最短通道的基本方法……(122)
5.1 网络……(122)
5.2 网络中的通道……(124)
5.3 最短通道……(126)
5.4 求最短通道……(127)
5.5 矩阵方法……(127)
5.6 Dantzig方法……(129)
5.7 Floyd方法……(130)
5.8 标号方法……(131)
5.9 标号校正……(132)
5.10 标号调整……(132)
5.11 网络表示……(134)
5.12 序列……(134)
5.13 Dijkstra方法……(136)
5.14 Dantzig标号调整方法……(136)
5.15 排序……(137)
5.16 Dial方法……(138)
5.17 Pape方法……(139)
5.18 后备存储器……(140)

5．19　树处理……………………………………………………………………（141）
第Ⅱ部分　两个研究实例……………………………………………………（144）
5．20　引言……………………………………………………………………（144）
5．21　铁路短程交通路线的距离……………………………………………（145）
5．21．1　对网络编码……………………………………………………（147）
5．21．2　检查网络……………………………………………………（148）
5．21．3　划分网络……………………………………………………（150）
5．22　运输信息系统…………………………………………………………（152）
5．22．1　无回路网络……………………………………………………（154）
5．22．2　时间扩张网络算法……………………………………………（154）
5．22．3　路线／车站二分图算法………………………………………（157）
5．22．4　算法比较……………………………………………………（158）
第Ⅲ部分　求最短通道的方法的推广………………………………………（159）
5．23　再论最短通道…………………………………………………………（152）
5．24　其它的网络问题………………………………………………………（167）
5．25　近优通道………………………………………………………………（171）
第六章　计算机数据通信的数学模型……………………………………（183）
6．1　什么是数据通信？………………………………………………………（183）
6．2　预备知识…………………………………………………………………（185）
6．2．1　计数过程………………………………………………………（185）
6．2．2　生成函数………………………………………………………（191）
6．3　指数系统…………………………………………………………………（193）
6．4　缓冲过程…………………………………………………………………（203）
6．5　优先服务…………………………………………………………………（210）
6．6　星形网络和回路网络……………………………………………………（214）
6．7　环型网络中的优先服务…………………………………………………（219）
6．8　检测………………………………………………………………………（225）
第七章　操作系统的保密性验证…………………………………………（521）
7．1　引言………………………………………………………………………（251）
7．1．1　计算机中的保密问题…………………………………………（251）
7．1．2　保密技术领域…………………………………………………（251）
7．1．3　限定问题………………………………………………………（251）
7．1．4　存取控制………………………………………………………（251）
7．1．5　间接通道………………………………………………………（252）
7．1．6　理论（概况简述）……………………………………………（252）
7．1．7　本章讨论的内容………………………………………………（253）
7．2　计算机的结构格式………………………………………………………（253）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

7.2.1 整体鸟瞰……(253)
7.2.2 寄存器和存储单元……(254)
7.2.3 指令系统……(254)
7.2.4 微程序……(255)
7.2.5 特权状态……(255)
7.2.6 结论……(255)
7.3 非过程的转换说明书……(256)
7.3.1 转换规则……(256)
7.3.2 输入……(256)
7.3.3 条件表达式……(256)
7.3.4 运算……(256)
7.3.5 参数……(257)
7.3.6 下标……(257)
7.3.7 术语……(257)
7.3.8 Parnas约定……(257)
7.4 管理程序设计……(258)
7.4.1 进程……(258)
7.4.2 管理程序服务……(258)
7.4.3 管理程序设计的讨论……(260)
7.5 存取控制验证……(261)
7.5.1 存取控制策略……(261)
7.5.2 不变式……(262)
7.5.3 证明举例……(263)
7.5.4 新的不变式……(263)
7.6 信息流分析……(264)
7.6.1 存取控制的不足之处……(264)
7.6.2 信息流概念……(266)
7.6.3 授权级别……(266)
7.6.4 信息流策略……(266)
7.6.5 堵塞储存通道……(267)
7.6.6 显流……(267)
7.6.7 条件流……(267)
7.6.8 隐流……(268)
7.6.9 下标……(268)
7.7 实际中的信息流分析……(269)
7.7.1 任务……(269)
7.7.2 说明书约定的作用……(270)
7.7.3 运算和参数：计算机……(270)
7.7.4 运算和参数……(270)

7.7.5 管理运算的标准形式……(271)
7.7.6 机械化……(272)
7.7.7 问题的提出……(272)
7.7.8 常数授权级别……(272)
7.8 实例研究的结果……(272)
7.8.1 授权级别的指派……(272)
7.8.2 存取策略的应用……(272)
7.8.3 选择变量运算的信息流……(273)
7.8.4 形式上违反信息流策略……(274)
7.8.5 实际上违反信息流策略……(275)
7.9 约束……(276)
7.9.1 信息流分析的缺点……(276)
7.9.2 演绎和泄漏……(277)
7.9.3 更一般的演绎……(278)
7.9.4 定义……(278)
7.9.5 复盖……(279)
7.9.6 合意……(280)
7.9.7 无限素约束……(280)
7.9.8 素约束图定理……(281)
7.9.9 素约束图的构造……(283)
7.9.10 信息流分析的有关结论……(284)

作者一览表

罗雷德·A·德莱	伦塞累厄工业研究所
朱迪斯·F·吉尔孙	国家标准局
艾伦·G·科恩海姆	IBM托马斯J·沃森研究中心
乔纳林·K·米莱恩	MITRE公司
布鲁斯·A·鲍威尔	韦斯亭研究和开发中心
李·A·塞格尔	威兹曼科学研究所和伦塞累厄工业研究所
多纳斯·R·谢尔	国家标准局
林恩·O·威尔逊	贝尔电话验实室
克里斯托弗·韦茨哥尔	国家标准局

所有的工作都是在国家科学基金会（NSF）SED75—03520号基金的资助下完成的。本书中任何意见、研究结果、推断或建议都是属于作者（们）自己的，不一定反映NSF的观点。

序　　言

1976年，伦塞累厄工业研究所的数理科学研究室在国家科学基金会的资助下开设了应用数学理科硕士学位课程。该计划的宗旨是为那些想以硕士资格在工业或政府部门谋职的大学生提供适当的训练机会。

现代数学模型列为该学位计划的课程之一，主要是每年邀请一些实际从事应用数学工作的专家作演讲，其中大多数人受聘于政府或工业研究实验室，因此掌握有实际工作中应用数学的第一手材料。

在本书中我们选辑了现代数学模型这门课程的几个主讲人的讲稿。各章是彼此独立的，但在整体上提供了当今工业和政府研究机构中数学应用的典型实例。每章所要求的数学背景知识大不相同。该书大体适合于大学高年级或一年级研究生阅读。

我由衷地感谢作者和资助了上述工作计划的国家科学基金会。在有关数学模型的各种文献激剧增加的今天，我希望该书是一个有益的补充。

威廉*E*·博伊斯（*William E.Boyce*）

纽约州特洛伊城，

1980年1月3日。

第一章　除草剂耐受性的数学模型

1.1　引言

要想在工业生产中成功地应用数学，正确的观念和专业技能几乎同等重要。所以我在讲课中将适当地改变通常的系统性做法，在有关的地方插进一些意见和注记。在〔1〕中可以找到这里所描述的研究工作的常规说明。虽然其中有几个方面叙述得粗略一些，但却有着许多生物学意义较大的注记和更有效的数学模型。

我从事这个课题的研究是在我的同事、威兹曼研究所植物生理研究室的乔纳森·格雷塞（*Jonathan Gressel*）博士的建议之后开始的。他问我能否提供一个数学模型来支持他关于下述问题的想法，即为什么植物对除草剂的耐受性似乎没有进化。

（注：一个有成就的**学院式**研究人员最重要的特征也许是具有区分和研究重要问题并最后成功地解决它们的能力，几乎不管它到底要花多长时间。相反，**产业式**研究人员通常扮演着"问题解答人"这样的角色。他们对面向这样的一些人的公司所提出的复杂课题有浓厚的兴趣：这些人带着各种不同程度的理解力从需要数学家帮助的许多不同领域来描述问题。由于这种描述通常受时间和经济的限制，所以束缚了他们**更好地**理解现象，因而不能**完全**把握它。）

我与格雷塞博士的讨论可以归纳为下面关于耐受性问题的一般性概述。

我们知道，各种抗菌素的反复使用诱发了抗御这些化学制剂的细菌。关于昆虫对除虫剂的耐受性也有类似的现象。然而，农场主和农业专家观察到杂草对除草剂没有什么耐受性。于是产生了一个问题，即耐受性为什么这样小？

在正常条件下，即没有喷洒除草剂时，种子的生长周期为：**出芽期**（某些种子从休眠过渡到生长状态）、**生长期**（出现小的植物体或芽苗）、成熟期，以及在生长季节末成熟的植株上的种子散播期。

（**注**：对读者来说可能有些斜体字*是陌生的，尽管从它们的定义来看并不存在什么困难。一般来说，要掌握新领域的专业术语并不是一件艰难的事，但必须尽快着手去做。我的体会是，编辑一个与学习外国语时手头准备的词汇表类似的小规模术语表有时是有益的。当然这里的任务是相对容易的，因为掌握一二十个新术语往往足以打破概念上的障碍。）

典型的杂草生长有两个方面需要特别提及。其一是无论一年中遇到什么情况，杂草在下一个季节开始时单位面积上出芽的种子数大致相同。格雷塞称这种现象为**帕金松**（*Parkinson*）**效应**，因为它使人联想到工作量完全依赖于有效工时的'帕金松法则'。

*这里为黑体字。下同。

——译者注

其二，在一个给定的年份中，地里休眠的种子比将要出芽的要多得多，而且它们在若干年内仍具有发芽能力。这点与上述的第一个方面有关。关于种子生存力逐渐下降的一个典型结果如图1.1所示。洛雷塞认为这种‘种子库’（*seed bank*）效应在解释耐受品系为什么不出现时是一个重要因素。他的论证建立在这样一种期望上，即在大量的杂草种子或植株中，存在一些对除草剂有耐受性的突变体。除草剂通常是在生长季节开始时才应用，因为那时杂草刚刚开始生长。这种处理会使耐受芽苗的比率相对于那些被除草剂杀死的敏感芽苗来说有大大的增加。（一般来说，喷洒除草剂后敏感者有百分之十或至多百分之一*仍然存活，而且我们或许可以假定耐受者实际上不受影响。）但由于种子库中在地里的占压倒多数的敏感种子的存在，耐受种子的增加所产生的影响将显著地减少。

在每个季节，我们总是希望种子中有某个非常少的部分从敏感性突变到耐受性，或反之，它所占的比率可能低到10^{10}分之一。当突变体对除草剂有耐受性时，它们总是在其它方面‘适应度较低’，例如关于培养每棵植株所需要的种子数就是这样。

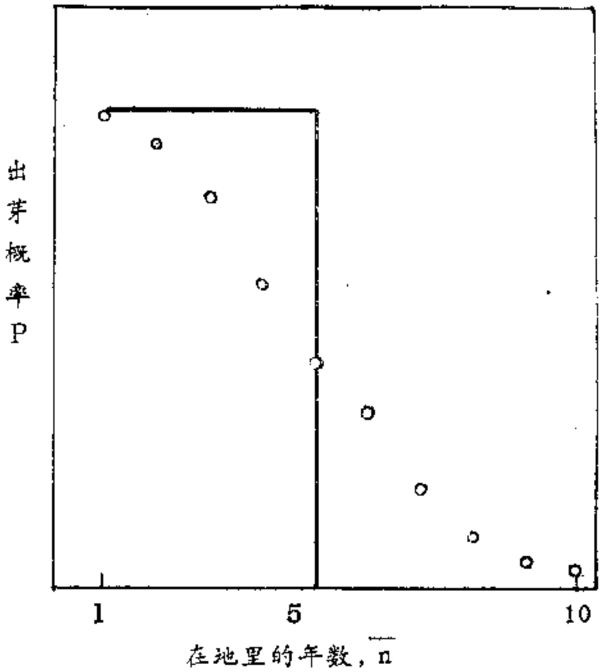

图1.1　P，一粒种子（在最理想条件下）出芽的概率，它是种子在地里的年数$\overline{n}$的函数。○，假想的‘典型’实验点；—，对实验结果的一种近似。

1.2　数学模型的建立

（关于数学方法的注记：讲到这里我要停下来要求大家告诉我下一步该做些什么。我首先请他们讨论我写在黑板上的任何可能有关的数学或半数学陈述。

我的经验表明这种建立模型的‘苏格拉底式’问答法是非常有效的。（a）尽管程度高低取决于有多少时间可用于实习，但学生们可以共同完成建立理想模型所必需的大部分

* 原文如此。

——译者注

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

工作。自然，这对于象现在的这类背景要求少的问题是较容易做到的，而且这种情形也接近于日常经验。（b）虽然这种方法与真正的模型制作经验相比略为逊色，但还是提供了建立模型的一个最为合适的训练机会；虽然由不同的方法可得到相同的方程（参看林(*Lin*)和塞格尔（*Segel*）〔4〕，第4.1节），不过，这种不太好但有效的方法是对经典模型的非常细致和可靠的检验。（c）学生们或寻求过数学家帮助的专家常常并不满足于得到一个简单的数学模型。当他们尽力完成了模型的形式化工作后才显得更有眼力。）

我们首先对‘正常’情形即在没有喷洒除草剂的条件下试图建立模型。我们同时考虑敏感和耐受品系，尽管前者比后者适应性要大些（以后考虑了除草剂的影响时，还要对模型作些修改）。当人们追踪第n年的各种现象并预计第n+1年将出现什么时，对问题采取离散化的方法似乎是自然的。

可以简单地通过假定单位面积上出芽的种子数N相同来模拟帕金松效应。在第n年里这些种子中有敏感性的种子所占的比率为σ_n，而有耐受性的比率为ρ_n。这些比率依赖于种子库中敏感和耐受种子相应的数目，以及这些种子的相应生存力。在通常作为该情形的最简单而合理的一个原始模型中，我们假定库中的种子持续$\overline{n}$年仍有其原有的生存力，而以后则完全丧失。这个假设相当于用一个阶梯函数来代替实际下降的生存力（参看图1.1）。

我们还假定（这是一种常见的情形）在库中实际上只有相当少的种子出芽。这样在计算库中的种子数时只需考虑‘存留物’（*deposits*）即可；在计算σ_n和ρ_n时可忽略出芽的种子数。

令$N_i^{(S)}$和$N_i^{(R)}$分别为第i个生长季节末存留在地里的敏感种子和耐受种子数。为了确定两种类型在每年出芽的N粒种子中所占的比率，我们将只计算过去$\overline{n}$年在地里的全部种子数并用一个相应的出芽因子χ来加权。这就得到

$$\sigma_n=\frac{\sum_{i=n-\overline{n}}^{n-1}N_i^{(S)}}{\sum_{i=n-\overline{n}}^{n-1}[N_i^{(S)}+\chi N_i^{(R)}]},\quad \rho_n=\frac{\chi\sum_{i=n-\overline{n}}^{n-1}N_i^{(R)}}{\sum_{i=n-\overline{n}}^{n-1}[N_i^{(S)}+\chi N_i^{(R)}]}。\tag{1.1a, b}$$

为了使关系式

$$\sigma_n+\rho_n=1\tag{1.2}$$

成立，这里引进了因子χ，$\chi>0$。要求有上述关系式是由于σ_n和ρ_n实质上是两个互斥事件发生的概率。在大多数情形，耐受种子是非常少的，这样在表达式(1.1)的分母中$\chi N_i^{(R)}$这一项可以忽略不计，因而χ的意义变得明朗了：它正是一粒耐受种子出芽的相关概率。我们假定$\chi<1$反映了除对除草剂的耐受性以外的所有方面中耐受种子都具有预计的不良特性这种情况，

在这些出芽的种子中，令β_S（β_R）为开始生长的敏感（耐受）种子所占的比率；ψ_S（ψ_R）为存活到生长季节末并处于生长期的植株所占的比率；ν_S（ν_R）为存活的每棵植株上的种子数。最后，令每类种子中都有μ这一小部分突变为另一种类型。有了这些定义后，在第n个生长季节末存留在地里的种子数由

$$
\boxed{\begin{aligned} N_n^{(S)} &= \sigma_n N\phi_S\,(1-\mu)+\mu\rho_n N\phi_R\,, \\ N_n^{(R)} &= \rho_n N\phi_R\,(1-\mu)+\mu\sigma_n N\phi_S\,, \end{aligned}} \qquad (1.3a, b)
$$

给出，其中

$$
\phi_S=\beta_S\psi_S\nu_S, \qquad \phi_R=\beta_R\psi_R\nu_R。 \qquad (1.4a, b)
$$

如果我们将表达式（1.1a）和（1.1b）作为概率σ_n和ρ_n代入上面的方程，则我们就会发现这样得到的差分方程描述了杂草群体的演变规律，只要我们规定了一个关于$\bar{n}$年持续时间的‘初始情况’。

框起来的方程（1.1）和（1.3）称为所考察的现象的‘基本’数学模型。事实上，我们还必须考虑喷洒除草剂所产生的影响。不过，这只要引入一个因子α_S（α_R）即可，它描述了喷洒除草剂后新近生长的敏感（耐受）者所占的比率，

基本模型的建立常常是研究中最困难的一步。然而，一旦这样的模型建立后，就会体会到研究工作终于获有成果所带来的愉快感受。基本模型可能有点难以处理，因此需要简化，或许得做补充和改进。但这至少已把所考虑的情形的内在本质翻译为有意义的数学问题了。

在着手考虑除草剂的影响以前，我们先来考察正常情形。我们要从直观上大大简化方程，以使计算变得非常简单。

在正常条件下我们认为耐受者处于劣势，按生物学说法即是**低适应度**的，这可用不等式

$$
\chi<1\,,\ \phi_R<\phi_S \qquad (1.5)
$$

来表示。第一个不等式前面提到过，它与种子生存力有关；第二个不等式确立了在出芽、生长以及繁殖期中敏感者的全面优势。

如果没有突变，那么十分明显，耐受者的低适应度最终导致它们自身的灭绝。用数学语言来说即是希望对给定的（1.5），不管怎样的初始条件，方程（1.1）和（1.3）（其中$\mu=0$）的解使得

$$
\lim_{n\to\infty} N_n^{(R)}=0。
$$

如果有突变存在，那么群体中会有少量的耐受者，这是因为每年都有一些敏感种子突变为耐受者。耐受种子到敏感者的‘回复突变’（*back mutation*）是可以忽略的，因为它只是本来就小的数目中一个非常小的部分。这样，对各个变量和参数的实际值，我们可以用$\sigma_n\approx 1$，$\rho_n\ll 1$（几乎所有出芽的种子将成为耐受者）以及

$$
N_n^{(S)}\approx N\phi_S \equiv N_C^{(S)} \qquad (1.6)
$$

来作为（1.1）和（1.3a）的近似。为了求出耐受者的小数值，我们由（1.16）和（1.3b）有下面的近似方程

$$
\boxed{N_n^{(R)}\approx\frac{f}{\bar{n}}\sum_{i=n-\bar{n}}^{n-1} N_i^{(R)}+\mu N\phi_S\,。} \qquad (1.7)
$$

这里我们采用了下面的参数

$$f=\chi\phi_R/\phi_S \quad, f<1, \tag{1.8}$$

我们称它为**预选适应度因子**（*preselection fitness factor*）。方程（1.7）有一个稳态解，我们用$N_C^{(R)}$表示，其中下标C指不使用除草剂这种对照情形。从（1.7）我们得到

$$N_C^{(R)}=\frac{\mu N\varphi_S}{1-f}. \tag{1.9}$$

正象所预期的那样，稳态水平是与突变频率成正比的。可以证明（参看下面），（1.7）的解当$n\to\infty$时永远趋于这个稳态值。

我们已经假定控制方程的解会趋于这样一种状态，即耐受植株的数目要比敏感者的少得多。在适当的简化方程后，我们找到了具有预期特征的解。这种一致性使我们相信我们的答案是对现实的一个良好近似。林和塞格尔在〔4〕中（第6.1节）讨论了这样一些例子，其中的一致性估计仍然是不精确的。不过这里我们似乎可以十分肯定没有导致林和塞格尔在〔4〕中给出的'劣质一致性估计'那样的不良条件。

我们现在假定在持续了若干年后（其中敏感者和耐受者数目由（1.6）和（1.9）的对照稳态水平给出）开始在第0年使用除草剂。除草剂极有可能使耐受者的数目增加。不过，耐受者与敏感者的数目之比仍然是小的。这种状况要持续一些年。这样，尽管我们现在必须修改（1.7）以便考虑喷洒除草剂后新近生长的敏感者（耐受者）所占的比率α_S（α_R），但在分析耐受群体的增长时，可以仍然保留近似方程的核心部分。这可由α_S（α_R）乘以ϕ_S（ϕ_R）来完成。这样，在施用除草剂的情况下，相对小的耐受群体所发生的变化就由

$$N_n^{(R)}\approx\frac{f\alpha}{\bar{n}}\sum_{i=n-\bar{n}}^{n-1}N_i^{(R)}+\mu N\phi_S\alpha_S\ , n=0,1,2,\cdots \tag{1.10}$$

来决定。这里**选择系数**α定义为

$$\alpha\equiv\alpha_R/\alpha_S\ , \tag{1.11}$$

为了分析（1.10），我们首先寻求一个对所有的n满足

$$N_n^{(R)}=N_{SS}^{(R)}$$

的稳态解。我们求得

$$N_{SS}^{(R)}=\mu N\phi_S/(1-\alpha f)\ , \tag{1.12}$$

这个解是正的。因而当

$$\alpha f\equiv\frac{\chi\phi_R\ \alpha_R}{\phi_S\ \alpha_S}<1 \tag{1.13}$$

时解具有生物学意义。实际上，在这种情形下，耐受者的'全适应度'（*overall fitness*）

（包括对除草剂的耐受性）确实比敏感者的要小。因此，耐受性会达到新的稳态水平是毫不奇怪的。我们预计，耐受水平从任意的初始状态开始都可以达到这个新值。支持这种观点的证据可以立刻给出。当$\alpha f>1$时，解（1.12）没有生物学意义，但它仍是控制差分方程（1.10）的一个特解。

只要我们对差分方程稍有了解（例如从利维（*Levy*）和莱斯曼（*Lessman*）的[3]）就会发现它们与微分方程有许多相似之处。因为这里我们遇到的是一个线性非齐次差分方程，所以我们预计（并且容易证明）一般解是非齐次方程的一个特解与齐次方程的一般解之和。实际上，如果我们记

$$N_n^{(R)}=N_{ss}^{(R)}+R_n \quad , \tag{1.14}$$

则可以看出R_n满足齐次方程

$$\boxed{R_n=\frac{\alpha f}{\bar{n}}\sum_{i=n-\bar{n}}^{n-1}R_i,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots} \tag{1.15}$$

正象上面提到的那样，初始情形取为没有喷洒除草剂时的稳定状态：

$$N_n^{(R)}=N_c^{(R)}\quad ,n=-\bar{n},-(\bar{n}-1),\ \cdots,\ -1。 \tag{1.16}$$

采用这些新的变量就有

$$R_n=N_c^{(R)}-N_{ss}^{(R)}=\mu N\phi_s\quad \left[\frac{1}{1-f}-\frac{1}{1-\alpha f}\right],$$

$$n=-\bar{n},\ \cdots,\ -1\ , \tag{1.17}$$

当$\alpha f\gg 1$时，我们可以将初始条件简化为

$$\boxed{\begin{aligned}&R_n=N_c^{(R)}\quad ,n=-\bar{n},\ \cdots,\ -1\ ;\\&N_c^{(R)}=\frac{\mu N\phi_s}{(1-f)}。\end{aligned}} \tag{1.18}$$

当$\alpha f\approx 1$即在喷洒除草剂后敏感植株的适应度和耐受植株的非常接近时，这种简化并不是合理的。不过这种情形是‘特殊的’，因而在对现象的概括性考察中可以把它忽略掉。但至少不应忘记这种例外的情形。

框起来的方程（1.15）和(1.18)构成了我们称之为‘核心问题’的数学问题，其解似乎描述了上述现象的抽象本质，

1.3 解

（1.18）的解可以写为下述形式

$$R_n=\sum_{i=1}^{\bar{n}}A_i m_i^n, \tag{1.19}$$

其中常数A_i由初始条件（1.18）决定；m_i为代数方程

$$m^{\bar{n}}=\frac{\alpha f}{\bar{n}}\left[m^{\bar{n}-1}+m^{\bar{n}-2}+\cdots+m+1\right] \tag{1.20}$$

的$\bar{n}$个根（假定互异）。此解是趋向于0还是无穷大，取决于$max_i|m_i|$是小于还是大于1（问题4）。众所周知的劳思—休威兹（*Routh—Hurwitz*）判别准则给出了多项式的所有根都在左半平面的一个充分必要条件。由一个简单的双线性变换就可把半平面映到一个圆中，朱厄里（*Jury*）在〔2〕中利用这种方法给出了最初几种情形的相关判别法。一般的公式是存在的，例如在林多夫（*Lindorff*）的〔5〕中就有一些。这些公式的应用说明（1.20）的根位于复平面单位圆中的充分必要条件是$\alpha f<1$。既然如此，R_n将趋向于0。结果耐受种子数$N_n^{(R)}$将趋于新的稳态值$N_{ss}^{(R)}$。这就证明了我们的猜测：只要耐受者在施用除草剂后的适应度仍然比敏感者的低，那么耐受力就会降到新的水平。

当$\alpha f>1$时，耐受群体增长率具有重要意义。为了认识这种重要性，我认为最好来作一次试验性的数值计算。取下述值

$$\bar{n}=5,\ \alpha f=10,\ N_c^{(R)}=2;$$

从（1.15）和（1.18）就可得到下面的结果：

$$\begin{aligned}
&R_{-5}=2, && R_{-1}=2, && R_3=488,\\
&R_{-4}=2, && R_0=20, && R_4=1460,\\
&R_{-3}=2, && R_1=56, && R_5=4376,\\
&R_{-2}=2, && R_2=164, && R_6=13088.
\end{aligned}$$

我们立即注意到关系式$R_i=3\ R_{i-1}$当$i=1$时已是一个良好的近似式，而且随i增大近似程度愈高，这种近似式可以从控制方程（1.15人得到，只要注意到

$$\begin{aligned}
R_{n+1}-R_n&=\frac{\alpha f}{\bar{n}}\left[\sum_{i=n+1-\bar{n}}^{n}R_i-\sum_{i=n-\bar{n}}^{n-1}R_i\right]\\
&=\frac{\alpha f}{\bar{n}}\left(R_n-R_{n-\bar{n}}\right).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

因为在我们感兴趣的那些情形有$R_{n-\bar{n}}>0$，所以我们可以有

$$R_{n+1}-R<\frac{\alpha f}{\bar{n}}R_n.$$

因此

$$R_{n+p}<\left(1+\frac{\alpha f}{\bar{n}}\right)^pR_n. \tag{1.22}$$

此外，当$R_{n-\bar{n}}\ll R_n$时（1.22）式的右边对于左边是一个良好的近似，耐受群体很快增

长是我们最感兴趣的情形，此时耐受群体每年都是上一年的$1+(\alpha f/\overline{n})$倍，所得到的近似式与我们的目的极为一致。利用（1.16）我们可以将这种情形概括在下面的近似公式中

$$N_n^{(R)}=N_0^{(R)}\left(1+\frac{\alpha f}{\overline{n}}\right)^n,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots。\qquad(1.23)$$

在上述计算中，$\alpha f/\overline{n}$取为2。所以对这种特殊情形我们重新得到了近似式$R_i=3R_{i-1}$。注意，即使这种非常简单的问题也显示了对一个特定情形数值计算的作用之一，即揭示了简化处理的可能性。因此，一个简洁的解析近似式也许会随之而来。

1.4 讨论

从以上分析可以推断：对除草剂的耐受性之所以不出现似乎归因于两种相关的可能性。（1）即便杂草经过除草剂的处理后，耐受植株的适应度仍然较小。在这种情形，除草剂的处理仅仅使耐受群体处于这样的低稳状态，即只有敏感者的突变才产生耐受者。（2）只要喷洒了除草剂，耐受植株的适应度就比敏感者的高。然而耐受群体从敏感群体最初的极小部分增长到值得注意的数值，则要花许多年。

上面的（1）或（2）是否成立取决于是否有$\alpha f<1$。注意种子库的存在时间$\overline{n}$在这里并不出现，而在近似因子中。耐受者与其在使用除草剂前的稳态的偏差以此因子即$1+\alpha f/\overline{n}$增长。

有必要较详细地解释问题中各种参数的相互影响。这里非常重要的是我们应该知道有关本学科领域的传统做法是什么。这是因为若其成果以不常见的形式表达，则好的工作可能不会受到任何正确的评价。例如，应用数学家一般偏向于研究无量纲变量，而实验课题专家有时认为使用以某个标准单位测得的有量纲数量有大得多的用处。

促使我们作了上述研究的问题可以定性地描述为：‘除草剂的耐受植株为什么不出现？’我们还可以作进一步的定量描述：‘耐受植株达到值得注意的程度要花多长时间？’‘值得注意的’并不是一个精确的字眼。当喷洒除草剂后耐受者数目等于剩下的敏感者通常的数目时，我们就认为耐受者是值得注意的。这也许有点随意性，不过还是很合理的（这里借鉴了格雷塞博士的有关农场的实践知识）。那时农场主会看到在喷洒计划执行后所预计的芽苗数将翻一番。

喷洒除草剂后，敏感者的数目是$\beta_S\alpha_S N$，而在第i个季节耐受者的数目在喷洒除草剂后是$N_n^{(R)}/\psi_R\gamma_R$。令n^*是使得

$$N_{n^*}^{(R)}/\psi_R\gamma_R=\beta_S\alpha_S N$$

的n值。利用（1.23）则有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com